

Рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 1 (частина друга)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння з однією невідомою

- **Рівняння** з однією невідомою x – це вираз вигляду

$$f(x) = g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.

- Число x_0 називається **коренем** або **розв'язком** рівняння, якщо при підстановці x_0 замість x в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0) = g(x_0)$.
- Наприклад, 2 – **корінь** рівняння $x^2 = 2x$, оскільки $2^2 = 2 \cdot 2$ – істинна числова рівність, а 3 не є коренем цього рівняння, оскільки $3^2 = 2 \cdot 3$ – хибна числова рівність.
- **Розв'язати рівняння** – значить знайти всі його корені або, як часто кажуть, множину його коренів.

Рівняння з однією невідомою

- **Рівняння** з однією невідомою x – це вираз вигляду

$$f(x) = g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.

- Число x_0 називається **коренем** або **розв'язком рівняння**, якщо при підстановці x_0 замість x в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0) = g(x_0)$.
- Наприклад, 2 – корінь рівняння $x^2 = 2x$, оскільки $2^2 = 2 \cdot 2$ – істинна числова рівність, а 3 не є коренем цього рівняння, оскільки $3^2 = 2 \cdot 3$ – хибна числова рівність.
- Розв'язати рівняння – значить знайти всі його корені або, як часто кажуть, множину його коренів.

Рівняння з однією невідомою

- **Рівняння** з однією невідомою x – це вираз вигляду

$$f(x) = g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.

- Число x_0 називається **коренем** або **розв'язком рівняння**, якщо при підстановці x_0 замість x в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0) = g(x_0)$.
- Наприклад, 2 – корінь рівняння $x^2 = 2x$, оскільки $2^2 = 2 \cdot 2$ – істинна числова рівність, а 3 не є коренем цього рівняння, оскільки $3^2 = 2 \cdot 3$ – хибна числова рівність.
- Розв'язати рівняння – значить знайти всі його корені або, як часто кажуть, множину його коренів.

Рівняння з однією невідомою

- **Рівняння** з однією невідомою x – це вираз вигляду

$$f(x) = g(x),$$

де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.

- Число x_0 називається **коренем** або **розв'язком рівняння**, якщо при підстановці x_0 замість x в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0) = g(x_0)$.
- Наприклад, 2 – корінь рівняння $x^2 = 2x$, оскільки $2^2 = 2 \cdot 2$ – істинна числова рівність, а 3 не є коренем цього рівняння, оскільки $3^2 = 2 \cdot 3$ – хибна числова рівність.
- **Розв'язати рівняння** – значить знайти всі його корені або, як часто кажуть, множину його коренів.

Квадратні рівняння

Кількість дійсних коренів **квадратного рівняння**

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (1)$$

де a, b, c – дійсні числа і $a \neq 0$, залежить від **дискримінанта** $D = b^2 - 4ac$.

Якщо $D < 0$, то рівняння (1) не має дійсних коренів.

При $D = 0$ рівняння (1) має один дійсний корінь, а при

$D > 0$ – має два дійсних корені; корені знаходять за формулою

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Квадратні рівняння

- Наприклад, у рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$
дискримінант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.
Отже, $x = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1}$, тобто рівняння має **два**
корені: $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

Рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$ має **один** розв'язок $x = 2$,
оскільки дискримінант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Рівняння $x^2 - 3x + 4 = 0$ **не має дійсних коренів**
(оскільки його дискримінант
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), тобто множина його
розв'язів порожня. Пишуть: $x \in \emptyset$.

- Символ $a \in A$ означає, що a є елементом множини
 A . Наприклад, $1 \in \{-1; 1; 4\}$ або $3 \in [2; 5]$.

Квадратні рівняння

- Наприклад, у рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$
дискримінант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.

Отже, $x = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1}$, тобто рівняння має **два**
корені: $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

Рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$ має **один** розв'язок $x = 2$,
оскільки дискримінант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Рівняння $x^2 - 3x + 4 = 0$ **не має дійсних коренів**
(оскільки його дискримінант
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), тобто множина його
розв'язів порожня. Пишуть: $x \in \emptyset$.

- Символ $a \in A$ означає, що a є елементом множини
 A . Наприклад, $1 \in \{-1; 1; 4\}$ або $3 \in [2; 5]$.

Квадратні рівняння

- Наприклад, у рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$
дискримінант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.

Отже, $x = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1}$, тобто рівняння має **два**
корені: $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

Рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$ має **один** розв'язок $x = 2$,
оскільки дискримінант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Рівняння $x^2 - 3x + 4 = 0$ **не має** дійсних **коренів**
(оскільки його дискримінант
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), тобто множина його
розв'язів порожня. Пишуть: $x \in \emptyset$.

- Символ $a \in A$ означає, що a є елементом множини
 A . Наприклад, $1 \in \{-1; 1; 4\}$ або $3 \in [2; 5]$.

Квадратні рівняння

- Наприклад, у рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$
дискримінант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0$.

Отже, $x = \frac{3 \pm 1}{2 \cdot 1}$, тобто рівняння має **два**
корені: $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

Рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$ має **один** розв'язок $x = 2$,
оскільки дискримінант $D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Рівняння $x^2 - 3x + 4 = 0$ **не має** дійсних **коренів**
(оскільки його дискримінант
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), тобто множина його
розв'язів порожня. Пишуть: $x \in \emptyset$.

- Символ $a \in A$ означає, що a є елементом множини A . Наприклад, $1 \in \{-1; 1; 4\}$ або $3 \in [2; 5]$.

Нерівності з однією невідомою

- **Нерівностями** з однією невідомою x називають вирази вигляду $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \neq g(x)$ (строгі нерівності) і $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ (нестрогі нерівності), де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.
- Число a називається **розв'язком нерівності**, якщо при підстановці a замість x в нерівність одержуємо істинну числову нерівність.
- Наприклад, 2 – розв'язок нерівності $3x < 8$, оскільки $3 \cdot 2 < 8$ – істинна числова нерівність, а 4 не є розв'язком цієї нерівності, оскільки $3 \cdot 4 < 8$ – хибна числова нерівність.
- **Розв'язати нерівність** – значить знайти всі її розв'язки, тобто множину її розв'язків.

Нерівності з однією невідомою

- **Нерівностями** з однією невідомою x називають вирази вигляду
 $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \neq g(x)$ (строгі нерівності) і
 $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ (нестрогі нерівності),
де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.
- Число a називається **розв'язком нерівності**, якщо при підстановці a замість x в нерівність одержуємо істинну числову нерівність.
- Наприклад, 2 – розв'язок нерівності $3x < 8$, оскільки $3 \cdot 2 < 8$ – істинна числова нерівність,
а 4 не є розв'язком цієї нерівності, оскільки $3 \cdot 4 < 8$ – хибна числова нерівність.
- **Розв'язати нерівність** – значить знайти всі її розв'язки, тобто множину її розв'язків.

Нерівності з однією невідомою

- **Нерівностями** з однією невідомою x називають вирази вигляду
 $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \neq g(x)$ (строгі нерівності) і
 $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ (нестрогі нерівності),
де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.
- Число a називається **розв'язком нерівності**, якщо при підстановці a замість x в нерівність одержуємо істинну числову нерівність.
- Наприклад, 2 – розв'язок нерівності $3x < 8$, оскільки $3 \cdot 2 < 8$ – істинна числова нерівність,
а 4 не є розв'язком цієї нерівності, оскільки $3 \cdot 4 < 8$ – хибна числова нерівність.
- **Розв'язати нерівність** – значить знайти всі її розв'язки, тобто множину її розв'язків.

Нерівності з однією невідомою

- **Нерівностями** з однією невідомою x називають вирази вигляду $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \neq g(x)$ (строгі нерівності) і $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ (нестрогі нерівності), де $f(x)$ і $g(x)$ – деякі функції.
- Число a називається **розв'язком нерівності**, якщо при підстановці a замість x в нерівність одержуємо істинну числову нерівність.
- Наприклад, 2 – розв'язок нерівності $3x < 8$, оскільки $3 \cdot 2 < 8$ – істинна числова нерівність, а 4 не є розв'язком цієї нерівності, оскільки $3 \cdot 4 < 8$ – хибна числова нерівність.
- **Розв'язати нерівність** – значить знайти всі її розв'язки, тобто множину її розв'язків.

Рівносильні рівняння і нерівності

- Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо співпадають множини їх розв'язків.

При цьому пишуть: $f_1(x) = g_1(x) \iff f_2(x) = g_2(x)$.

- Приклади: 1) $2x = 6 \iff x = 3$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків – $\{3\}$.

2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків $\{1; 2\}$.

3) Рівняння $x^2 = -1$ і $\sin x = 2$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожного з них порожня. Пишуть: $x^2 = -1 \iff \sin x = 2 \iff x \in \emptyset$.

- Аналогічно визначається поняття рівносильності нерівностей.

Рівносильні рівняння і нерівності

- Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо співпадають множини їх розв'язків.

При цьому пишуть: $f_1(x) = g_1(x) \iff f_2(x) = g_2(x)$.

- Приклади: 1) $2x = 6 \iff x = 3$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків – $\{3\}$.

2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків $\{1; 2\}$.

3) Рівняння $x^2 = -1$ і $\sin x = 2$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожного з них порожня. Пишуть: $x^2 = -1 \iff \sin x = 2 \iff x \in \emptyset$.

- Аналогічно визначається поняття рівносильності нерівностей.

Рівносильні рівняння і нерівності

- Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо співпадають множини їх розв'язків.
При цьому пишуть: $f_1(x) = g_1(x) \iff f_2(x) = g_2(x)$.
- Приклади: 1) $2x = 6 \iff x = 3$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків – $\{3\}$.
2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків $\{1; 2\}$.
3) Рівняння $x^2 = -1$ і $\sin x = 2$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожного з них порожня. Пишуть: $x^2 = -1 \iff \sin x = 2 \iff x \in \emptyset$.
- Аналогічно визначається поняття рівносильності нерівностей.

Рівносильні рівняння і нерівності

- Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо співпадають множини їх розв'язків.
При цьому пишуть: $f_1(x) = g_1(x) \iff f_2(x) = g_2(x)$.
- Приклади: 1) $2x = 6 \iff x = 3$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків – $\{3\}$.
2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків $\{1; 2\}$.
3) Рівняння $x^2 = -1$ і $\sin x = 2$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожного з них порожня. Пишуть: $x^2 = -1 \iff \sin x = 2 \iff x \in \emptyset$.
- Аналогічно визначається поняття рівносильності нерівностей.

Рівносильні рівняння і нерівності

- Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо співпадають множини їх розв'язків.

При цьому пишуть: $f_1(x) = g_1(x) \iff f_2(x) = g_2(x)$.

- Приклади: 1) $2x = 6 \iff x = 3$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків – $\{3\}$.

2) $x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$, оскільки обидва рівняння мають одну і ту ж множину розв'язків $\{1; 2\}$.

3) Рівняння $x^2 = -1$ і $\sin x = 2$ рівносильні, оскільки множина розв'язків кожного з них порожня. Пишуть: $x^2 = -1 \iff \sin x = 2 \iff x \in \emptyset$.

- Аналогічно визначається поняття рівносильності нерівностей.

Рівносильні перетворення рівнянь

- Заміна рівняння (чи нерівності) рівносильним йому рівнянням (чи нерівністю) називається **рівносильним переходом**.
- Відзначимо основні перетворення рівнянь, що здійснюють рівносильний перехід:

1) в рівнянні будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) = g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) = g(x) ;$$

2) обидві частини рівняння можна помножити чи поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, тобто якщо число $a \neq 0$, то

$$f(x) = g(x) \iff a f(x) = a g(x) \iff \frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{a} .$$

Рівносильні перетворення рівнянь

- Заміна рівняння (чи нерівності) рівносильним йому рівнянням (чи нерівністю) називається **рівносильним переходом**.
- Відзначимо **основні перетворення рівнянь**, що здійснюють рівносильний перехід:

1) в рівнянні будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) = g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) = g(x) ;$$

2) обидві частини рівняння можна помножити чи поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, тобто якщо число $a \neq 0$, то

$$f(x) = g(x) \iff a f(x) = a g(x) \iff \frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{a} .$$

Рівносильні перетворення рівнянь

- Заміна рівняння (чи нерівності) рівносильним йому рівнянням (чи нерівністю) називається **рівносильним переходом**.
- Відзначимо **основні перетворення рівнянь**, що здійснюють рівносильний перехід:

1) в рівнянні будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) = g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) = g(x);$$

2) обидві частини рівняння можна помножити чи поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, тобто якщо число $a \neq 0$, то

$$f(x) = g(x) \iff a f(x) = a g(x) \iff \frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{a}.$$

Рівносильні перетворення рівнянь

- Заміна рівняння (чи нерівності) рівносильним йому рівнянням (чи нерівністю) називається **рівносильним переходом**.
- Відзначимо **основні перетворення рівнянь**, що здійснюють рівносильний перехід:

1) в рівнянні будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) = g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) = g(x) ;$$

2) обидві частини рівняння можна помножити чи поділити на одне і те ж число, відмінне від нуля, тобто якщо число $a \neq 0$, то

$$f(x) = g(x) \iff a f(x) = a g(x) \iff \frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{a} .$$

Рівносильні перетворення нерівностей

- Відзначимо **основні перетворення нерівностей**, що здійснюють рівносильний перехід:

1) в нерівності будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) > g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) > g(x);$$

2) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж **додатне** число, тобто якщо число $a > 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) > ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} > \frac{g(x)}{a};$$

обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж **від'ємне** число, змінивши при цьому **знак нерівності** на **протилежний**, тобто якщо число $a < 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) < ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} < \frac{g(x)}{a};$$

3) $f(x) < g(x) \iff g(x) > f(x)$.

Рівносильні перетворення нерівностей

- Відзначимо **основні перетворення нерівностей**, що здійснюють рівносильний перехід:
 - 1) в нерівності будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:

$$f(x) > g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) > g(x);$$

- 2) обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж додатне число, тобто якщо число $a > 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) > ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} > \frac{g(x)}{a};$$

- обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, тобто якщо число $a < 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) < ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} < \frac{g(x)}{a};$$

- 3) $f(x) < g(x) \iff g(x) > f(x)$.

Рівносильні перетворення нерівностей

- Відзначимо основні перетворення нерівностей, що здійснюють рівносильний перехід:
 - в нерівності будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:
$$f(x) > g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) > g(x);$$
 - обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж додатне число, тобто якщо число $a > 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) > ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} > \frac{g(x)}{a};$$

обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, тобто якщо число $a < 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) < ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} < \frac{g(x)}{a};$$

$$3) \quad f(x) < g(x) \iff g(x) > f(x).$$

Рівносильні перетворення нерівностей

- Відзначимо основні перетворення нерівностей, що здійснюють рівносильний перехід:
 - в нерівності будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:
$$f(x) > g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) > g(x);$$
 - обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж додатне число, тобто якщо число $a > 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) > ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} > \frac{g(x)}{a};$$

обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, тобто якщо число $a < 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) < ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} < \frac{g(x)}{a};$$

$$3) \quad f(x) < g(x) \iff g(x) > f(x).$$

Рівносильні перетворення нерівностей

- Відзначимо основні перетворення нерівностей, що здійснюють рівносильний перехід:
 - в нерівності будь-який доданок можна перенести з однієї частини в іншу, змінивши його знак:
$$f(x) > g(x) + h(x) \iff f(x) - h(x) > g(x);$$
 - обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж додатне число, тобто якщо число $a > 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) > ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} > \frac{g(x)}{a};$$

обидві частини нерівності можна помножити або поділити на одне і те ж від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, тобто якщо число $a < 0$, то

$$f(x) > g(x) \iff af(x) < ag(x) \iff \frac{f(x)}{a} < \frac{g(x)}{a};$$

3) $f(x) < g(x) \iff g(x) > f(x).$

Лінійні рівняння і нерівності

- Вказаних перетворень достатньо, щоб розв'язати будь-яке **лінійне** рівняння або **лінійну** нерівність (тобто рівняння або нерівність **першого степеня**).
- Приклади: 1) Розв'язати нерівність
$$-2x + 4 \leq 10 + x.$$

Розв'язання. Перенесемо x з правої частини нерівності в ліву, а 4 – з лівої частини в праву і одержимо нерівність $-2x - x \leq 10 - 4 \iff -3x \leq 6$. Тепер поділимо одержану нерівність на -3 , змінивши знак нерівності на протилежний:
$$x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2.$$

2) Розв'язати нерівність $-2x > 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x > 4$, одержуємо **хибну** числову нерівність $0 > 4$. Тому початкова **нерівність не має розв'язків**: $x \in \emptyset$.

Лінійні рівняння і нерівності

- Вказаних перетворень достатньо, щоб розв'язати будь-яке **лінійне** рівняння або **лінійну** нерівність (тобто рівняння або нерівність **першого степеня**).
- Приклади: 1) Розв'язати нерівність
$$-2x + 4 \leq 10 + x.$$

Розв'язання. Перенесемо x з правої частини нерівності в ліву, а 4 – з лівої частини в праву і одержимо нерівність $-2x - x \leq 10 - 4 \iff -3x \leq 6$. Тепер поділимо одержану нерівність на -3 , змінивши знак нерівності на протилежний:
$$x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2.$$

2) Розв'язати нерівність $-2x > 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x > 4$, одержуємо **хибну** числову нерівність $0 > 4$. Тому початкова **нерівність не має розв'язків**: $x \in \emptyset$.

Лінійні рівняння і нерівності

- Вказаних перетворень достатньо, щоб розв'язати будь-яке **лінійне** рівняння або **лінійну** нерівність (тобто рівняння або нерівність **першого степеня**).
- Приклади: 1) Розв'язати нерівність
$$-2x + 4 \leq 10 + x.$$

Розв'язання. Перенесемо x з правої частини нерівності в ліву, а 4 – з лівої частини в праву і одержимо нерівність $-2x - x \leq 10 - 4 \iff -3x \leq 6$. Тепер поділимо одержану нерівність на -3 , змінивши знак нерівності на протилежний:
$$x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2.$$

2) Розв'язати нерівність $-2x > 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x > 4$, одержуємо **хибну** числову нерівність $0 > 4$. Тому початкова **нерівність не має розв'язків**: $x \in \emptyset$.

Лінійні рівняння і нерівності

- Вказаних перетворень достатньо, щоб розв'язати будь-яке **лінійне** рівняння або **лінійну** нерівність (тобто рівняння або нерівність **першого степеня**).
- Приклади: 1) Розв'язати нерівність
$$-2x + 4 \leq 10 + x.$$

Розв'язання. Перенесемо x з правої частини нерівності в ліву, а 4 – з лівої частини в праву і одержимо нерівність $-2x - x \leq 10 - 4 \iff -3x \leq 6$. Тепер поділимо одержану нерівність на -3 , змінивши знак нерівності на протилежний:
$$x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2.$$

2) Розв'язати нерівність $-2x > 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x > 4$, одержуємо **хибну** числову нерівність $0 > 4$. Тому початкова **нерівність не має розв'язків**: $x \in \emptyset$.

Лінійні рівняння і нерівності

- Вказаних перетворень достатньо, щоб розв'язати будь-яке **лінійне** рівняння або **лінійну** нерівність (тобто рівняння або нерівність **першого степеня**).
- Приклади: 1) Розв'язати нерівність
$$-2x + 4 \leq 10 + x.$$

Розв'язання. Перенесемо x з правої частини нерівності в ліву, а 4 – з лівої частини в праву і одержимо нерівність $-2x - x \leq 10 - 4 \iff -3x \leq 6$. Тепер поділимо одержану нерівність на -3 , змінивши знак нерівності на протилежний:
$$x \geq \frac{6}{-3} \iff x \geq -2.$$

2) Розв'язати нерівність $-2x > 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x > 4$, одержуємо **хибну** числову нерівність $0 > 4$. Тому початкова **нерівність не має розв'язків**: $x \in \emptyset$.

Лінійні рівняння і нерівності

3) Розв'язати нерівність $-2x \leq 4 - 2x$.

Розв'язання. Перенісши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x \leq 4$, одержуємо істинну числову нерівність $0 \leq 4$. Тому розв'язком початкової нерівності є будь-яке дійсне число: $x \in \mathbf{R}$.

- Аналогічно розв'язуються лінійні рівняння.

Лінійні рівняння і нерівності

3) Розв'язати нерівність $-2x \leq 4 - 2x$.

Розв'язання. Переніши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x \leq 4$, одержуємо істинну числову нерівність $0 \leq 4$. Тому розв'язком початкової нерівності є будь-яке дійсне число: $x \in \mathbf{R}$.

- Аналогічно розв'язуються лінійні рівняння.

Лінійні рівняння і нерівності

3) Розв'язати нерівність $-2x \leq 4 - 2x$.

Розв'язання. Переніши $-2x$ з правої частини нерівності в ліву: $-2x + 2x \leq 4$, одержуємо істинну числову нерівність $0 \leq 4$. Тому розв'язком початкової нерівності є будь-яке дійсне число: $x \in \mathbf{R}$.

- Аналогічно розв'язуються лінійні рівняння.

Нерівносильні перетворення

Інші перетворення рівнянь і нерівностей, як правило, **не здійснюють рівносильний перехід**:

1) піднесення обох частин рівняння до квадрату, як правило, призводить до появи сторонніх розв'язків.

Так, підносячи до квадрату обидві частини рівняння $2x = 4$, яке має один корінь $x = 2$, одержуємо рівняння $4x^2 = 16$, яке має два корені: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, ці рівняння не є рівносильними. Пишуть:

$$2x = 4 \not\leftrightarrow (2x)^2 = 4^2.$$

При піднесенні до квадрату обох частин нерівності, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються!!!

Нерівносильні перетворення

Інші перетворення рівнянь і нерівностей, як правило, не здійснюють рівносильний перехід:

1) піднесення обох частин рівняння до квадрату, як правило, призводить до появи сторонніх розв'язків.

Так, підносячи до квадрату обидві частини рівняння $2x = 4$, яке має один корінь $x = 2$, одержуємо рівняння $4x^2 = 16$, яке має два корені: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, ці рівняння не є рівносильними. Пишуть:

$$2x = 4 \not\leftrightarrow (2x)^2 = 4^2.$$

При піднесенні до квадрату обох частин нерівності, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються!!!

Нерівносильні перетворення

Інші перетворення рівнянь і нерівностей, як правило, не здійснюють рівносильний перехід:

1) піднесення обох частин рівняння до квадрату, як правило, призводить до появи сторонніх розв'язків.

Так, підносячи до квадрату обидві частини рівняння $2x = 4$, яке має один корінь $x = 2$, одержуємо рівняння $4x^2 = 16$, яке має два корені: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, ці рівняння не є рівносильними. Пишуть:

$$2x = 4 \not\Leftrightarrow (2x)^2 = 4^2.$$

При піднесенні до квадрату обох частин нерівності, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються!!!

Нерівносильні перетворення

Інші перетворення рівнянь і нерівностей, як правило, не здійснюють рівносильний перехід:

1) піднесення обох частин рівняння до квадрату, як правило, призводить до появи сторонніх розв'язків.

Так, підносячи до квадрату обидві частини рівняння $2x = 4$, яке має один корінь $x = 2$, одержуємо рівняння $4x^2 = 16$, яке має два корені: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Отже, ці рівняння не є рівносильними. Пишуть:

$$2x = 4 \not\Rightarrow (2x)^2 = 4^2.$$

При піднесенні до квадрату обох частин нерівності, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються !!!

Нерівносильні перетворення

2) як правило, не можна множити або ділити обидві частини рівнянь і нерівностей на вираз, що містить невідому.

Так, $2x = 4 \not\Rightarrow (2x)x = 4x$, оскільки множина розв'язків першого рівняння – $\{2\}$, а множина розв'язків другого рівняння – $\{0; 2\}$;

При множенні обох частин нерівності на вираз з невідомою, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються !!!

3) скорочення дробів на вираз з невідомою може призвести до появи сторонніх розв'язків.

Так, рівняння $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$ не має коренів, а одержане після скорочення дробу рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Отже, $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \not\Rightarrow x - 2 = 0$.

Нерівносильні перетворення

2) як правило, не можна множити або ділити обидві частини рівнянь і нерівностей на вираз, що містить невідому.

Так, $2x = 4 \not\Leftrightarrow (2x)x = 4x$, оскільки множина розв'язків першого рівняння – $\{2\}$, а множина розв'язків другого рівняння – $\{0; 2\}$;

При множенні обох частин нерівності на вираз з невідомою, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються!!!

3) скорочення дробів на вираз з невідомою може призвести до появи сторонніх розв'язків.

Так, рівняння $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$ не має коренів, а одержане після скорочення дробу рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Отже, $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \not\Rightarrow x - 2 = 0$.

Нерівносильні перетворення

2) як правило, не можна множити або ділити обидві частини рівнянь і нерівностей на вираз, що містить невідому.

Так, $2x = 4 \not\Leftrightarrow (2x)x = 4x$, оскільки множина розв'язків першого рівняння – $\{2\}$, а множина розв'язків другого рівняння – $\{0; 2\}$;

При множенні обох частин нерівності на вираз з невідомою, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються !!!

3) скорочення дробів на вираз з невідомою може призвести до появи сторонніх розв'язків.

Так, рівняння $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$ не має коренів, а одержане після скорочення дробу рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Отже, $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \not\Leftrightarrow x - 2 = 0$.

Нерівносильні перетворення

2) як правило, не можна множити або ділити обидві частини рівнянь і нерівностей на вираз, що містить невідому.

Так, $2x = 4 \not\Leftrightarrow (2x)x = 4x$, оскільки множина розв'язків першого рівняння – $\{2\}$, а множина розв'язків другого рівняння – $\{0; 2\}$;

При множенні обох частин нерівності на вираз з невідомою, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються !!!

3) скорочення дробів на вираз з невідомою може призвести до появи сторонніх розв'язків.

Так, рівняння $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$ не має коренів, а одержане після скорочення дробу рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Отже, $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \not\Leftrightarrow x - 2 = 0$.

Нерівносильні перетворення

2) як правило, не можна множити або ділити обидві частини рівнянь і нерівностей на вираз, що містить невідому.

Так, $2x = 4 \not\Leftrightarrow (2x)x = 4x$, оскільки множина розв'язків першого рівняння – $\{2\}$, а множина розв'язків другого рівняння – $\{0; 2\}$;

При множенні обох частин нерівності на вираз з невідомою, як правило, не тільки з'являються сторонні розв'язки, але розв'язки також втрачаються !!!

3) скорочення дробів на вираз з невідомою може призвести до появи сторонніх розв'язків.

Так, рівняння $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0$ не має коренів, а одержане після скорочення дробу рівняння $x - 2 = 0$ має корінь $x = 2$. Отже, $\frac{(x-2)^2}{x-2} = 0 \not\Leftrightarrow x - 2 = 0$.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей

Серед різноманіття прийомів та способів розв'язання рівнянь і нерівностей можна виділити **чотири** найбільш загальних **основних методи**:

- графічний метод,
- узагальнений метод інтервалів,
- метод заміни змінних,
- теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Переважну більшість рівнянь і нерівностей можна розв'язати одним з цих методів або відразу ж, або після попередніх тотожних перетворень. Тому оволодіння основними методами розв'язання рівнянь і нерівностей є однією з першочергових задач абітурієнта при підготовці до конкурсних іспитів.