Навчальні контрольні роботи

Тут наведено варіанти навчальних контрольних робіт з математики і фізики.

При виконанні контрольних робіт з математики радимо користуватися посібником

[1] Кругликов А.В., Плакса С.А. Пособие для довузовской подготовки по математике. – Киев: НТУУ "КПИ 1999.

Зверніть увагу на те, що після завдань 11 – 25 в квадратних дужках містяться посилання на конкретні місця в тексті посібника [1], де викладено відповідний теоретичний матеріал і наведено приклади розв'язання типових завдань. Наприклад, посилання [1, § 6, приклади 3 – 9, с. 25 – 26] означає, що в посібнику [1] слід розглянути приклади 3 – 9, викладені в § 6 на сторінках 25, 26. Радимо приступати до виконання кожного такого завдання тільки після ґрунтовного опрацювання рекомендованого місця в тексті посібника [1].

В контрольних роботах з фізики представлено задачі, які охоплюють основні розділи шкільної програми. Завдання супроводжуються методичними вказівками, в яких повідомляється тематика груп задач і рекомендується загальний метод чи характерний прийом розв'язання кожної задачі.

Загальні рекомендації до розв'язання фізичних задач такі:

1. *Записати умову в скороченому вигляді, використовуючи загально прийняті позначення фізичних величин.* Розділити за умовою задачі задані та шукані величини. В ряді задач робляться для спрощення додаткові припущення, які необхідно враховувати при розв'язанні (наприклад, відсутність сил тертя при русі тіл, невагомість нитки тощо).

2. *Проаналізувати фізичний зміст задачі за допомогою рисунка, на якому умовно вказати усі параметри задачі.* Пам'ятайте, що неохайність на малюнку може призвести до серйозних помилок.

3. *Встановити, які фізичні закономірності лежать в основі задачі.* Записати формули, що виражають ці закономірності. В ряді випадків для повної характеристики фізичного явища потрібно ввести в розгляд допоміжні величини, відсутні в умові задачі.

4. *Виконати розв'язання в загальному вигляді, використовуючи буквені позначення.* Кінцевою метою такого розв'язання є одержання розрахункової формули для шуканої величини, в яку входять задані величини і константи. Інколи доцільно при розв'язанні виконувати обчислення зразу, якщо перетворення в загальному вигляді занадто громіздкі.

5. *Перевірити розмірність шуканої величини.* Для цього в праву частину одержаної формули необхідно підставити розмірності величин, що в неї входять, і шляхом їх перетворення і скорочення переконатися, що формула дає правильну розмірність шуканої величини. Якщо розмірності лівої і правої частини формули різні, слід перевірити правильність всіх математичних викладок.

Слід підкреслити, що правильна розмірність одержаного виразу шуканої величини ще не гарантує правильність розв'язання, оскільки помилковими в цьому виразі можуть виявитися числові множники, безрозмірні тригонометричні вирази тощо.

6. *Виконати обчислення і записати остаточну відповідь.* Тут необхідно пам'ятати:

– числові значення величин повинні бути виражені в одній і тій же системі одиниць, інакше числове значення шуканої величини буде неправильним;

– результат повинен бути розумно округлений. Для цього в відповіді доцільно залишати на одну значущу цифру більше, ніж в заданих значеннях величин (наприклад, якщо в умові величини задані з точністю до десятих, то відповідь слід подати з точністю до сотих).

7. *Перевірити правильність розв'язання.* Оскільки на конкурсних іспитах правильні

відповіді не відомі заздалегідь, то важливість уміння перевіряти розв'язання важко переоцінити.

Вкажемо дві найбільш характерні ознаки того, що задачу розв'язано неправильно:

а) одержана формула дає неправильну залежність шуканої величини від заданих величин.

Розглянемо приклад. Шайбу пускають з початковою швидкістю v_0 вниз по гладенькій похилій площині, довжина якої L і кут нахилу α. Потрібно знайти швидкість v шайби біля підніжжя похилої площини.

Нехай в результаті розв'язання одержано відповідь $v = \sqrt{v_0^2 + 2gL\cos\alpha}$, де g — прискорення вільного падіння. За цією формулою v збільшується із зростанням v_0 і L, що цілком природньо. Проте формула дає зменшення v із зростанням кута α, чого в дійсності не може бути. Отже, формула неправильна. При уважній перевірці розв'язання виявиться, що на певному його етапі замість функції $\sin\alpha$ помилково використана функція $\cos\alpha$;

б) в результаті обчислень одержано неправдоподібне значення шуканої величини (наприклад, одержано масу Землі $M = 500$ кг). В цьому випадку можливою помилкою може бути неправильне використання скорочень кратних одиниць таких як, наприклад, 1 нанометр = 1 нм = 10^{-9} м чи 1 гигаОм = 1 ГОм = 10^9 Ом тощо.

На завершення дві практичні поради:

– не засмучуйтесь, якщо завдання не розв'язується відразу. Це творчий процес і він, як правило, розпочинається з невдач. Пам'ятайте, що успіху досягає той, кого невдачі не зупиняють;

– не відкладайте розв'язання на останній вечір перед відправкою контрольної роботи. В цьому випадку найбільш складні, тобто найбільш змістовні завдання завідомо не можуть бути розв'язані. Над виконанням контрольних робіт треба працювати систематично.

1.	Прізвище	
2.	Ім'я	
3.	По батькові	

Математика

Контрольна робота № 1
(тестові завдання з вибором однієї правильної відповіді)

Числа, вирази, тотожні перетворення. Раціональні рівняння і нерівності

1. Виконайте ділення $\frac{a^9}{8} : \frac{a^3}{24}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{a^6}$	$\frac{3}{a^3}$	$\frac{a^6}{3}$	$3a^6$	$3a^3$

2. Спростіть вираз $2x(x+1) - (x^2 - 3)$.

А	Б	В	Г	Д
$2x - 3$	$2x + 3$	0	$x^2 + 2x + 3$	$x^2 + 2x - 3$

3. Який з наведених дробів є найбільшим?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{8}$	$\frac{66}{77}$	$\frac{555}{666}$	$\frac{4444}{5555}$	$\frac{33333}{44444}$

4. Вкажіть, яке з наведених чисел є їрраціональним.

А	Б	В	Г	Д
0	-3	$\frac{4}{15}$	$0,4$	π

5. Який з наведених виразів набуває тільки додатних значень?

А	Б	В	Г	Д
x^2	$x^4 - 5$	$(x-5)^4$	$x^4 + 5$	$(x+5)^3$

6. Розкладіть на множники вираз $12x^2 - 12x + 3$.

А	Б	В	Г	Д
$2x - 1$	$12(2x - 1)$	$(2x - 1)^2$	$3(2x - 1)^2$	$(2x - 1)(2x + 1)$

7. Скільки дійсних коренів має рівняння $1 + (x - 1)^2 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
один	два	три	безліч	жодного

8. Обчисліть значення виразу $x_1 + x_2 - x_1 x_2$, якщо x_1, x_2 — корені рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	-8	8

9. Розв'яжіть нерівність $0,6x > 0,4x + 2$.

А	Б	В	Г	Д
$x > 0$	$x > 0,1$	$x > 1$	$x > 10$	$x > 100$

10. Вкажіть правильну нерівність серед наведених в таблиці, якщо $x < y$.

А	Б	В	Г	Д
$2x > 2y$	$x - 2 > y - 2$	$-2x > -2y$	$x + 2 > y + 2$	$\frac{x}{2} > \frac{y}{2}$

Контрольна робота № 1 (відкриті завдання)

Основні методи розв'язання рівнянь і нерівностей: графічний метод, метод інтервалів, метод заміни змінних. Переріз і об'єднання множин.

11. Знайти переріз $A \cap B \cap C$ множин A, B і C [1, § 2, с. 13 – 14]:

а) $A = [-5;3] \cup (8;13), B = (-\infty, 2] \cup [13;17], C = (-3;\infty)$. Відповідь: $(-3;2]$.

б) $A = [-4;9], B = (-4;14), C = (-\infty;6] \cup [9;\infty)$. Відповідь: $(-4;6] \cup \{9\}$.

12. Знайти об'єднання множин [1, § 2, с. 14]:

а) $A = (-\infty;-2], B = (-6;1], C = [1;3)$. Відповідь: $(-\infty;3)$.

б) $A = [-5;-1), B = [3;6), C = \{6\} \cup (8;11)$. Відповідь: $[-5;-1) \cup [3;6] \cup (8;11)$.

13. Розв'язати нерівності графічним методом [1, § 6, приклади 3 – 9, с. 25 – 26]:

а) $x^2 - 4x - 5 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$. б) $x^2 + 8x + 16 < 0$. Відповідь: $x \in \varnothing$.

в) $36 - x^2 \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$. г) $4x - x^2 - 4 \geq 0$. Відповідь: $x = 2$.

14. Розв'язати нерівності графічним методом [1, § 6, приклади 10 – 13, с. 27 – 29]:

а) $x^{10} \leq 11$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[10]{11}, \sqrt[10]{11}]$. б) $x^7 > -4$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[7]{4}, \infty)$.

Знайти область визначення функції (завдання **15** – **17**) [1, § 6, приклад 14, с. 29]:

15. $y = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 3} - \sqrt{-2x + 6}$. Відповідь: $D(y) = [-4, -3] \cup [-1; 3]$.

16. $y = \sqrt{x^2 - x - 12} - \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{14 - 3x}$. Відповідь: $D(y) = [-7, -3] \cup [4; 14/3]$.

17. $y = \sqrt{24 - 5x - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x - 8} - \sqrt{30 - 20x}$. Відповідь: $D(y) = \{-8\} \cup [1; 3/2]$.

Розв'язати нерівності методом заміни змінних (завдання **18**, **19**) [1, § 7, приклади 2 – 3, с. 33] :

18. $x^{14} - 12x^7 - 45 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[7]{3}) \cup (\sqrt[7]{15}, \infty)$.

19. $x^8 - 10x^4 + 21 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[4]{7}, -\sqrt[4]{3}] \cup [\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{7}]$.

Розв'язати нерівності, використовуючи метод інтервалів (завдання **20** – **25**) [1, § 9, приклад 4, с. 40; § 8, приклад на с. 35]:

20. $(x-3)^6(x+5)(x-4)^5 < 0$. Відповідь: $x \in (-5;3) \cup (3;4)$.

21. $x + 6 - \dfrac{x+1}{x+5} < \dfrac{5}{x+5}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -6) \cup (-5, -4)$.

22. $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{5}{3+x} \geq 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$.

23. $\dfrac{(x+1)^2(x+4)}{(x-7)^3} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -4] \cup \{-1\} \cup (7, \infty)$.

24. $x - 2 > \dfrac{4x-4}{4-x}$. Відповідь: $x \in (4, \infty)$.

25. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} \leq 2$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$.

Контрольна робота № 1 з фізики

Кінематика

Варіант 1

1. Один поїзд проїхав половину шляху S зі швидкістю $v_1 = 80$ км/год., а другу половину шляху — зі швидкістю $v_1' = 40$ км/год. Другий поїзд їхав половину часу t зі швидкістю $v_2 = 80$ км/год., а другу половину часу — зі швидкістю $v_2' = 40$ км/год. Яка середня швидкість кожного з поїздів?

2. Машина проїхала $S = 3$ км прямою дорогою, яка плавно переходить в кільцеву радіуса $R = 2$ км. Знайти відношення пройденого машиною шляху до модуля її повного переміщення в момент її повного розвороту.

3. Рухаючись рівноприскорено під схил, поїзд проїхав ділянку спуску з середньою швидкістю $v_{\text{сер}} = 43,2$ км/год, збільшивши швидкість на $\Delta v = 36$ км/год в кінці спуску в порівнянні зі швидкістю перед початком спуску. Знайти швидкість v_1, з якою рухався поїзд всередині ділянки спуску.

4. Графік залежності проекції швидкості деякого тіла від часу зображено на рис. 1.

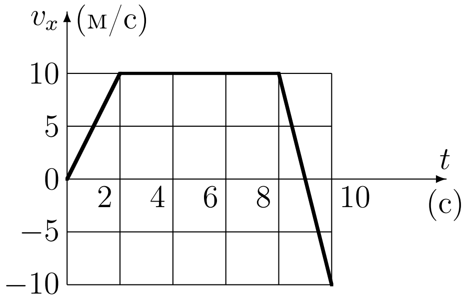

Рис. 1

Накреслити графіки залежності від часу проекції прискорення, координати тіла і пройденого ним шляху.

5. Поїзд проїхав шлях $S = 60$ км за час $t = 52$ хв. Спочатку він їхав з прискоренням $+a$, а потім з прискоренням $-a$, решту часу з максимальною швидкістю $v = 72$ км/год. Знайти модуль прискорення, якщо початкова і кінцева швидкості дорівнюють нулю. Розв'язати задачу аналітично і графічно.

6. Аеростат піднімається з землі вертикально вгору з прискоренням $a = 2$ м/с^2. Через $\tau = 5$ с після початку руху з аеростата випав предмет. Через який час t від початку падіння цей предмет впаде на землю.

7. З однієї точки без початкової швидкості вільно падають два предмета з інтервалом $\tau = 3$ с. Через який час t після початку руху першого предмета відстань між ними буде в $n = 3$ рази більша, ніж вона була в момент початку руху другого предмета.

8. Камінь, кинутий вертикально вгору, побував на висоті $h = 10$ м двічі з проміжком часу $\Delta t = 1,5$ с. Яка величина початкової швидкості v_0? Опором повітря знехтувати.

9. Тіло кинуто під кутом $\alpha = 30°$ до горизонта з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Опором повітря знехтувати. Вважати прискорення вільного падіння рівним $g = 10$ м/с^2.

а) Визначити тривалість польоту τ.

б) Визначити вектор переміщення $\vec{S}$ тіла за час $t = 1,5$ с та рівняння траєкторії.

в) Під яким кутом α повинно бути кинуто тіло, щоб дальність польоту була рівна максимальній довжині підйому?

10. Стержень довжиною $L = 50$ см обертається навколо перпендикулярної йому осі, здійснюючи $n = 30$ обертів на хвилину. При цьому один кінець стержня рухається навколо осі з лінійною швидкістю $v_1 = 57$ см/с. Знайти лінійну швидкість v_2 іншого кінця стержня.

Методичні вказівки до завдань контрольної роботи № 1

В контрольній роботі представлені завдання з наступних тем:

1. Механічний рух, основні поняття (переміщення, шлях, середня швидкість). Задачі 1, 2.

2. Прямолінійний рівноприскорений рух. Вільне падіння тіл. Задачі 3 – 8.

3. Криволінійний рух. Задачі 9, 10.

В задачах використовуються основні рівняння кінематики рівноприскореного руху:

для координати тіла $x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$,

для проекції швидкості $v_x = v_{0x} + a_x t$ або $v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x \Delta x$.

В цих рівняннях x_0 — початкова координата по осі OX, v_{0x} — проекція початкової швидкості і a_x — проекція прискорення на вісь OX. Значення x_0, v_{0x}, a_x залежать від вибору системи координат.

При розв'язанні задач з відповідними порядковими номерами скористайтеся наступними вказівками:

1. Скористайтеся формулою $v_{\text{сер}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Для першого поїзда виразіть час руху Δt через пройдений шлях S, для другого — пройдений шлях ΔS через час руху t.

2. Зробіть малюнок, визначте вектор переміщення, а також його модуль (за теоремою Піфагора).

3. Використовуючи те, що при рівноприскореному русі $v_{\text{сер}} = \dfrac{v + v_0}{2}$, і враховуючи, що $\Delta v = v - v_0$, послідовно знайти швидкості поїзда на початку спуска v_0 і в кінці спуска v. Далі для знаходження v_1 двічі використати формулу $v^2 - v_0^2 = 2aS$.

4. Графіки будуються на основі кінематичних рівнянь, записаних на різних ділянках руху тіла, що відповідають прямолінійним відрізкам заданного графіка.

5. Аналітично: за умовою задачі скласти систему кінематичних рівнянь і розв'язати її відносно a. Графічно: побудувати графік залежності $v(t)$ і врахувати, що площа під ним чисельно дорівнює пройденому поїздом шляху (в даній задачі — це площа трапеції).

6. Для розв'язання задачі необхідно виразити початкові умови руху предмета: висоту H, з якої він починає падати і початкову швидкість v_0 відносно землі, а потім використати закон рівноприскореного руху в полі сили тяжіння, тобто $y = H + v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$, де y — координата предмета по осі OY, перпендикулярній до поверхні землі, в момент часу t, g — прискорення вільного падіння, враховуючи при цьому, що в момент падіння $y = 0$.

7. Вибрати момент початку відліку часу і скласти кінематичні рівняння координат обох тіл з урахуванням початкових умов. Враховуючи задане відношення $n = 3$, знайти за допомогою одержаних рівнянь t.

8. Записати кінематичне рівняння руху тіла (воно буде квадратним відносно часу), Знайти корені та за їх різницею визначити v_0.

9. а) Слід вважати, що рух тіла відбувається над плоскою горизонтальною поверхнею. Тоді час τ можна визначити з кінематичних рівнянь (див. наступний пункт).

б) Для визначення вектора переміщення $\vec{S}$ необхідно знайти його модуль $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ та кут $\beta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ між напрямком вектора $\vec{S}$ і координатною віссю OX. Для визначення координат використовуються рівняння кінематики

$$x = v_0 (\cos\alpha)\, t\,, \tag{1}$$

$$y = v_0(\sin\alpha)\,t - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

(при цьому початок координат співпадає з точкою кидання, вісь OY направлена вгору, тому $x_0 = y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$, $a_x = 0$, $a_y = -g$). Виразивши t з рівняння (1) і підставивши цей вираз в рівняння (2), можна одержати рівняння траєкторії у вигляді функції $y = f(x)$.

в) Знаючи тривалість всього польоту τ, можна виразити дальність польоту L з умови $x(\tau) = L$ і максимальну висоту підйому H з умови $y(\tau/2) = H$. Далі, з умови $L = H$ можна одержати рівняння, яке дає можливість знайти кут α.

10. При розв'язанні задачі слід врахувати, що швидкість кінця стержня при русі по колу радіуса r дорівнює $v = 2\pi rn$. Далі необхідно розв'язати систему рівнянь $n = \dfrac{v_1}{2\pi r_1} = \dfrac{v_2}{2\pi r_2}$ відносно v_2.

Відповіді до завдань контрольної роботи № 1

1. $\dfrac{2v_1v_1'}{v_1 + v_1'} \approx 53,3$ км/год.; $\dfrac{v_2 + v_2'}{2} = 60$ км/год.

2. $\dfrac{S + \pi R}{\sqrt{S^2 + 4R^2}} \approx 1,9$.

3. $v_1 = \sqrt{v_{\text{сер}}^2 + \left(\dfrac{\Delta v}{2}\right)^2} \approx 13$ м/с.

4.

5. $a = \dfrac{v^2}{vt - S} \approx 0,17$ м/с^2.

6. $t = \dfrac{a\tau}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{g}{a}}\right) \approx 3,5$ с.

7. $t = \tau\,\dfrac{n+1}{2} = 6$ с.

8. $v_0 = \dfrac{g\Delta t}{2}\sqrt{1 + \dfrac{8h}{g(\Delta t)^2}} \approx 16$ м/с.

9. а) $\tau = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} = 2$ с; б) $|\vec{S}| = v_0 t\sqrt{1 - \dfrac{gt\sin\alpha}{v_0} + \left(\dfrac{gt}{2v_0}\right)^2} \approx 26,5$ м,

$\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gt}{2v_0\cos\alpha}\right) \approx 8^\circ$, $y = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha}\,x^2$; в) $\alpha = \operatorname{arctg} 4 \approx 76^\circ$.

10. $v_2 = 2\pi nL \pm v_1 \approx 2,14$; 1 м/с.