

Техніка розв'язання рівнянь і нерівностей з параметром, I

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 10 (частина друга)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

В Прикладах 1, 2 частини першої Уроку 10 розглянуто рівняння $ax = 1$ і нерівність $ax < 1$ з параметром a .

Узагальнюючи наведені при розв'язанні цих прикладів міркування на більш загальні ситуації, приходимо до висновків про те, що

- при розв'язанні лінійного рівняння $bx = c$ з параметром b необхідно окремо виділити два випадки: $b = 0$ і $b \neq 0$,
- а при розв'язанні лінійних нерівностей виду $bx > c$, $bx < c$, $bx \geq c$, $bx \leq c$ – три випадки: $b > 0$, $b = 0$, $b < 0$.

Розглянемо приклади.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

В Прикладах 1, 2 частини першої Уроку 10 розглянуто рівняння $ax = 1$ і нерівність $ax < 1$ з параметром a .

Узагальнюючи наведені при розв'язанні цих прикладів міркування на більш загальні ситуації, приходимо до висновків про те, що

- при розв'язанні лінійного рівняння $bx = c$ з параметром b необхідно окремо виділити **два** випадки: $b = 0$ і $b \neq 0$,
- а при розв'язанні лінійних нерівностей виду $bx > c$, $bx < c$, $bx \geq c$, $bx \leq c$ – **три** випадки: $b > 0$, $b = 0$, $b < 0$.

Розглянемо приклади.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

В Прикладах 1, 2 частини першої Уроку 10 розглянуто рівняння $ax = 1$ і нерівність $ax < 1$ з параметром a .

Узагальнюючи наведені при розв'язанні цих прикладів міркування на більш загальні ситуації, приходимо до висновків про те, що

- при розв'язанні лінійного рівняння $bx = c$ з параметром b необхідно окремо виділити **два** випадки: $b = 0$ і $b \neq 0$,
- а при розв'язанні лінійних нерівностей виду $bx > c$, $bx < c$, $bx \geq c$, $bx \leq c$ – **три** випадки: $b > 0$, $b = 0$, $b < 0$.

Розглянемо приклади.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту додатків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійному** рівнянні доданки, що містять невідому x , в ліву частину рівняння, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

1) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо рівняння $0x = 7$ (**хибна** рівність), яке не має розв'язків, тобто при цьому $x \in \emptyset$;

2) при $a + 3 \neq 0 \iff a \neq -3$ отримуємо $x = \frac{4-a}{a+3}$.

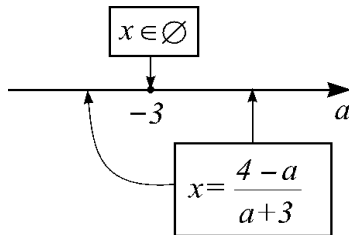
Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Для наглядного зображення залежності множини розв'язків від параметра далі використовуються діаграми спеціального виду. Наведемо таку діаграму із зображенням результату розв'язання попереднього прикладу:

$$2ax - ax + 3x = 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x = 4 - a$$



Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в лінійній нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути три випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (істинна нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійній** нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **три** випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (**істинна** нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійній** нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **три** випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (**істинна** нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійній** нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **три** випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (**істинна** нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійній** нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **три** випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (**істинна** нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$ з параметром a .

Розв'язання. Переносячи в **лінійній** нерівності доданки, що містять невідому x , в ліву частину нерівності, а решту доданків – у його праву частину, отримуємо

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a.$$

Далі необхідно розглянути **три** випадки:

1) при $a + 3 > 0 \iff a > -3$ отримуємо $x < \frac{4-a}{a+3}$;

2) при $a + 3 = 0 \iff a = -3$ маємо нерівність $0x < 7$ (**істинна** нерівність), розв'язками якої є всі $x \in \mathbf{R}$;

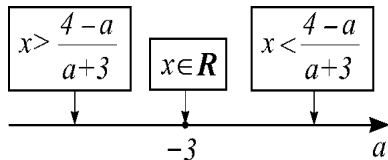
3) при $a + 3 < 0 \iff a < -3$ отримуємо $x > \frac{4-a}{a+3}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Результат розв'язання нерівності

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a$$

зобразимо на діаграмі:

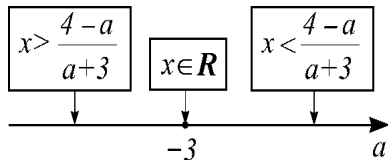
Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in \left(-\infty, \frac{4-a}{a+3}\right)$;2) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a < -3$ $x \in \left(\frac{4-a}{a+3}, \infty\right)$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Результат розв'язання нерівності

$$2ax - ax + 3x < 2a + 3 - 3a + 1 \iff (a + 3)x < 4 - a$$

зобразимо на діаграмі:



Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in \left(-\infty, \frac{4-a}{a+3}\right)$;

2) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a < -3$ $x \in \left(\frac{4-a}{a+3}, \infty\right)$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (**істинна** рівність) $\iff x \in \mathbf{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (**хибна** рівність) $\iff x \in \emptyset$.

Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути два випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (істинна рівність) $\iff x \in \mathbb{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (хибна рівність) $\iff x \in \emptyset$.

Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (**істинна** рівність) $\iff x \in \mathbb{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (**хибна** рівність) $\iff x \in \emptyset$.

Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (**істинна** рівність) $\iff x \in \mathbf{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (**хибна** рівність) $\iff x \in \emptyset$.

Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (**істинна** рівність) $\iff x \in \mathbf{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (**хибна** рівність) $\iff x \in \emptyset$.

Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x + a(4 - ax) = 4$ з параметром a .

Розв'язання. Маємо

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff x + 4a - a^2x = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a.$$

Далі необхідно розглянути **два** випадки:

$$1 - a^2 = 0 \text{ и } 1 - a^2 \neq 0.$$

Оскільки $1 - a^2 = 0 \iff a = \pm 1$, то розглянемо також окремо кожен із випадків: $a = 1$ і $a = -1$.

Так, при $a = 1$ маємо рівняння $0x = 0$ (**істинна** рівність) $\iff x \in \mathbf{R}$.

При $a = -1$ отримуємо рівняння $0x = 8$ (**хибна** рівність) $\iff x \in \emptyset$.

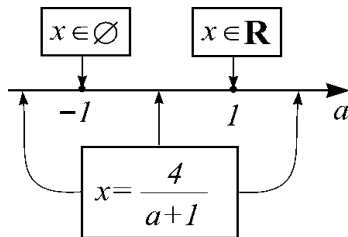
Нарешті, у випадку $1 - a^2 \neq 0 \iff a \neq \pm 1$, враховуючи, що при цьому $1 - a \neq 0$, отримуємо $x = \frac{4-4a}{1-a^2} = \frac{4(1-a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Отримані розв'язки в усіх розглянутих випадках для рівняння

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a$$

відображені на діаграмі:



Відповідь: 1) при $a = 1$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a = -1$ $x \in \emptyset$;

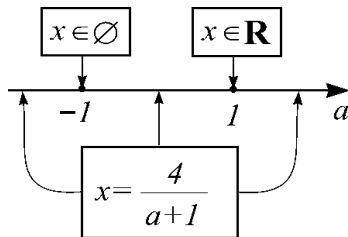
3) при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{4}{a+1}$.

Лінійні рівняння і нерівності з параметром

Отримані розв'язки в усіх розглянутих випадках для рівняння

$$x + a(4 - ax) = 4 \iff (1 - a^2)x = 4 - 4a$$

відображені на діаграмі:



Відповідь: 1) при $a = 1$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a = -1$ $x \in \emptyset$;

3) при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{4}{a+1}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Розглянемо приклад.

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що **тип рівняння** (1) **залежить** від параметра a . Це означає, що вираз (1) є квадратним рівнянням **не при всіх значеннях параметра a !** Дійсно, якщо $a-1=0$, то перший доданок у рівнянні зникає, і ми маємо лінійне рівняння. Оскільки для розв'язання лінійних і квадратних рівнянь використовуються істотно різні прийоми, то при розв'язанні рівняння (1) необхідно окремо розглянути випадки $a-1=0$ і $a-1 \neq 0$.

При $a-1=0 \iff a=1$ отримуємо **лінійне** рівняння $-2(1+2)x + 1 + 1 = 0 \iff -6x + 2 = 0$, яке має єдиний корінь $x = 1/3$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Розглянемо приклад.

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що **тип рівняння** (1) **залежить від параметра a** . Це означає, що **вираз (1) є квадратним рівнянням не при всіх значеннях параметра a !** Дійсно, якщо $a-1=0$, то перший доданок у рівнянні зникає, і ми маємо лінійне рівняння. Оскільки для розв'язання лінійних і квадратних рівнянь використовуються істотно різні прийоми, то при розв'язанні рівняння (1) необхідно окремо розглянути випадки $a-1=0$ і $a-1 \neq 0$.

При $a-1=0 \iff a=1$ отримуємо **лінійне** рівняння
 $-2(1+2)x + 1 + 1 = 0 \iff -6x + 2 = 0$,
яке має єдиний корінь $x = 1/3$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Розглянемо приклад.

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що **тип рівняння** (1) **залежить від параметра a** . Це означає, що **вираз (1) є квадратним рівнянням не при всіх значеннях параметра a !** Дійсно, якщо $a-1=0$, то перший доданок у рівнянні зникає, і ми маємо лінійне рівняння. Оскільки для розв'язання лінійних і квадратних рівнянь використовуються істотно різні прийоми, то при розв'язанні рівняння (1) необхідно окремо розглянути випадки $a-1=0$ і $a-1 \neq 0$.

При $a-1=0 \iff a=1$ отримуємо **лінійне** рівняння $-2(1+2)x + 1 + 1 = 0 \iff -6x + 2 = 0$, яке має єдиний корінь $x = 1/3$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У випадку $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ маємо **квадратне** рівняння.

Знаходимо четверту частину його дискримінанта:

$$D/4 = (a+2)^2 - (a-1)(a+1) = 4a+5.$$

Далі розв'язання квадратного (при $a \neq 1$) рівняння з параметром a , в свою чергу, розділяється на **три** якісно різні випадки: $D < 0$, $D = 0$ і $D > 0$.

При $D < 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 < 0, \end{cases} \iff a < -5/4$ рівняння не має розв'язків.

При $D = 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 = 0, \end{cases} \iff a = -5/4$ рівняння має

єдиний розв'язок $x = \frac{a+2}{a-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{1}{3}$.

Нарешті, при $D > 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 > 0, \end{cases} \iff a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$

рівняння має два корені $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У випадку $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ маємо **квадратне** рівняння. Знаходимо четверту частину його дискримінанта:

$$D/4 = (a+2)^2 - (a-1)(a+1) = 4a+5.$$

Далі розв'язання квадратного (при $a \neq 1$) рівняння з параметром a , в свою чергу, розділяється на **три** якісно різні випадки: $D < 0$, $D = 0$ і $D > 0$.

При $D < 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 < 0, \end{cases} \iff a < -5/4$ рівняння **не має розв'язків**.

При $D = 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 = 0, \end{cases} \iff a = -5/4$ рівняння має

єдиний розв'язок $x = \frac{a+2}{a-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{1}{3}$.

Нарешті, при $D > 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 > 0, \end{cases} \iff a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$

рівняння має два корені $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У випадку $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ маємо **квадратне** рівняння. Знаходимо четверту частину його дискримінанта:

$$D/4 = (a+2)^2 - (a-1)(a+1) = 4a+5.$$

Далі розв'язання квадратного (при $a \neq 1$) рівняння з параметром a , в свою чергу, розділяється на **три** якісно різні випадки: $D < 0$, $D = 0$ і $D > 0$.

При $D < 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 < 0, \end{cases} \iff a < -5/4$ рівняння не має розв'язків.

При $D = 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 = 0, \end{cases} \iff a = -5/4$ рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{a+2}{a-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{1}{3}$.

Нарешті, при $D > 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 > 0, \end{cases} \iff a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ рівняння має два корені $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У випадку $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ маємо **квадратне** рівняння. Знаходимо четверту частину його дискримінанта:

$$D/4 = (a+2)^2 - (a-1)(a+1) = 4a+5.$$

Далі розв'язання квадратного (при $a \neq 1$) рівняння з параметром a , в свою чергу, розділяється на **три** якісно різні випадки: $D < 0$, $D = 0$ і $D > 0$.

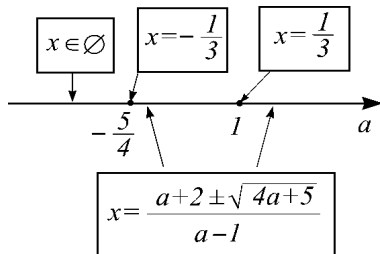
При $D < 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 < 0, \end{cases} \iff a < -5/4$ рівняння не має розв'язків.

При $D = 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 = 0, \end{cases} \iff a = -5/4$ рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{a+2}{a-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{1}{3}$.

Нарешті, при $D > 0 \iff \begin{cases} a \neq 1, \\ 4a+5 > 0, \end{cases} \iff a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ рівняння має два корені $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

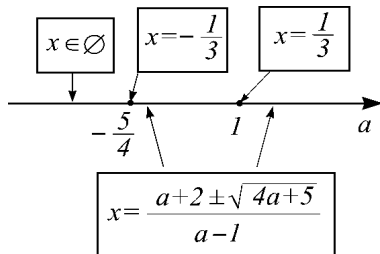
Результат розв'язання рівняння $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0$ зобразимо у вигляді діаграми:



Відповідь: 1) при $a < -\frac{5}{4}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a = -\frac{5}{4}$ $x = -\frac{1}{3}$;
 3) при $a \in \left(-\frac{5}{4}, 1\right) \cup (1, \infty)$ $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$;
 4) при $a = 1$ $x = \frac{1}{3}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

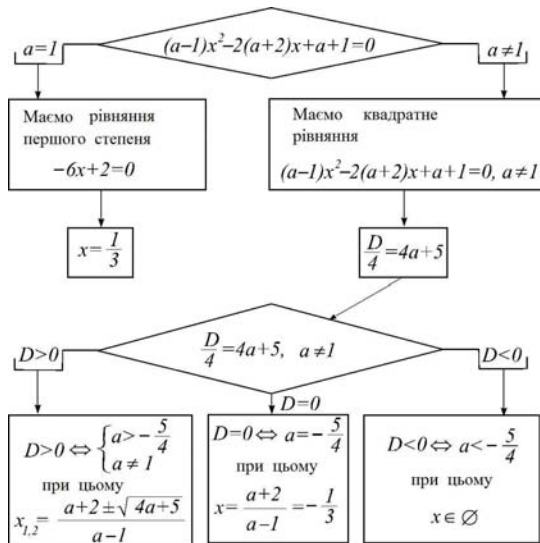
Результат розв'язання рівняння $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0$ зобразимо у вигляді діаграми:



Відповідь: 1) при $a < -\frac{5}{4}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a = -\frac{5}{4}$ $x = -\frac{1}{3}$;
 3) при $a \in \left(-\frac{5}{4}, 1\right) \cup (1, \infty)$ $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$;
 4) при $a = 1$ $x = \frac{1}{3}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Розглянемо також блок-схему розв'язання:



Наведена блок-схема наглядно демонструє наступну характерну особливість рівнянь і нерівностей з параметром: їх розв'язання розгалужується в залежності від параметра.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

- Відзначимо, що при розв'язанні квадратних рівнянь з параметром випадки $D > 0$ і $D = 0$ можна об'єднати в один випадок $D \geq 0$, оскільки в цих випадках корені рівняння знаходяться за однією і тією ж формулою коренів квадратного рівняння. При цьому розв'язання є коротшим, а відповідь складається з меншого числа пунктів.

Зокрема, в Прикладі 4 у випадку $D = 0 \iff a = -5/4$ єдиний розв'язок знаходиться за тією ж формулою, що і у випадку $D > 0$, а саме: $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1} = \frac{-\frac{5}{4}+2 \pm 0}{-\frac{5}{4}-1} = -\frac{1}{3}$.

Таким чином, відповідь до Прикладу 4 можна записати у такий спосіб:

Відповідь: 1) при $a < -\frac{5}{4}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right) \cup \cup(1, \infty)$ $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$; 3) при $a = 1$ $x = \frac{1}{3}$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У той же час при розв'язанні квадратних нерівностей з параметром випадки $D > 0$ і $D = 0$ доцільно розглядати окремо, оскільки в цих випадках розташування параболи відносно осі Ox є різним, і тому множини розв'язків нерівності, як правило, різні за своїм виглядом.

Приклад 5. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0. \quad (2)$$

Розв'язання. Відзначимо, що при **будь-якому** значенні параметра a вираз (2) є **квадратною** нерівністю, а графіком функції $y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$ є парабола, вітки якої направлені вгору.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У той же час при розв'язанні квадратних нерівностей з параметром випадки $D > 0$ і $D = 0$ доцільно розглядати окремо, оскільки в цих випадках розташування параболи відносно осі Ox є різним, і тому множини розв'язків нерівності, як правило, різні за своїм виглядом.

Приклад 5. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0. \quad (2)$$

Розв'язання. Відзначимо, що при **будь-якому** значенні параметра a вираз (2) є **квадратною** нерівністю, а графіком функції $y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$ є парабола, вітки якої направлені вгору.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У той же час при розв'язанні квадратних нерівностей з параметром випадки $D > 0$ і $D = 0$ доцільно розглядати окремо, оскільки в цих випадках розташування параболи відносно осі Ox є різним, і тому множини розв'язків нерівності, як правило, різні за своїм виглядом.

Приклад 5. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0. \quad (2)$$

Розв'язання. Відзначимо, що при **будь-якому** значенні параметра a вираз (2) є **квадратною** нерівністю, а графіком функції $y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$ є парабола, вітки якої направлені вгору.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0. \quad (3)$$

Маємо $D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0$.

Розглянемо окремо випадки $D > 0$ і $D = 0$, оскільки в цих випадках розташування параболи $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ відносно осі Ox є різним.

$$a = -3$$
$$y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$



У випадку $D = 0 \iff \iff (a+3)^2 = 0 \iff a = -3$ рівняння (3) має єдиний корінь $x = 4$. При цьому парабола $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ дотикається до осі Ox (див. мал.), а нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ не має розв'язків.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0. \quad (3)$$

Маємо $D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0$.

Розглянемо окремо випадки $D > 0$ і $D = 0$, оскільки в цих випадках розташування параболи $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ відносно осі Ox є різним.

$$a = -3$$
$$y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$



У випадку $D = 0 \iff \iff (a+3)^2 = 0 \iff a = -3$ рівняння (3) має єдиний корінь $x = 4$. При цьому парабола $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ дотикається до осі Ox (див. мал.), а нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ не має розв'язків.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

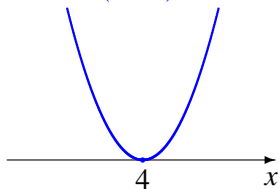
Знайдемо точки перетину цієї параболи з віссю Ox , розв'язуючи квадратне рівняння

$$x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 = 0. \quad (3)$$

Маємо $D/4 = (a-1)^2 + 8a + 8 = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2 \geq 0$.

Розглянемо окремо випадки $D > 0$ і $D = 0$, оскільки в цих випадках розташування параболи $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ відносно осі Ox є різним.

$$a = -3$$
$$y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$$



У випадку $D = 0 \iff \iff (a+3)^2 = 0 \iff a = -3$ рівняння (3) має єдиний корінь $x = 4$. При цьому парабола $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ дотикається до осі Ox (див. мал.), а нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ не має розв'язків.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

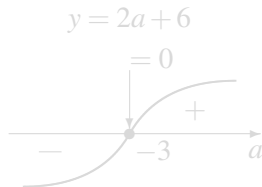
У випадку $D > 0 \iff (a+3)^2 > 0 \iff a \neq -3$ квадратне рівняння має два корені:

$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Отже, маємо $x_1 = 4$, $x_2 = -2a-2$.

Щоб зобразити параболу $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ і розв'язати нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ при $a \neq -3$, необхідно визначити взаємне розташування точок x_1 і x_2 на числовій прямій (а воно є різним при різних значеннях параметра a (!)).



Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків цього виразу (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

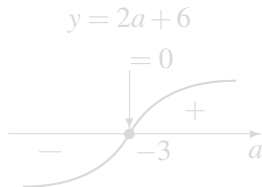
У випадку $D > 0 \iff (a+3)^2 > 0 \iff a \neq -3$ квадратне рівняння має два корені:

$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Отже, маємо $x_1 = 4$, $x_2 = -2a-2$.

Щоб зобразити параболу $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ і розв'язати нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ при $a \neq -3$, необхідно визначити **взаємне розташування** точок x_1 і x_2 на числовій прямій (а воно є різним при різних значеннях параметра a (!)).



Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків цього виразу (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

У випадку $D > 0 \iff (a+3)^2 > 0 \iff a \neq -3$ квадратне рівняння має два корені:

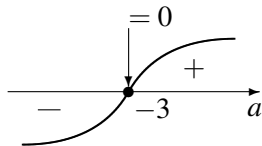
$$x_{1,2} = -(a-1) \pm \sqrt{(a+3)^2} = 1-a \pm |a+3| = 1-a \pm (a+3)$$

(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).

Отже, маємо $x_1 = 4$, $x_2 = -2a-2$.

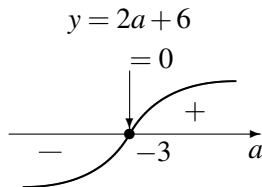
Щоб зобразити параболу $y = x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8$ і розв'язати нерівність $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$ при $a \neq -3$, необхідно визначити **взаємне розташування** точок x_1 і x_2 на числовій прямій (а воно є різним при різних значеннях параметра a (!)).

$$y = 2a + 6$$



Для цього розглянемо різницю $x_1 - x_2 = 2a + 6$ і зобразимо криву знаків цього виразу (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого



Враховуючи співвідношення

$$x_1 - x_2 > 0 \iff x_1 > x_2,$$

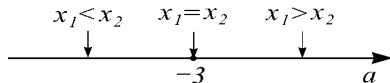
$$x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2,$$

$$x_1 - x_2 < 0 \iff x_1 < x_2,$$

отримуємо наступний результат порівняння точок

$$x_1 = 4 \text{ і } x_2 = -2a - 2,$$

який зобразимо на діаграмі:



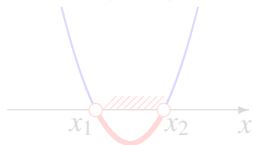
Зазначимо тут, що нас цікавить результат порівняння точок x_1 і x_2 тільки при $a \neq -3$, оскільки розв'язки заданої квадратної нерівності уже отримані у випадку $a = -3$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Тепер розв'яжемо нерівність $x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0$ графічним методом у випадках $a < -3$ і $a > -3$ з урахуванням різного для цих випадків взаємного розташування точок $x_1 = 4$ і $x_2 = -2a - 2$.

$$a < -3$$

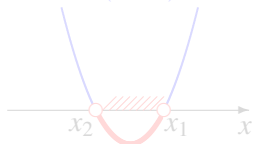
$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



У випадку $a < -3$ виконується нерівність $x_1 < x_2$, тобто точка x_1 розташована зліва від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_1, x_2)$.

$$a > -3$$

$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



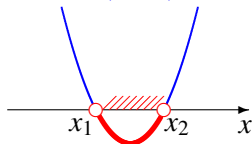
У випадку $a > -3$ виконується нерівність $x_1 > x_2$, тобто точка x_1 розташована справа від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_2, x_1)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Тепер розв'яжемо нерівність $x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0$ графічним методом у випадках $a < -3$ і $a > -3$ з урахуванням різного для цих випадків взаємного розташування точок $x_1 = 4$ і $x_2 = -2a - 2$.

$$a < -3$$

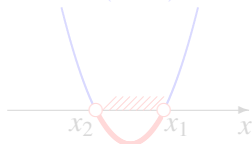
$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



У випадку $a < -3$ виконується нерівність $x_1 < x_2$, тобто точка x_1 розташована зліва від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_1, x_2)$.

$$a > -3$$

$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



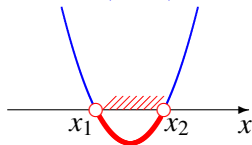
У випадку $a > -3$ виконується нерівність $x_1 > x_2$, тобто точка x_1 розташована справа від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_2, x_1)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Тепер розв'яжемо нерівність $x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8 < 0$ графічним методом у випадках $a < -3$ і $a > -3$ з урахуванням різного для цих випадків взаємного розташування точок $x_1 = 4$ і $x_2 = -2a - 2$.

$$a < -3$$

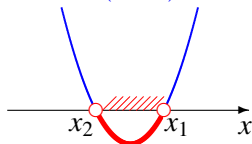
$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



У випадку $a < -3$ виконується нерівність $x_1 < x_2$, тобто точка x_1 розташована зліва від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_1, x_2)$.

$$a > -3$$

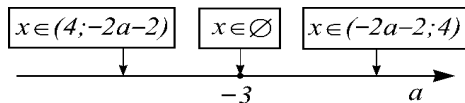
$$y = x^2 + 2(a - 1)x - 8a - 8$$



У випадку $a > -3$ виконується нерівність $x_1 > x_2$, тобто точка x_1 розташована справа від точки x_2 . При цьому задана нерівність має розв'язки $x \in (x_2, x_1)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

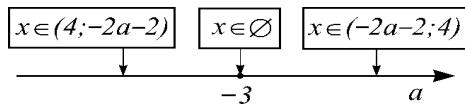
Враховуючи також розглянутий раніше випадок $a = -3$, отримуємо наступний результат розв'язання заданої квадратної нерівності $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$:



Відповідь: 1) при $a < -3$ $x \in (4; -2a-2)$;
2) при $a = -3$ $x \in \emptyset$; 3) при $a > -3$ $x \in (-2a-2; 4)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Враховуючи також розглянутий раніше випадок $a = -3$, отримуюмо наступний результат розв'язання заданої квадратної нерівності $x^2 + 2(a-1)x - 8a - 8 < 0$:



Відповідь: 1) при $a < -3$ $x \in (4; -2a-2)$;
2) при $a = -3$ $x \in \emptyset$; 3) при $a > -3$ $x \in (-2a-2; 4)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Приклад 6. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0. \quad (4)$$

Розв'язання. При $a-1=0 \iff a=1$ маємо лінійну нерівність $-2(1+2)x+1+1 \leq 0 \iff -6x \leq -2 \iff x \geq 1/3$.

При $a-1 \neq 0$ вираз (4) є квадратною нерівністю, проте слід врахувати, що вітки параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ при $a-1 > 0 \iff a > 1$ направлені вгору, а при $a-1 < 0 \iff a < 1$ – вниз.

Шукаємо точки перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ з віссю Ox , розв'язуючи рівняння

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0,$$

розглянуте в Прикладі 4.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Приклад 6. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0. \quad (4)$$

Розв'язання. При $a-1=0 \iff a=1$ маємо лінійну нерівність $-2(1+2)x+1+1 \leq 0 \iff -6x \leq -2 \iff x \geq 1/3$.

При $a-1 \neq 0$ вираз (4) є квадратною нерівністю, проте слід врахувати, що вітки параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ при $a-1 > 0 \iff a > 1$ направлені вгору, а при $a-1 < 0 \iff a < 1$ – вниз.

Шукаємо точки перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ з віссю Ox , розв'язуючи рівняння

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0,$$

розглянуте в Прикладі 4.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Приклад 6. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0. \quad (4)$$

Розв'язання. При $a-1=0 \iff a=1$ маємо лінійну нерівність $-2(1+2)x+1+1 \leq 0 \iff -6x \leq -2 \iff x \geq 1/3$.

При $a-1 \neq 0$ вираз (4) є квадратною нерівністю, проте слід врахувати, що вітки параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ при $a-1 > 0 \iff a > 1$ направлені вгору, а при $a-1 < 0 \iff a < 1$ – вниз.

Шукаємо точки перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ з віссю Ox , розв'язуючи рівняння

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0,$$

розглянуте в Прикладі 4.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Приклад 6. Розв'язати нерівність з параметром a :

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0. \quad (4)$$

Розв'язання. При $a-1=0 \iff a=1$ маємо лінійну нерівність $-2(1+2)x+1+1 \leq 0 \iff -6x \leq -2 \iff x \geq 1/3$.

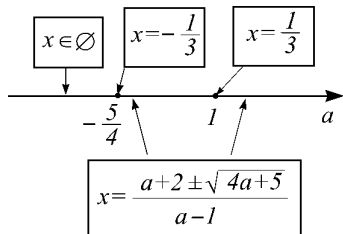
При $a-1 \neq 0$ вираз (4) є квадратною нерівністю, проте слід врахувати, що вітки параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ при $a-1 > 0 \iff a > 1$ направлені вгору, а при $a-1 < 0 \iff a < 1$ – вниз.

Шукаємо точки перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$ з віссю Ox , розв'язуючи рівняння

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0,$$

розглянуте в Прикладі 4.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого



Результат розв'язання рівняння $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 = 0$ зображено на діаграмі.

$$a < -5/4$$



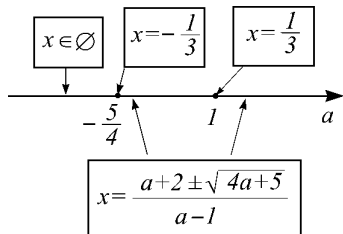
$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

У випадку $a < -5/4$ парабола $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$ не перетинає вісь Ox і її вітки направлені вниз. Розв'язками нерівності

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

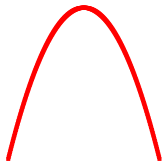
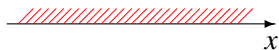
є всі $x \in \mathbf{R}$ (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого



Результат розв'язання рівняння $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 = 0$ зображено на діаграмі.

$$a < -5/4$$



$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

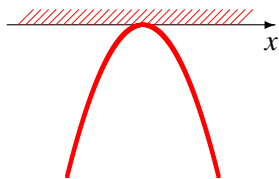
У випадку $a < -5/4$ парабола $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$ не перетинає вісь Ox і її вітки направлені вниз. Розв'язками нерівності

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

є всі $x \in \mathbf{R}$ (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

$$a = -5/4$$



$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

У випадку $a = -5/4$ парабола

$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

дотикається до осі Ox і її вітки направлені вниз. Розв'язками нерівності

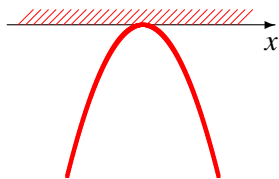
$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

є всі $x \in \mathbf{R}$ (див. мал.).

У випадку $a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ необхідно визначити взаємне розташування точок $x_1 = \frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}$ і $x_2 = \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1}$ перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$ з віссю Ox . Маємо $x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{4a+5}}{a-1}$. Оскільки чисельник цього виразу додатний при $a > -5/4$, то різниця $x_2 - x_1$ має такий же знак, як і знаменник $a-1$, а саме: $x_2 - x_1 > 0$ при $a > 1$ і $x_2 - x_1 < 0$ при $a \in (-5/4; 1)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

$$a = -5/4$$



$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

У випадку $a = -5/4$ парабола

$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

дотикається до осі Ox і її вітки направлені вниз. Розв'язками нерівності

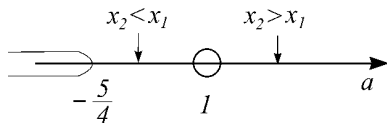
$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

є всі $x \in \mathbf{R}$ (див. мал.).

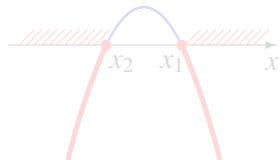
У випадку $a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ необхідно визначити **взаємне розташування** точок $x_1 = \frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}$ і $x_2 = \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1}$ перетину параболи $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$ з віссю Ox . Маємо $x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{4a+5}}{a-1}$. Оскільки чисельник цього виразу додатний при $a > -5/4$, то різниця $x_2 - x_1$ має такий же знак, як і знаменник $a - 1$, а саме: $x_2 - x_1 > 0$ при $a > 1$ і $x_2 - x_1 < 0$ при $a \in (-5/4; 1)$.

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Результат порівняння точок x_1 і x_2 при $a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ відображає наступна діаграма:



$$a \in (-5/4; 1)$$



$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

Тепер при $a \in (-5/4; 1)$, враховуючи, що вітки параболи

$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

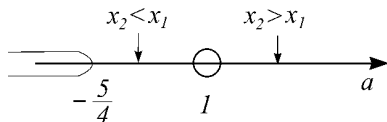
в цьому випадку направлені вниз і $x_2 < x_1$, отримуємо розв'язки нерівності

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

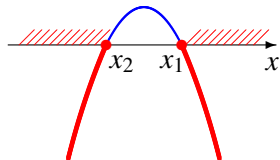
у вигляді $x \in (-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty)$ (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Результат порівняння точок x_1 і x_2 при $a \in (-5/4; 1) \cup (1, \infty)$ відображає наступна діаграма:



$$a \in (-5/4; 1)$$



$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

Тепер при $a \in (-5/4; 1)$, враховуючи, що вітки параболи

$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1$$

в цьому випадку направлені вниз і $x_2 < x_1$, отримуємо розв'язки нерівності

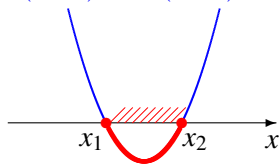
$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 1 \leq 0$$

у вигляді $x \in (-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty)$ (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

$$a > 1$$

$$y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$$



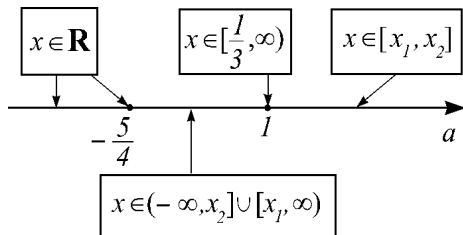
При $a > 1$ вітки параболи
 $y = (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1$
направлені вгору, $x_2 > x_1$ і
розв'язками нерівності

$$(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 \leq 0$$

є $x \in [x_1, x_2]$ (див. мал.).

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Отже, розглянуто всі можливі випадки і отримано наступний результат:



Відповідь:

$$1) \text{ при } a > 1 \quad x \in \left[\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}; \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1} \right];$$

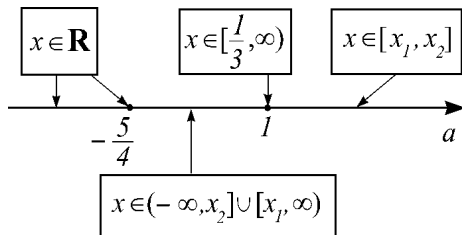
$$2) \text{ при } a = 1 \quad x \in [1/3, \infty); \quad 3) \text{ при } a \in (-5/4; 1)$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1} \right] \cup \left[\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}, \infty \right);$$

$$4) \text{ при } a \leq -5/4 \quad x \in \mathbf{R}.$$

Рівняння і нерівності степеня не вище другого

Отже, розглянуто всі можливі випадки і отримано наступний результат:



Відповідь:

1) при $a > 1$ $x \in \left[\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}; \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1} \right];$

2) при $a = 1$ $x \in [1/3, \infty);$ 3) при $a \in (-5/4; 1)$

$x \in \left(-\infty, \frac{a+2+\sqrt{4a+5}}{a-1} \right] \cup \left[\frac{a+2-\sqrt{4a+5}}{a-1}, \infty \right);$

4) при $a \leq -5/4$ $x \in \mathbf{R}.$