Техніка розв’язання рівнянь і нерівностей з параметром, II

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 11

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Сукупності рівнянь з параметром

Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

П р и к л а д 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{array}\right.$$

Р о з в' я з а н н я.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:

Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:

Сукупності рівнянь з параметром

Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a\,, \\ x^2 = 2-a\,. \end{array}\right.$$

Розв'язання.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:

Рівняння $x^2 = 2-a$ має розв'язки тільки при $2-a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2-a$ зображено на діаграмі:

Сукупності рівнянь з параметром

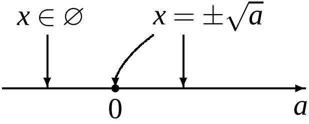
Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

П р и к л а д 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{array}\right.$$

Р о з в' я з а н н я.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:



Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:

Сукупності рівнянь з параметром

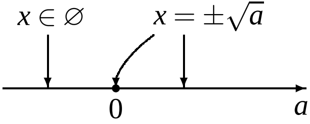
Відзначимо, що при різних значеннях параметра сукупність рівнянь з параметром має, взагалі кажучи, різну кількість розв'язків. Розглянемо приклад.

П р и к л а д 1. Розв'язати сукупність рівнянь з параметром a:

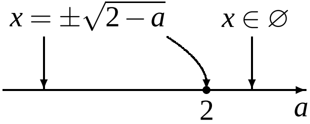
$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a. \end{array}\right.$$

Р о з в' я з а н н я.

Результат розв'язання рівняння $x^2 = a$ зображено на діаграмі:

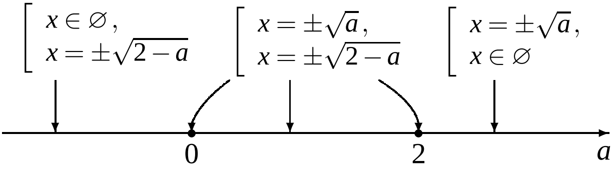


Рівняння $x^2 = 2 - a$ має розв'язки тільки при $2 - a \geq 0$, тобто при $a \leq 2$. Результат розв'язання рівняння $x^2 = 2 - a$ зображено на діаграмі:



Сукупності рівнянь з параметром

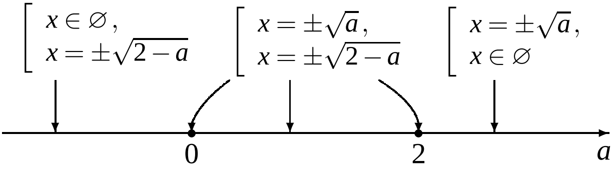
Для розв'язання сукупності розглянутих рівнянь накладаємо одна на одну діаграми з їх розв'язками і при цьому отримуємо наступну діаграму:



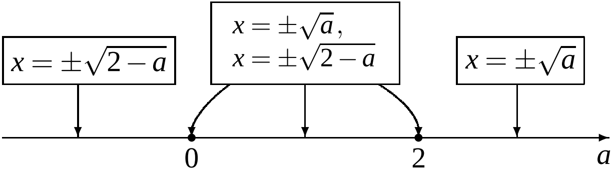
В результаті розв'язння сукупностей при різних значеннях параметра a отримуємо наступну діаграму розв'язків:

Сукупності рівнянь з параметром

Для розв'язання сукупності розглянутих рівнянь накладаємо одна на одну діаграми з їх розв'язками і при цьому отримуємо наступну діаграму:

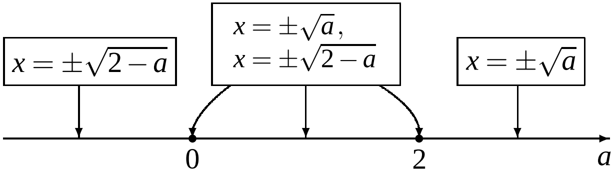


В результаті розв'язння сукупностей при різних значеннях параметра a отримуємо наступну діаграму розв'язків:



Сукупності рівнянь з параметром

За допомогою діаграми розв'язків



запишемо відповідь, що складається з трьох пунктів.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0;2]$ $x = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Біквадратні рівняння з параметром

П р и к л а д 2. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4-2x^2-a^2+2a=0$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи заміну змінних $t=x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння $t^2-2t-a^2+2a=0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4=1+a^2-2a=(a-1)^2\geq 0$.
Отже, квадратне рівняння має корені:
$t_{1,2}=1\pm\sqrt{(a-1)^2}=1\pm|a-1|=1\pm(a-1)$
(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)|=\pm f(a)$ (!)).
В результаті маємо $t_1=a$, $t_2=2-a$.
Далі маємо сукупність

$\left[\begin{array}{l} x^2=a, \\ x^2=2-a, \end{array}\right.$ яку розв'язано в Прикладі 1.

В і д п о в і д ь: 1) при $a<0$ $x=\pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a\in[0;2]$ $x=\pm\sqrt{a}, x=\pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a>2$ $x=\pm\sqrt{a}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 2. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4-2x^2-a^2+2a=0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t=x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння
$t^2-2t-a^2+2a=0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4=1+a^2-2a=(a-1)^2\geq 0$.
Отже, квадратне рівняння має корені:
$t_{1,2}=1\pm\sqrt{(a-1)^2}=1\pm|a-1|=1\pm(a-1)$
(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)|=\pm f(a)$ (!)).
В результаті маємо $t_1=a$, $t_2=2-a$.
Далі маємо сукупність

$\left[\begin{array}{l} x^2=a, \\ x^2=2-a, \end{array}\right.$ яку розв'язано в Прикладі 1.

Відповідь: 1) при $a<0$ $x=\pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a\in[0;2]$ $x=\pm\sqrt{a}$, $x=\pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a>2$ $x=\pm\sqrt{a}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 2. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4 - 2x^2 - a^2 + 2a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння
$t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 1 + a^2 - 2a = (a-1)^2 \geq 0$.
Отже, квадратне рівняння має корені:
$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2} = 1 \pm |a-1| = 1 \pm (a-1)$
(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).
В результаті маємо $t_1 = a$, $t_2 = 2 - a$.
Далі маємо сукупність
$\left[\begin{array}{l} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a, \end{array}\right.$ яку розв'язано в Прикладі 1.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0;2]$ $x = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 2. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4-2x^2-a^2+2a=0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t=x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння $t^2-2t-a^2+2a=0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4=1+a^2-2a=(a-1)^2\geq 0$.
Отже, квадратне рівняння має корені:
$t_{1,2}=1\pm\sqrt{(a-1)^2}=1\pm|a-1|=1\pm(a-1)$
(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)|=\pm f(a)$ (!)).
В результаті маємо $t_1=a$, $t_2=2-a$.
Далі маємо сукупність

$\left[\begin{array}{l} x^2=a, \\ x^2=2-a, \end{array}\right.$ яку розв'язано в Прикладі 1.

Відповідь: 1) при $a<0$ $x=\pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a\in[0;2]$ $x=\pm\sqrt{a}, x=\pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a>2$ $x=\pm\sqrt{a}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 2. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4 - 2x^2 - a^2 + 2a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - a^2 + 2a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 1 + a^2 - 2a = (a-1)^2 \geq 0$.
Отже, квадратне рівняння має корені:
$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2} = 1 \pm |a-1| = 1 \pm (a-1)$
(ми скористались тут співвідношенням $\pm|f(a)| = \pm f(a)$ (!)).
В результаті маємо $t_1 = a$, $t_2 = 2 - a$.
Далі маємо сукупність

$\left[\begin{array}{l} x^2 = a, \\ x^2 = 2 - a, \end{array}\right.$ яку розв'язано в Прикладі 1.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0;2]$ $x = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm\sqrt{2-a}$; 3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.

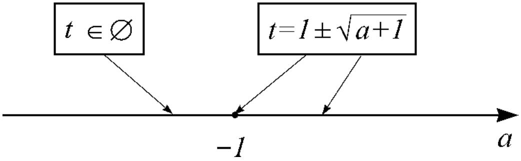
Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4 - 2x^2 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння
$t^2 - 2t - a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 1 + a$. Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо
$D < 0 \iff 1 + a < 0 \iff a < -1$, а при
$D \geq 0 \iff 1 + a \geq 0 \iff a \geq -1$ має корені $t = 1 \pm \sqrt{a+1}$.

Результат розв'язання квадратного рівняння зображено на діаграмі:



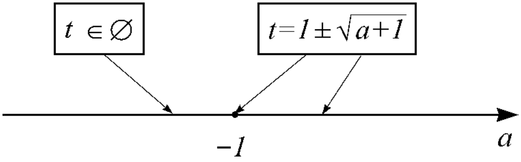
Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4 - 2x^2 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння $t^2 - 2t - a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 1 + a$. Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо
$D < 0 \iff 1 + a < 0 \iff a < -1$, а при
$D \geq 0 \iff 1 + a \geq 0 \iff a \geq -1$ має корені $t = 1 \pm \sqrt{a+1}$.

Результат розв'язання квадратного рівняння зображено на діаграмі:



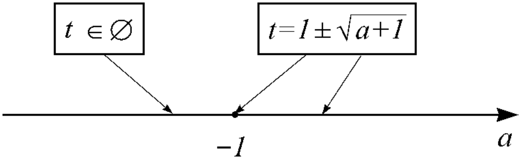
Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4 - 2x^2 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння
$t^2 - 2t - a = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 1 + a$. Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо
$D < 0 \iff 1 + a < 0 \iff a < -1$, а при
$D \geq 0 \iff 1 + a \geq 0 \iff a \geq -1$ має корені $t = 1 \pm \sqrt{a+1}$.

Результат розв'язання квадратного рівняння зображено на діаграмі:



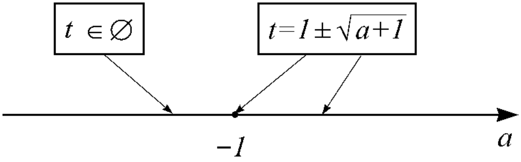
Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 3. Розв'язати рівняння з параметром a:
$x^4-2x^2-a=0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t=x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо квадратне рівняння
$t^2-2t-a=0$.

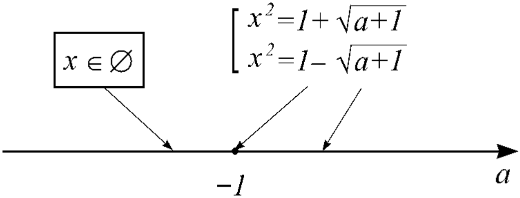
Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4=1+a$. Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо
$D<0 \iff 1+a<0 \iff a<-1$, а при
$D\geq 0 \iff 1+a\geq 0 \iff a\geq -1$ має корені $t=1\pm\sqrt{a+1}$.

Результат розв'язання квадратного рівняння зображено на діаграмі:



Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо



Розглянемо випадок $a \geq -1$.

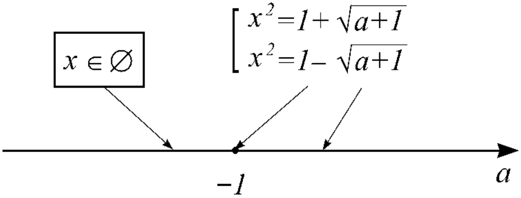
Перше рівняння $x^2 = 1+\sqrt{a+1}$ має розв'язки $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$ при будь-якому $a \geq -1$.

Друге рівняння $x^2 = 1-\sqrt{a+1}$ має розв'язки не при всіх a, а тільки при тих, для яких

$$1-\sqrt{a+1} \geq 0 \iff \sqrt{a+1} \leq 1 \iff \begin{cases} a+1 \geq 0, \\ a+1 \leq 1, \end{cases} \iff a \in [-1;0].$$

Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо



Розглянемо випадок $a \geq -1$.

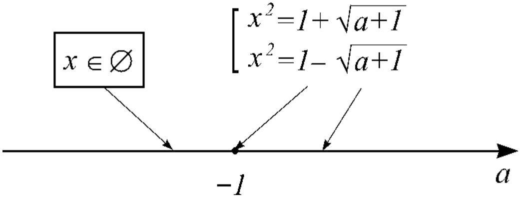
Перше рівняння $x^2 = 1 + \sqrt{a+1}$ має розв'язки $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$ при будь-якому $a \geq -1$.

Друге рівняння $x^2 = 1 - \sqrt{a+1}$ має розв'язки не при всіх a, а тільки при тих, для яких

$$1 - \sqrt{a+1} \geq 0 \iff \sqrt{a+1} \leq 1 \iff \begin{cases} a+1 \geq 0, \\ a+1 \leq 1, \end{cases} \iff a \in [-1; 0].$$

Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо



Розглянемо випадок $a \geq -1$.

Перше рівняння $x^2 = 1 + \sqrt{a+1}$ має розв'язки $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$ при будь-якому $a \geq -1$.

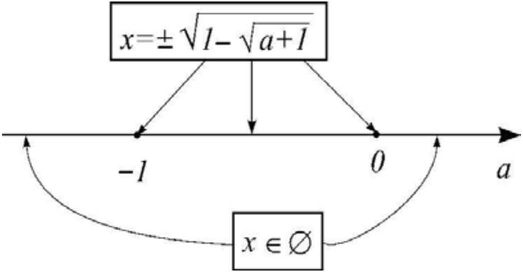
Друге рівняння $x^2 = 1 - \sqrt{a+1}$ має розв'язки не при всіх a, а тільки при тих, для яких

$$1 - \sqrt{a+1} \geq 0 \iff \sqrt{a+1} \leq 1 \iff \begin{cases} a+1 \geq 0, \\ a+1 \leq 1, \end{cases} \iff a \in [-1;0].$$

Біквадратні рівняння з параметром

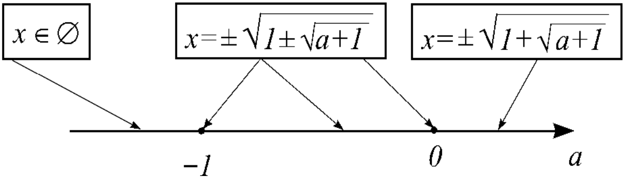
Отже, друге рівняння $x^2 = 1 - \sqrt{a+1}$ має розв'язки лише при $a \in [-1;0]$, а саме: $x = \pm\sqrt{1-\sqrt{a+1}}$.

Результат розв'язання цього рівняння зображено на діаграмі:



Біквадратні рівняння з параметром

Об'єднуючи розв'язки рівнянь сукупності при різних значеннях параметра a, отримуємо наступний результат для заданого біквадратного рівняння:

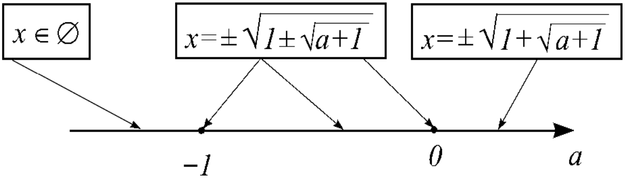


де у випадку $a \in [-1; 0]$ враховуються усі 4 з можливих комбінацій знаків $+$ і $-$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x \in \varnothing$;
2) при $a \in [-1; 0]$ $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$, $x = \pm\sqrt{1-\sqrt{a+1}}$;
3) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Об'єднуючи розв'язки рівнянь сукупності при різних значеннях параметра a, отримуємо наступний результат для заданого біквадратного рівняння:



де у випадку $a \in [-1;0]$ враховуються усі 4 з можливих комбінацій знаків $+$ і $-$.

Відповідь: 1) при $a < -1$ $x \in \varnothing$;
2) при $a \in [-1;0]$ $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$, $x = \pm\sqrt{1-\sqrt{a+1}}$;
3) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{a+1}}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a:
$ax^4 + 4x^2 - 5 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо рівняння

$$at^2 + 4t - 5 - a = 0. \tag{1}$$

При $a = 0$ маємо лінійне рівняння $4t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{4}$.
При $a \neq 0$ рівняння (1) є квадратним. Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 4 + a(5 + a) = a^2 + 5a + 4$.

Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 < 0, \end{cases} \iff a \in (-4; -1).$$

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a:
$ax^4 + 4x^2 - 5 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо рівняння

$$at^2 + 4t - 5 - a = 0. \qquad (1)$$

При $a = 0$ маємо лінійне рівняння $4t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{4}$.
При $a \neq 0$ рівняння (1) є квадратним. Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 4 + a(5+a) = a^2 + 5a + 4$.

$y = a^2 + 5a + 4$

Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 < 0, \end{cases} \iff a \in (-4; -1).$$

Біквадратні рівняння з параметром

Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a:
$ax^4 + 4x^2 - 5 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо рівняння

$$at^2 + 4t - 5 - a = 0. \qquad (1)$$

При $a = 0$ маємо лінійне рівняння $4t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{4}$.
При $a \neq 0$ рівняння (1) є квадратним. Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 4 + a(5+a) = a^2 + 5a + 4$.

Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 < 0, \end{cases} \iff a \in (-4; -1).$$

Біквадратні рівняння з параметром

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння з параметром a:
$ax^4 + 4x^2 - 5 - a = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо рівняння

$$at^2 + 4t - 5 - a = 0. \tag{1}$$

При $a = 0$ маємо лінійне рівняння $4t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{4}$.
При $a \neq 0$ рівняння (1) є квадратним. Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 4 + a(5 + a) = a^2 + 5a + 4$.

Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 < 0, \end{cases} \iff a \in (-4; -1).$$

Біквадратні рівняння з параметром

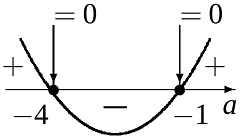
Приклад 4. Розв'язати рівняння з параметром a:
$ax^4 + 4x^2 - 5 - a = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну змінних $t = x^2$, при всіх значеннях параметра a отримуємо рівняння

$$at^2 + 4t - 5 - a = 0. \tag{1}$$

При $a = 0$ маємо лінійне рівняння $4t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{4}$.
При $a \neq 0$ рівняння (1) є квадратним. Розв'язуючи це рівняння, маємо $D/4 = 4 + a(5+a) = a^2 + 5a + 4$.

$y = a^2 + 5a + 4$

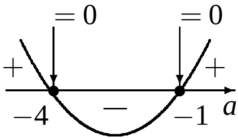


Отже, квадратне рівняння не має розв'язків, якщо $D < 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 < 0, \end{cases} \iff a \in (-4; -1).$$

Біквадратні рівняння з параметром

$y = a^2 + 5a + 4$

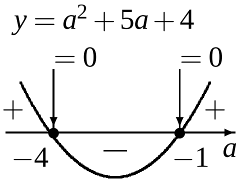


При $D \geq 0 \iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 \geq 0, \end{cases} \iff$

$\iff a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty)$ рівняння має корені $t = \frac{-2 \pm \sqrt{a^2+5a+4}}{a}$.

Результат розв'язання рівняння $at^2 + 4t - 5 - a = 0$ зображено на діаграмі:

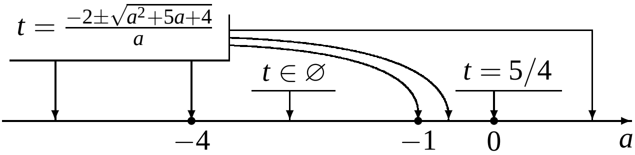
Біквадратні рівняння з параметром



При $D \geq 0 \iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a^2 + 5a + 4 \geq 0, \end{cases} \iff$

$\iff a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty)$ рівняння має корені $t = \frac{-2 \pm \sqrt{a^2+5a+4}}{a}$.

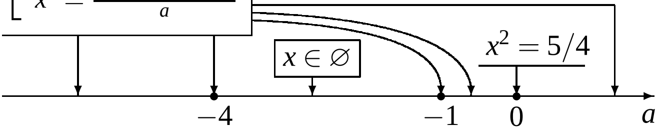
Результат розв'язання рівняння $at^2 + 4t - 5 - a = 0$ зображено на діаграмі:



Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \\ x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \end{array}\right.$$



При $a=0$ знаходимо $x = \pm\sqrt{5}/2$.

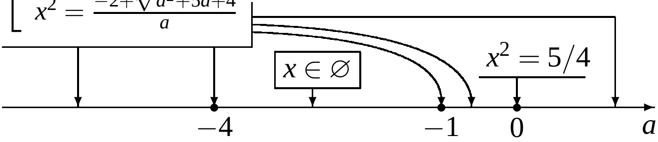
Залишається розв'язати сукупність при $a \in (-\infty;-4] \cup [-1;0) \cup (0;\infty)$.

Її перше рівняння $x^2 = \frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо $\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0$. Оскільки тут чисельник дробу від'ємний при всіх допустимих значеннях a, то ця нерівність виконується при від'ємному знаменнику. Отже, вказане рівняння має розв'язки $x = \pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$ тільки при $a \in (-\infty;-4] \cup [-1;0)$.

Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \\ x^2 = \dfrac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \end{array}\right.$$



При $a = 0$ знаходимо $x = \pm\sqrt{5}/2$.

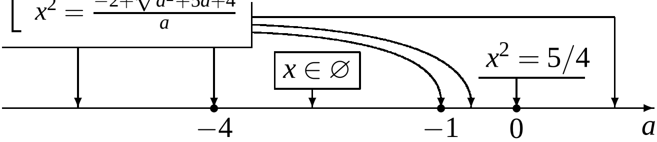
Залишається розв'язати сукупність при $a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty)$.

Її перше рівняння $x^2 = \frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо $\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0$. Оскільки тут чисельник дробу від'ємний при всіх допустимих значеннях a, то ця нерівність виконується при від'ємному знаменнику. Отже, вказане рівняння має розв'язки $x = \pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$ тільки при $a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0)$.

Біквадратні рівняння з параметром

Повертаючись до змінної x, маємо

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \\ x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \end{array}\right.$$



При $a = 0$ знаходимо $x = \pm\sqrt{5}/2$.

Залишається розв'язати сукупність при

$a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty)$.

Її перше рівняння $x^2 = \frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо $\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0$. Оскільки тут чисельник дробу від'ємний при всіх допустимих значеннях a, то ця нерівність виконується при від'ємному знаменнику. Отже, вказане рівняння має розв'язки $x = \pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$ тільки при $a \in (-\infty; -4] \cup [-1; 0)$.

Біквадратні рівняння з параметром

Друге рівняння $x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо

$$\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0\,, \\ a > 0\,, \end{cases} \\ \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0\,, \\ a < 0\,. \end{cases} \end{array}\right. .$$

Розв'яжемо ірраціональні нерівності систем.

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \geq 2 \iff$$

$$\iff a^2+5a+4 \geq 4 \iff a^2+5a \geq 0 \iff a \in (-\infty;-5] \cup [0;\infty)\,;$$

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \leq 2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^2+5a+4 \geq 0\,, \\ a^2+5a+4 \leq 4 \iff a^2+5a \leq 0\,, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \in (-\infty;-4] \cup [-1;\infty)\,, \\ a \in [-5;0]\,, \end{cases} \iff a \in [-5;-4] \cup [-1;0]\,.$$

Біквадратні рівняння з параметром

Друге рівняння $x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо

$$\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0, \\ a < 0. \end{cases} \end{array}\right. .$$

Розв'яжемо ірраціональні нерівності систем.

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \geq 2 \iff$$

$$\iff a^2+5a+4 \geq 4 \iff a^2+5a \geq 0 \iff a \in (-\infty; -5] \cup [0; \infty);$$

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \leq 2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^2+5a+4 \geq 0, \\ a^2+5a+4 \leq 4 \iff a^2+5a \leq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [-1; \infty), \\ a \in [-5; 0], \end{cases} \iff a \in [-5; -4] \cup [-1; 0].$$

Біквадратні рівняння з параметром

Друге рівняння $x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки, якщо

$$\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0, \\ a > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0, \\ a < 0. \end{cases} \end{array} \right. .$$

Розв'яжемо ірраціональні нерівності систем.

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \geq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \geq 2 \iff$$

$$\iff a^2+5a+4 \geq 4 \iff a^2+5a \geq 0 \iff a \in (-\infty; -5] \cup [0; \infty);$$

$$-2+\sqrt{a^2+5a+4} \leq 0 \iff \sqrt{a^2+5a+4} \leq 2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} a^2+5a+4 \geq 0, \\ a^2+5a+4 \leq 4 \iff a^2+5a \leq 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a \in (-\infty; -4] \cup [-1; \infty), \\ a \in [-5; 0], \end{cases} \iff a \in [-5; -4] \cup [-1; 0].$$

Біквадратні рівняння з параметром

Таким чином,

$$\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in (-\infty; -5] \cup [0; \infty), \\ a > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \in [-5; -4] \cup [-1; 0], \\ a < 0, \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a \in (0; \infty), \\ a \in [-5; -4] \cup [-1; 0), \end{array}\right. \iff a \in [-5; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty).$$

Отже, тільки при $a \in [-5; -4] \cup [-1; 0) \cup (0; \infty)$ рівняння $x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки $x = \pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$.

Біквадратні рівняння з параметром

Таким чином,

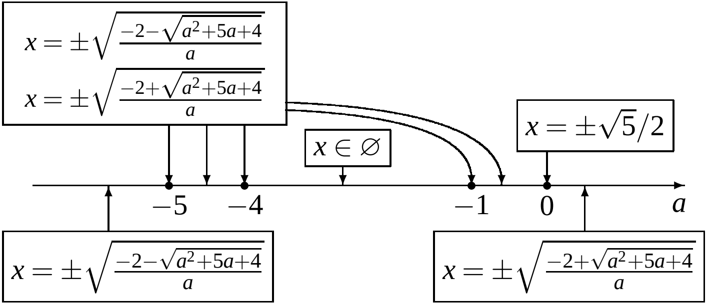
$$\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a \in (-\infty;-5] \cup [0;\infty)\,, \\ a > 0\,, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a \in [-5;-4] \cup [-1;0]\,, \\ a < 0\,, \end{array}\right. \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a \in (0;\infty)\,, \\ a \in [-5;-4] \cup [-1;0)\,, \end{array}\right. \iff a \in [-5;-4] \cup [-1;0) \cup (0;\infty)\,.$$

Отже, тільки при $a \in [-5;-4] \cup [-1;0) \cup (0;\infty)$ рівняння $x^2 = \frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}$ має розв'язки $x = \pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$.

Біквадратні рівняння з параметром

В результаті отримуємо наступну діаграму розв'язків:



Відповідь: 1) при $a<-5$ $x=\pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$;

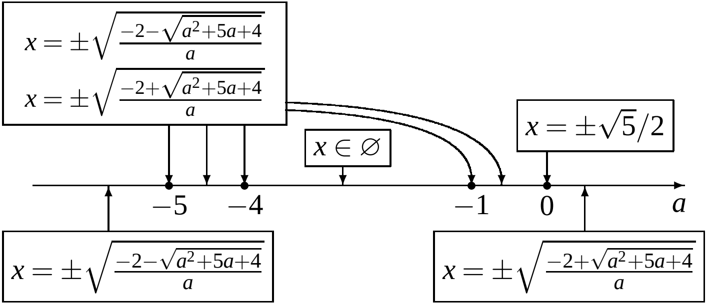
2) при $a\in[-5;-4]\cup[-1;0)$ $x=\pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$,

$x=\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$; 3) при $a\in(-4;-1)$ $x\in\varnothing$;

4) при $a>0$ $x=\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$; 5) при $a=0$ $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Біквадратні рівняння з параметром

В результаті отримуємо наступну діаграму розв'язків:



Відповідь: 1) при $a<-5$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$;

2) при $a\in[-5;-4]\cup[-1;0)$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-2-\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$,

$x=\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$; 3) при $a\in(-4;-1)$ $\quad x\in\varnothing$;

4) при $a>0$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{-2+\sqrt{a^2+5a+4}}{a}}$; 5) при $a=0$ $\quad x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.