Системи рівнянь з кількома невідомими

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 13 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Рівняння з двома невідомими і його геометричний образ (графік)

- Рівняння з двома невідомими x, y – це вираз вигляду
$$f(x,y) = g(x,y), \tag{1}$$
де $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – деякі функції від x і y.
- Впорядкована пара чисел (x_0, y_0) називається розв'язком рівняння (1), якщо при підстановці x_0 замість x і y_0 замість y в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$.
- Множина розв'язків (x, y) рівняння (1), зображена в декартовій координатній площині xOy, утворює геометричний образ (графік) рівняння (1).

Рівняння з двома невідомими і його геометричний образ (графік)

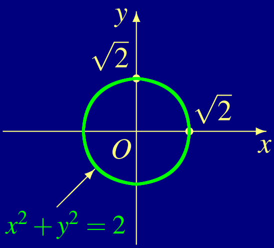
- Рівняння з двома невідомими x, y – це вираз вигляду
$$f(x,y) = g(x,y), \tag{1}$$
де $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – деякі функції від x і y.
- Впорядкована пара чисел (x_0, y_0) називається розв'язком рівняння (1), якщо при підстановці x_0 замість x і y_0 замість y в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$.
- Множина розв'язків (x, y) рівняння (1), зображена в декартовій координатній площині xOy, утворює геометричний образ (графік) рівняння (1).

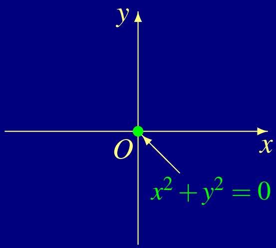
Рівняння з двома невідомими і його геометричний образ (графік)

- Рівняння з двома невідомими x, y – це вираз вигляду
$$f(x,y) = g(x,y), \tag{1}$$
де $f(x,y)$ і $g(x,y)$ – деякі функції від x і y.
- Впорядкована пара чисел (x_0, y_0) називається розв'язком рівняння (1), якщо при підстановці x_0 замість x і y_0 замість y в рівняння одержуємо істинну числову рівність $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0)$.
- Множина розв'язків (x, y) рівняння (1), зображена в декартовій координатній площині xOy, утворює геометричний образ (графік) рівняння (1).

Рівняння з двома невідомими і його геометричний образ (графік)

Наприклад, геометричний образ рівняння $x^2+y^2=2$ – це коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат. Геометричний образ рівняння $x^2+y^2=0$ – це точка $O(0;0)$.

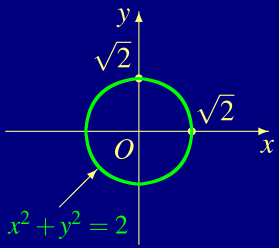


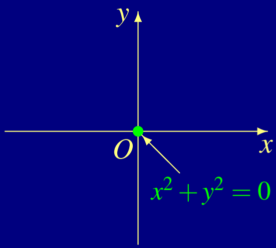


Геометричний образ рівняння $x^2+y^2=-1$ порожній, оскільки $x^2+y^2=-1 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

Рівняння з двома невідомими і його геометричний образ (графік)

Наприклад, геометричний образ рівняння $x^2+y^2=2$ – це коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат. Геометричний образ рівняння $x^2+y^2=0$ – це точка $O(0;0)$.





Геометричний образ рівняння $x^2+y^2=-1$ порожній, оскільки $x^2+y^2=-1 \Longleftrightarrow (x,y)\in\varnothing$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Розглянемо геометричні образи рівнянь, симетричні відносно координатних осей.

Нагадаємо, що серед функцій однієї змінної x симетричними відносно осі Ox графіками володіють парні функції.

Серед функцій двох змінних x, y виділимо парні функції за змінною x і за змінною y.

Функція $g(x,y)$ називається:

- парною за змінною x, якщо $g(-x,y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$;
- парною за змінною y, якщо $g(x,-y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Розглянемо геометричні образи рівнянь, симетричні відносно координатних осей.

Нагадаємо, що серед функцій однієї змінної x симетричними відносно осі Ox графіками володіють парні функції.

Серед функцій двох змінних x, y виділимо парні функції за змінною x і за змінною y.

Функція $g(x,y)$ називається:

- парною за змінною x, якщо $g(-x,y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$;
- парною за змінною y, якщо $g(x,-y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Розглянемо геометричні образи рівнянь, симетричні відносно координатних осей.

Нагадаємо, що серед функцій однієї змінної x симетричними відносно осі Ox графіками володіють парні функції.

Серед функцій двох змінних x, y виділимо парні функції за змінною x і за змінною y.

Функція $g(x,y)$ називається:

- парною за змінною x, якщо $g(-x,y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$;
- парною за змінною y, якщо $g(x,-y) = g(x,y)$ для всіх пар чисел (x,y) з області визначення функції $g(x,y)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Графіки парних (за змінною x або y) функцій володіють наступними властивостями:

- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною x, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Oy;
- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Ox.

Наприклад, побудуємо геометричний образ (графік) рівняння $x+2|y|-4=0$.
Оскільки функція $g(x,y)=x+2|y|-4$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $x+2|y|-4=0$ є симетричним відносно осі Ox.
В такому випадку його можна побудувати поетапно.

Графіки рівнянь з парними функціями

Графіки парних (за змінною x або y) функцій володіють наступними властивостями:

- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною x, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Oy;
- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Ox.

Наприклад, побудуємо геометричний образ (графік) рівняння $x+2|y|-4=0$.
Оскільки функція $g(x,y)=x+2|y|-4$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $x+2|y|-4=0$ є симетричним відносно осі Ox.
В такому випадку його можна побудувати поетапно.

Графіки рівнянь з парними функціями

Графіки парних (за змінною x або y) функцій володіють наступними властивостями:

- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною x, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Oy;
- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Ox.

Наприклад, побудуємо геометричний образ (графік) рівняння $x+2|y|-4=0$.
Оскільки функція $g(x,y)=x+2|y|-4$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $x+2|y|-4=0$ є симетричним відносно осі Ox.
В такому випадку його можна побудувати поетапно.

Графіки рівнянь з парними функціями

Графіки парних (за змінною x або y) функцій володіють наступними властивостями:

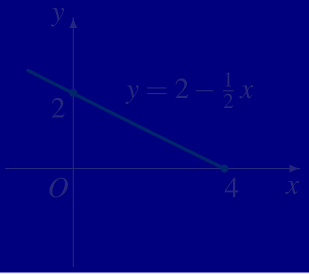
- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною x, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Oy;
- якщо функція $g(x,y)$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $g(x,y)=0$ є симетричним відносно осі Ox.

Наприклад, побудуємо геометричний образ (графік) рівняння $x+2|y|-4=0$.
Оскільки функція $g(x,y)=x+2|y|-4$ є парною за змінною y, то геометричний образ рівняння $x+2|y|-4=0$ є симетричним відносно осі Ox.
В такому випадку його можна побудувати поетапно.

Графіки рівнянь з парними функціями

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться у верхній відносно осі Ox півплощині (тобто при $y \geq 0$).
- Потім, симетрично відображаючи цю частину відносно осі Ox, отримуємо другу частину графіка, яка знаходиться нижче осі Ox.

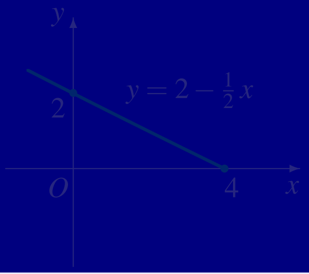
Так, при $y \geq 0$ рівняння $x+2|y|-4=0$ набуває вигляду $x+2y-4=0 \Longleftrightarrow y=2-\frac{1}{2}x$, тобто частиною його графіка є півпряма $y=2-\frac{1}{2}x$, $y \geq 0$.



Графіки рівнянь з парними функціями

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться у верхній відносно осі Ox півплощині (тобто при $y \geq 0$).
- Потім, симетрично відображаючи цю частину відносно осі Ox, отримуємо другу частину графіка, яка знаходиться нижче осі Ox.

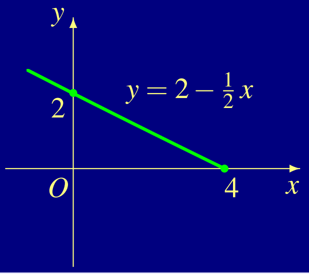
Так, при $y \geq 0$ рівняння $x + 2|y| - 4 = 0$ набуває вигляду $x + 2y - 4 = 0 \iff y = 2 - \frac{1}{2}x$, тобто частиною його графіка є півпряма $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y \geq 0$.



Графіки рівнянь з парними функціями

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться у верхній відносно осі Ox півплощині (тобто при $y \geq 0$).
- Потім, симетрично відображаючи цю частину відносно осі Ox, отримуємо другу частину графіка, яка знаходиться нижче осі Ox.

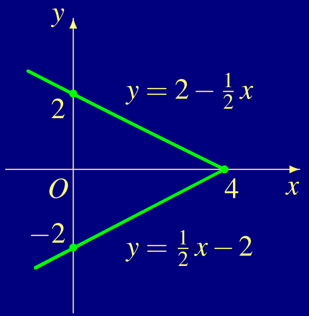
Так, при $y \geq 0$ рівняння $x + 2|y| - 4 = 0$ набуває вигляду $x + 2y - 4 = 0 \Longleftrightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$, тобто частиною його графіка є півпряма $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y \geq 0$.



Графіки рівнянь з парними функціями

Друга частина графіка симетрична цій півпрямій відносно осі Ox:

$x + 2|y| - 4 = 0$



Графіки рівнянь з парними функціями

Побудуємо також графік рівняння $|x|+|y|=2$.
Оскільки тут функція $g(x,y)=|x|+|y|-2$ є парною як за змінною x, так і за змінною y, то геометричний образ (графік) рівняння $|x|+|y|=2$ є симетричним як відносно осі Oy, так і відносно осі Ox.

В такому випадку його побудову виконуємо поетапно:

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться в 1-ій координатній четверті (тобто при $x \geq 0$, $y \geq 0$).
- Потім за допомогою симетричного відображення цієї частини відносно осі Oy, отримуємо більшу його частину, що знаходиться в 1-ій і в 2-ій координатних четвертях (тобто при $y \geq 0$).
- Нарешті, застосовуючи симетричне відображення цієї більшої частини графіка відносно осі Ox, отримуємо весь геометричний образ рівняння.

Графіки рівнянь з парними функціями

Побудуємо також графік рівняння $|x|+|y|=2$.
Оскільки тут функція $g(x,y)=|x|+|y|-2$ є парною як за змінною x, так і за змінною y, то геометричний образ (графік) рівняння $|x|+|y|=2$ є симетричним як відносно осі Oy, так і відносно осі Ox.
В такому випадку його побудову виконуємо поетапно:

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться в 1-ій координатній четверті (тобто при $x \geq 0$, $y \geq 0$).
- Потім за допомогою симетричного відображення цієї частини відносно осі Oy, отримуємо більшу його частину, що знаходиться в 1-ій і в 2-ій координатних четвертях (тобто при $y \geq 0$).
- Нарешті, застосовуючи симетричне відображення цієї більшої частини графіка відносно осі Ox, отримуємо весь геометричний образ рівняння.

Графіки рівнянь з парними функціями

Побудуємо також графік рівняння $|x|+|y|=2$.
Оскільки тут функція $g(x,y)=|x|+|y|-2$ є парною як за змінною x, так і за змінною y, то геометричний образ (графік) рівняння $|x|+|y|=2$ є симетричним як відносно осі Oy, так і відносно осі Ox.
В такому випадку його побудову виконуємо поетапно:

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться в 1-ій координатній четверті (тобто при $x \geq 0,\ y \geq 0$).
- Потім за допомогою симетричного відображення цієї частини відносно осі Oy, отримуємо більшу його частину, що знаходиться в 1-ій і в 2-ій координатних четвертях (тобто при $y \geq 0$).
- Нарешті, застосовуючи симетричне відображення цієї більшої частини графіка відносно осі Ox, отримуємо весь геометричний образ рівняння.

Графіки рівнянь з парними функціями

Побудуємо також графік рівняння $|x|+|y|=2$.
Оскільки тут функція $g(x,y)=|x|+|y|-2$ є парною як за змінною x, так і за змінною y, то геометричний образ (графік) рівняння $|x|+|y|=2$ є симетричним як відносно осі Oy, так і відносно осі Ox.
В такому випадку його побудову виконуємо поетапно:

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться в 1-ій координатній четверті (тобто при $x \geq 0$, $y \geq 0$).
- Потім за допомогою симетричного відображення цієї частини відносно осі Oy, отримуємо більшу його частину, що знаходиться в 1-ій і в 2-ій координатних четвертях (тобто при $y \geq 0$).
- Нарешті, застосовуючи симетричне відображення цієї більшої частини графіка відносно осі Ox, отримуємо весь геометричний образ рівняння.

Графіки рівнянь з парними функціями

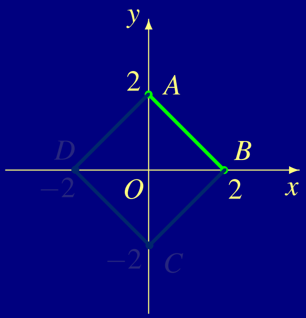
Побудуємо також графік рівняння $|x|+|y|=2$.
Оскільки тут функція $g(x,y)=|x|+|y|-2$ є парною як за змінною x, так і за змінною y, то геометричний образ (графік) рівняння $|x|+|y|=2$ є симетричним як відносно осі Oy, так і відносно осі Ox.
В такому випадку його побудову виконуємо поетапно:

- Спочатку будуємо частину графіка, яка знаходиться в 1-ій координатній четверті (тобто при $x \geq 0$, $y \geq 0$).
- Потім за допомогою симетричного відображення цієї частини відносно осі Oy, отримуємо більшу його частину, що знаходиться в 1-ій і в 2-ій координатних четвертях (тобто при $y \geq 0$).
- Нарешті, застосовуючи симетричне відображення цієї більшої частини графіка відносно осі Ox, отримуємо весь геометричний образ рівняння.

Графіки рівнянь з парними функціями

Так, при $x \geq 0$, $y \geq 0$ рівняння $|x|+|y|=2$ набуває вигляду $x+y=2 \Longleftrightarrow y=2-x$, тобто частиною його графіка є відрізок прямої $y=2-x$, який знаходиться в першій координатній четверті. Цей відрізок сполучає точки $A(0;2)$ і $B(2;0)$.

$|x|+|y|=2$

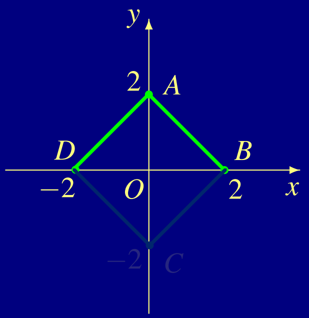


В результаті послідовного виконання двох симетрій відносно координатних осей Oy і Ox отримуємо геометричний образ рівняння $|x|+|y|=2$ – квадрат з вершинами в точках $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;-2)$ і $D(-2;0)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Так, при $x \geq 0$, $y \geq 0$ рівняння $|x| + |y| = 2$ набуває вигляду $x + y = 2 \Longleftrightarrow y = 2 - x$, тобто частиною його графіка є відрізок прямої $y = 2 - x$, який знаходиться в першій координатній четверті. Цей відрізок сполучає точки $A(0;2)$ і $B(2;0)$.

$|x| + |y| = 2$

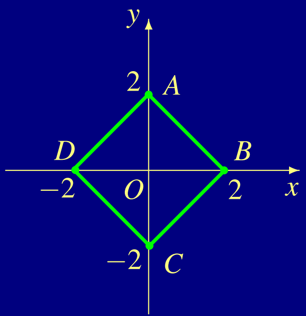


В результаті послідовного виконання двох симетрій відносно координатних осей Oy і Ox отримуємо геометричний образ рівняння $|x| + |y| = 2$ – квадрат з вершинами в точках $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;-2)$ і $D(-2;0)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

Так, при $x \geq 0$, $y \geq 0$ рівняння $|x| + |y| = 2$ набуває вигляду $x + y = 2 \Longleftrightarrow y = 2 - x$, тобто частиною його графіка є відрізок прямої $y = 2 - x$, який знаходиться в першій координатній четверті. Цей відрізок сполучає точки $A(0;2)$ і $B(2;0)$.

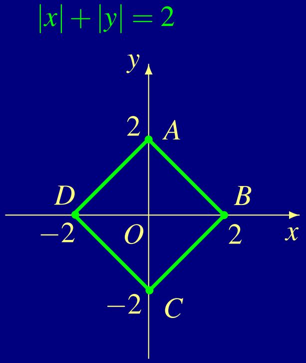
$|x| + |y| = 2$



В результаті послідовного виконання двох симетрій відносно координатних осей Oy і Ox отримуємо геометричний образ рівняння $|x| + |y| = 2$ – квадрат з вершинами в точках $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;-2)$ і $D(-2;0)$.

Графіки рівнянь з парними функціями

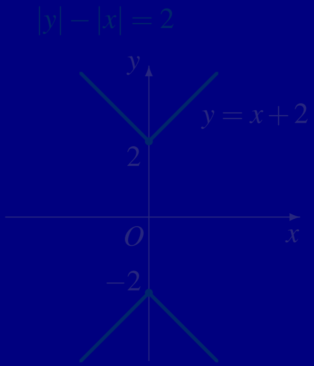
Так, при $x \geq 0$, $y \geq 0$ рівняння $|x|+|y|=2$ набуває вигляду $x+y=2 \Longleftrightarrow y=2-x$, тобто частиною його графіка є відрізок прямої $y=2-x$, який знаходиться в першій координатній четверті. Цей відрізок сполучає точки $A(0;2)$ і $B(2;0)$.



В результаті послідовного виконання двох симетрій відносно координатних осей Oy і Ox отримуємо геометричний образ рівняння $|x|+|y|=2$ – квадрат з вершинами в точках $A(0;2)$, $B(2;0)$, $C(0;-2)$ і $D(-2;0)$.

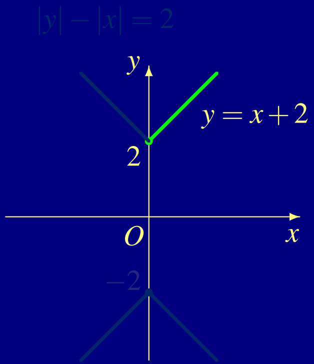
Графіки рівнянь з парними функціями

Аналогічно отримуємо геометричний образ рівняння $|y|-|x|=2$:



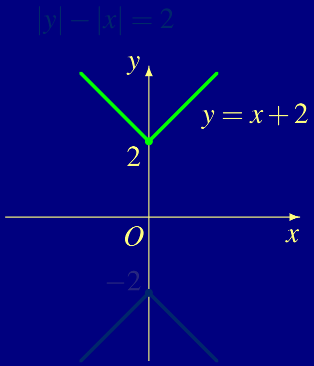
Графіки рівнянь з парними функціями

Аналогічно отримуємо геометричний образ рівняння $|y| - |x| = 2$:



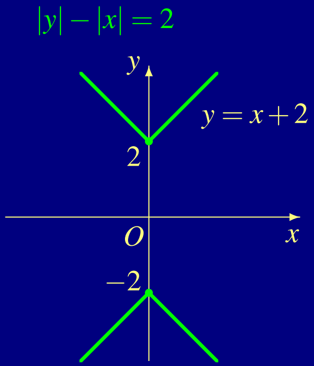
Графіки рівнянь з парними функціями

Аналогічно отримуємо геометричний образ рівняння $|y| - |x| = 2$:



Графіки рівнянь з парними функціями

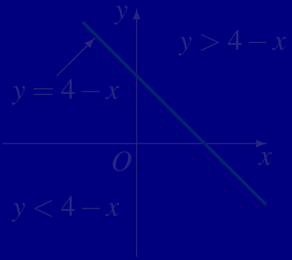
Аналогічно отримуємо геометричний образ рівняння $|y|-|x|=2$:



Геометричний образ нерівності

- **Геометричний образ нерівності** з невідомими x і y — це множина розв'язків (x, y) нерівності, зображена в координатній площині xOy.

Розглянемо геометричні образи деяких нерівностей.



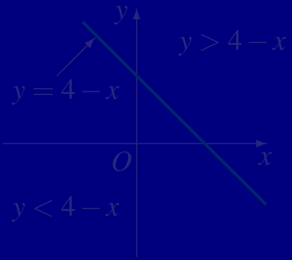
Геометричним образом нерівності $y > 4 - x$ є півплощина, яка лежить вище прямої $y = 4 - x$, а геометричним образом нерівності $y < 4 - x$ – півплощина, нижня відносно цієї прямої.

Геометричний образ нерівності $y \geq 4 - x$ разом з півплощиною $y > 4 - x$ включає також її межу (тобто пряму $y = 4 - x$).

Геометричний образ нерівності

- Геометричний образ нерівності з невідомими x і y — це множина розв'язків (x, y) нерівності, зображена в координатній площині xOy.

Розглянемо геометричні образи деяких нерівностей.

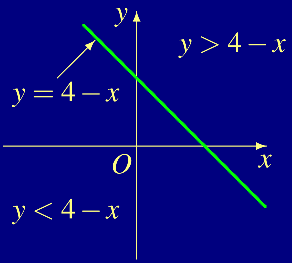


Геометричним образом нерівності $y > 4 - x$ є півплощина, яка лежить вище прямої $y = 4 - x$, а геометричним образом нерівності $y < 4 - x$ – півплощина, нижня відносно цієї прямої. Геометричний образ нерівності $y \geq 4 - x$ разом з півплощиною $y > 4 - x$ включає також її межу (тобто пряму $y = 4 - x$).

Геометричний образ нерівності

- Геометричний образ нерівності з невідомими x і y — це множина розв'язків (x, y) нерівності, зображена в координатній площині xOy.

Розглянемо геометричні образи деяких нерівностей.



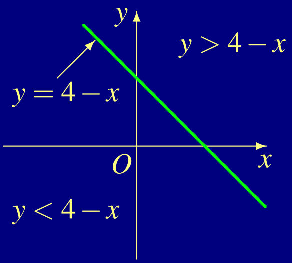
Геометричним образом нерівності $y > 4 - x$ є півплощина, яка лежить вище прямої $y = 4 - x$, а геометричним образом нерівності $y < 4 - x$ – півплощина, нижня відносно цієї прямої.

Геометричний образ нерівності $y \geq 4 - x$ разом з півплощиною $y > 4 - x$ включає також її межу (тобто пряму $y = 4 - x$).

Геометричний образ нерівності

- Геометричний образ нерівності з невідомими x і y — це множина розв'язків (x, y) нерівності, зображена в координатній площині xOy.

Розглянемо геометричні образи деяких нерівностей.

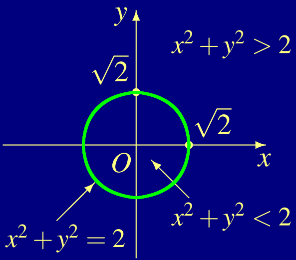


Геометричним образом нерівності $y > 4 - x$ є півплощина, яка лежить вище прямої $y = 4 - x$, а геометричним образом нерівності $y < 4 - x$ – півплощина, нижня відносно цієї прямої.

Геометричний образ нерівності $y \geq 4 - x$ разом з півплощиною $y > 4 - x$ включає також її межу (тобто пряму $y = 4 - x$).

Геометричний образ нерівності

Геометричний образ нерівності $x^2+y^2 \le 2$ містить початок координат, а також усі кола $x^2+y^2=r^2$, радіус яких $r \le \sqrt{2}$. Тому, геометричним образом цієї нерівності є круг радіуса $\sqrt{2}$ з центром в точці $(0;0)$. Аналогічні міркування показують, що геометричним образом нерівності $x^2+y^2>2$ є зовнішня частина вказаного круга.



Система рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими x, y:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y), \end{array}\right. \tag{2}$$

де $f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — деякі функції від x і y.

- Розв'язками системи (2) є спільні розв'язки (x_0, y_0) рівнянь цієї системи (тобто точки перетину геометричних образів рівнянь системи).
- Розв'язати систему — значить знайти множину її розв'язків.

Система рівнянь з двома невідомими

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими x, y:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

де $f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — деякі функції від x і y.

- Розв'язками системи (2) є спільні розв'язки (x_0, y_0) рівнянь цієї системи (тобто точки перетину геометричних образів рівнянь системи).
- Розв'язати систему — значить знайти множину її розв'язків.

Система рівнянь з двома невідомими

Розглянемо системи двох рівнянь з двома невідомими x, y:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

де $f_1(x,y), f_2(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — деякі функції від x і y.

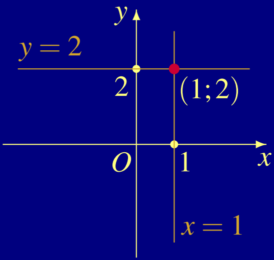
- Розв'язками системи (2) є спільні розв'язки (x_0, y_0) рівнянь цієї системи (тобто точки перетину геометричних образів рівнянь системи).
- Розв'язати систему — значить знайти множину її розв'язків.

Система рівнянь з двома невідомими

У якості приклада розглянемо найпростішу систему

$$\begin{cases} x = 1\,, \\ y = 2\,. \end{cases}$$

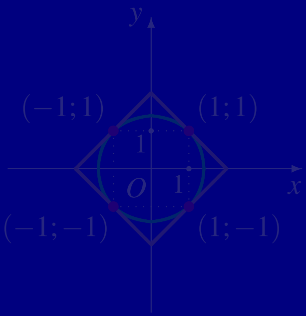
Розв'язок цієї системи — це точка перетину прямих $x = 1$ і $y = 2$, тобто точка $(1;2)$.



Система рівнянь з двома невідомими

Розглянемо також систему

$$\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

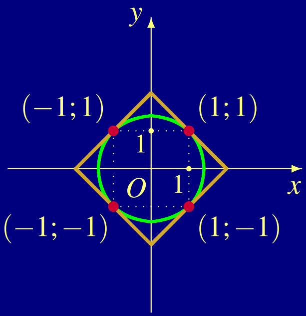


Геометричний образ першого рівняння системи — розглянутий раніше квадрат.
Геометричний образ другого рівняння — це коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат.
Оскільки геометричні образи рівнянь дотикаються в точках $(1;1),(-1;1),(-1;-1)$ и $(1;-1)$, то множина розв'язків системи — це множина $\{(1;1),(-1;1),(-1;-1),(1;-1)\}$.

Система рівнянь з двома невідомими

Розглянемо також систему

$$\begin{cases} |x|+|y|=2, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$



Геометричний образ першого рівняння системи — розглянутий раніше квадрат.
Геометричний образ другого рівняння — це коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат.
Оскільки геометричні образи рівнянь дотикаються в точках $(1;1),(-1;1),(-1;-1)$ и $(1;-1)$, то множина розв'язків системи — це множина

$\{(1;1),(-1;1),(-1;-1),(1;-1)\}$.

Рівносильні перетворення систем

- Системи, які мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються рівносильними.

Найбільш простими рівносильними перетвореннями систем є:

- заміна одного з рівнянь системи рівносильним йому виразом;
- заміна одного з рівнянь сумою рівнянь системи, помножених на не рівні нулю числа:
  якщо $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, то
  $$\begin{cases} F_1 = G_1, \\ F_2 = G_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha F_1 + \beta F_2 = \alpha G_1 + \beta G_2, \\ F_2 = G_2 \end{cases}$$
  (тут и далі для скорочення запису не вказана залежність функцій F_1, F_2, G_1, G_2 від змінних x і y, тобто використано скорочення $F_1 = F_1(x,y)$ і т.п.) або більш коротко:
  $$\begin{cases} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}, \\ \mathrm{II}; \end{cases}$$

Рівносильні перетворення систем

- Системи, які мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються рівносильними.

Найбільш простими рівносильними перетвореннями систем є:

- заміна одного з рівнянь системи рівносильним йому виразом;
- заміна одного з рівнянь сумою рівнянь системи, помножених на не рівні нулю числа:
  якщо $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, то
  $$\left\{\begin{array}{l} F_1 = G_1, \\ F_2 = G_2, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha F_1 + \beta F_2 = \alpha G_1 + \beta G_2, \\ F_2 = G_2 \end{array}\right.$$
  (тут и далі для скорочення запису не вказана залежність функцій F_1, F_2, G_1, G_2 від змінних x і y, тобто використано скорочення $F_1 = F_1(x,y)$ і т.п.) або більш коротко:
  $$\left\{\begin{array}{ll} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}, \\ \mathrm{II}; \end{array}\right.$$

Рівносильні перетворення систем

- Системи, які мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються рівносильними.

Найбільш простими рівносильними перетвореннями систем є:

- заміна одного з рівнянь системи рівносильним йому виразом;
- заміна одного з рівнянь сумою рівнянь системи, помножених на не рівні нулю числа:
  якщо $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, то
  $$\begin{cases} F_1 = G_1, \\ F_2 = G_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha F_1 + \beta F_2 = \alpha G_1 + \beta G_2, \\ F_2 = G_2 \end{cases}$$
  (тут и далі для скорочення запису не вказана залежність функцій F_1, F_2, G_1, G_2 від змінних x і y, тобто використано скорочення $F_1 = F_1(x,y)$ і т.п.) або більш коротко:
  $$\begin{cases} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}, \\ \mathrm{II}; \end{cases}$$

Рівносильні перетворення систем

- Системи, які мають одну і ту ж множину розв'язків, називаються рівносильними.

Найбільш простими рівносильними перетвореннями систем є:

- заміна одного з рівнянь системи рівносильним йому виразом;
- заміна одного з рівнянь сумою рівнянь системи, помножених на не рівні нулю числа:

  якщо $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, то

$$\begin{cases} F_1 = G_1, \\ F_2 = G_2, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha F_1 + \beta F_2 = \alpha G_1 + \beta G_2, \\ F_2 = G_2 \end{cases}$$

(тут и далі для скорочення запису не вказана залежність функцій F_1, F_2, G_1, G_2 від змінних x і y, тобто використано скорочення $F_1 = F_1(x,y)$ і т.п.) або більш коротко:

$$\begin{cases} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha \mathrm{I} + \beta \mathrm{II}, \\ \mathrm{II}; \end{cases}$$

Рівносильні перетворення систем

- заміна обох рівнянь системи відповідно сумою і різницею рівнянь:

$$\begin{cases} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{I}+\mathrm{II}, \\ \mathrm{I}-\mathrm{II}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 = G_1 + G_2, \\ F_1 - F_2 = G_1 - G_2; \end{cases}$$

- підстановка виразу однієї змінної в інші рівняння системи:

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ f(x,y) = g(x,y), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varphi(x), \\ f(x,\varphi(x)) = g(x,\varphi(x)). \end{cases}$$

Рівносильні перетворення систем

- заміна обох рівнянь системи відповідно сумою і різницею рівнянь:

$$\begin{cases} F_1 = G_1, & \mathrm{I} \\ F_2 = G_2, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{I}+\mathrm{II}, \\ \mathrm{I}-\mathrm{II}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 + F_2 = G_1 + G_2, \\ F_1 - F_2 = G_1 - G_2; \end{cases}$$

- підстановка виразу однієї змінної в інші рівняння системи:

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ f(x,y) = g(x,y), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \varphi(x), \\ f(x,\varphi(x)) = g(x,\varphi(x)). \end{cases}$$

Приклади із ЗНО

Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ x-2y=7. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку (x_0, y_0) системи знайдіть суму x_0+y_0.

Розв'язання. Помітимо, що додаючи до першого рівняння системи друге, помножене на (-2), отримуємо рівняння, яке містить тільки y. Тому

$$\begin{cases} 2x+5y=5, & \mathrm{I} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+5y+(-2)(x-2y)=5-2\cdot 7, & \mathrm{I}+(-2)\mathrm{II} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 9y=-9, \\ x-2y=7, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=7+2y=7-2=5. \end{cases}$$

Отже, $x_0+y_0=5-1=4$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ x-2y=7. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку (x_0, y_0) системи знайдіть суму x_0+y_0.

Розв'язання. Помітимо, що додаючи до першого рівняння системи друге, помножене на (-2), отримуємо рівняння, яке містить тільки y. Тому

$$\begin{cases} 2x+5y=5, & \mathrm{I} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+5y+(-2)(x-2y)=5-2\cdot 7, & \mathrm{I}+(-2)\mathrm{II} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 9y=-9, \\ x-2y=7, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=7+2y=7-2=5. \end{cases}$$

Отже, $x_0+y_0=5-1=4$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ x-2y=7. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку (x_0, y_0) системи знайдіть суму x_0+y_0.

Розв'язання. Помітимо, що додаючи до першого рівняння системи друге, помножене на (-2), отримуємо рівняння, яке містить тільки y. Тому

$$\begin{cases} 2x+5y=5, & \mathrm{I} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+5y+(-2)(x-2y)=5-2\cdot 7, & \mathrm{I}+(-2)\mathrm{II} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9y=-9, \\ x-2y=7, \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x=7+2y=7-2=5. \end{cases}$$

Отже, $x_0+y_0=5-1=4$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ x-2y=7. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку (x_0, y_0) системи знайдіть суму x_0+y_0.

Розв'язання. Помітимо, що додаючи до першого рівняння системи друге, помножене на (-2), отримуємо рівняння, яке містить тільки y. Тому

$$\begin{cases} 2x+5y=5, & \mathrm{I} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+5y+(-2)(x-2y)=5-2\cdot 7, & \mathrm{I}+(-2)\mathrm{II} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9y=-9, \\ x-2y=7, \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x=7+2y=7-2=5. \end{cases}$$

Отже, $x_0+y_0=5-1=4$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 1 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+5y=5, \\ x-2y=7. \end{cases}$

Для одержаного розв'язку (x_0, y_0) системи знайдіть суму x_0+y_0.

Розв'язання. Помітимо, що додаючи до першого рівняння системи друге, помножене на (-2), отримуємо рівняння, яке містить тільки y. Тому

$$\begin{cases} 2x+5y=5, & \mathrm{I} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+5y+(-2)(x-2y)=5-2\cdot 7, & \mathrm{I}+(-2)\mathrm{II} \\ x-2y=7, & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 9y=-9, \\ x-2y=7, \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1, \\ x=7+2y=7-2=5. \end{cases}$$

Отже, $x_0+y_0=5-1=4$.

Відповідь: 4.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad ?$$

Розв'язання. Додаючи і віднімаючи рівняння системи, отримуємо

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, & \mathrm{I} \\ x^2 + y^2 = 3, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = -2, & \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -2y^2 = -8. & \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи не має розв'язків:
$2x^2 = -2 \iff x^2 = -1 \iff x \in \varnothing$,
то система не має розв'язків.

Відповідь: жодного розв'язку.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad ?$$

Розв'язання. Додаючи і віднімаючи рівняння системи, отримуємо

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, & \mathrm{I} \\ x^2 + y^2 = 3, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = -2, & \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ -2y^2 = -8. & \mathrm{I}-\mathrm{II} \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи не має розв'язків:
$2x^2 = -2 \iff x^2 = -1 \iff x \in \varnothing$,
то система не має розв'язків.

Відповідь: жодного розв'язку.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.). Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad ?$$

Розв'язання. Додаючи і віднімаючи рівняння системи, отримуємо

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, & \mathrm{I} \\ x^2 + y^2 = 3, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = -2, & \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -2y^2 = -8. & \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи не має розв'язків: $2x^2 = -2 \iff x^2 = -1 \iff x \in \varnothing$, то система не має розв'язків.

Відповідь: жодного розв'язку.

Приклади із ЗНО

Приклад 2 (Пробне тестування ЗНО, 2012 р.).
Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases} \quad ?$$

Розв'язання. Додаючи і віднімаючи рівняння системи, отримуємо

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, & \mathrm{I} \\ x^2 + y^2 = 3, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = -2, & \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ -2y^2 = -8. & \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}$$

Оскільки перше рівняння системи не має розв'язків:
$2x^2 = -2 \iff x^2 = -1 \iff x \in \varnothing$,
то система не має розв'язків.

Відповідь: жодного розв'язку .

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв'язання. Виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи в друге, отримуємо

$$\begin{cases} y - x = 9, \\ \frac{x+8}{2y-5} = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + 9, \\ \frac{x+8}{2(x+9)-5} = 2. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$\frac{x+8}{2(x+9)-5} = 2 \iff \frac{x+8}{2x+13} - 2 = 0 \iff$$

$$\iff \frac{x+8-2(2x+13)}{2x+13} = 0 \iff \frac{x+8-4x-26}{2x+13} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{-3x-18}{2x+13} = 0 \iff \frac{x+6}{2x+13} = 0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв'язання. Виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи в друге, отримуємо

$$\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+9, \\ \frac{x+8}{2(x+9)-5}=2. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$\frac{x+8}{2(x+9)-5}=2 \iff \frac{x+8}{2x+13}-2=0 \iff$$

$$\iff \frac{x+8-2(2x+13)}{2x+13}=0 \iff \frac{x+8-4x-26}{2x+13}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-3x-18}{2x+13}=0 \iff \frac{x+6}{2x+13}=0.$$

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Р о з в' я з а н н я. Виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи в друге, отримуємо

$$\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+9, \\ \frac{x+8}{2(x+9)-5}=2. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$\frac{x+8}{2(x+9)-5}=2 \iff \frac{x+8}{2x+13}-2=0 \iff$$

$$\iff \frac{x+8-2(2x+13)}{2x+13}=0 \iff \frac{x+8-4x-26}{2x+13}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-3x-18}{2x+13}=0 \iff \frac{x+6}{2x+13}=0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв'язання. Виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи в друге, отримуємо

$$\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+9, \\ \frac{x+8}{2(x+9)-5}=2. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$\frac{x+8}{2(x+9)-5}=2 \iff \frac{x+8}{2x+13}-2=0 \iff$$

$$\iff \frac{x+8-2(2x+13)}{2x+13}=0 \iff \frac{x+8-4x-26}{2x+13}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-3x-18}{2x+13}=0 \iff \frac{x+6}{2x+13}=0.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.).

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases}$

Запишіть у відповідь добуток $x_0 \cdot y_0$, якщо пара (x_0, y_0) є розв'язком цієї системи рівнянь.

Розв'язання. Виражаючи y з першого рівняння системи і підставляючи в друге, отримуємо

$$\begin{cases} y-x=9, \\ \frac{x+8}{2y-5}=2. \end{cases} \iff \begin{cases} y=x+9, \\ \frac{x+8}{2(x+9)-5}=2. \end{cases}$$

Розв'язуємо друге рівняння системи:

$$\frac{x+8}{2(x+9)-5}=2 \iff \frac{x+8}{2x+13}-2=0 \iff$$

$$\iff \frac{x+8-2(2x+13)}{2x+13}=0 \iff \frac{x+8-4x-26}{2x+13}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-3x-18}{2x+13}=0 \iff \frac{x+6}{2x+13}=0.$$

Приклади із ЗНО

У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x+6}{2x+13} = 0 \iff \begin{cases} x+6 = 0, \\ 2x+13 \neq 0, \end{cases} \iff x = -6\,.$$

Тепер знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = -6, \\ y = x+9 = -6+9 = 3. \end{cases}$$

Отже, $x_0 \cdot y_0 = -6 \cdot 3 = -18\,.$

Відповідь: $-18\,.$

Приклади із ЗНО

У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x+6}{2x+13}=0 \iff \begin{cases} x+6=0, \\ 2x+13\neq 0, \end{cases} \iff x=-6\,.$$

Тепер знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x=-6, \\ y=x+9=-6+9=3. \end{cases}$$

Отже, $x_0\cdot y_0=-6\cdot 3=-18\,.$

Відповідь: $-18\,.$

Приклади із ЗНО

У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x+6}{2x+13} = 0 \iff \begin{cases} x+6 = 0, \\ 2x+13 \neq 0, \end{cases} \iff x = -6\,.$$

Тепер знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = -6, \\ y = x+9 = -6+9 = 3. \end{cases}$$

Отже, $x_0 \cdot y_0 = -6 \cdot 3 = -18\,.$

Відповідь: $-18\,.$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Розглянемо деякі приклади систем, для розв'язання яких застосовується метод заміни змінних.

Приклад 4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 2, \\ x^2 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних в першому рівнянні системи: $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. При цьому отримаємо рівняння з однією невідомою:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \iff \frac{t^2-2t+1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff t = 1$$

(ми скористались теоремою про рівність дробу нулю).

Після зворотної заміни $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ отримуємо

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 1 \iff \frac{x+y}{x-y} = 1 \iff \frac{x+y-(x-y)}{x-y} = 0 \iff \frac{2y}{x-y} = 0.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Розглянемо деякі приклади систем, для розв'язання яких застосовується метод заміни змінних.

Приклад 4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=2, \\ x^2+y^3=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних в першому рівнянні системи: $t=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. При цьому отримаємо рівняння з однією невідомою:

$$t+\frac{1}{t}=2 \iff \frac{t^2-2t+1}{t}=0 \iff \begin{cases} t^2-2t+1=0, \\ t\neq 0, \end{cases} \iff t=1$$

(ми скористались теоремою про рівність дробу нулю).

Після зворотної заміни $t=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ отримуємо

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=1 \iff \frac{x+y}{x-y}=1 \iff \frac{x+y-(x-y)}{x-y}=0 \iff \frac{2y}{x-y}=0.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Розглянемо деякі приклади систем, для розв'язання яких застосовується метод заміни змінних.

П р и к л а д 4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 2, \\ x^2 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Зробимо заміну змінних в першому рівнянні системи: $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. При цьому отримаємо рівняння з однією невідомою:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \iff \frac{t^2-2t+1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff t = 1$$

(ми скористались теоремою про рівність дробу нулю).

Після зворотної заміни $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ отримуємо

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 1 \iff \frac{x+y}{x-y} = 1 \iff \frac{x+y-(x-y)}{x-y} = 0 \iff \frac{2y}{x-y} = 0.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Розглянемо деякі приклади систем, для розв'язання яких застосовується метод заміни змінних.

П р и к л а д 4. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 2, \\ x^2 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Зробимо заміну змінних в першому рівнянні системи: $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. При цьому отримаємо рівняння з однією невідомою:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \iff \frac{t^2-2t+1}{t} = 0 \iff \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff t = 1$$

(ми скористались теоремою про рівність дробу нулю).

Після зворотної заміни $t = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ отримуємо

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = 1 \iff \frac{x+y}{x-y} = 1 \iff \frac{x+y-(x-y)}{x-y} = 0 \iff \frac{2y}{x-y} = 0\,.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

За теоремою про рівність дробу нулю маємо

$$\frac{2y}{x-y}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y. \end{cases}$$

Отже, замінимо систему рівнянь рівносильною їй системою

$$\begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2+y^3=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\pm 2, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, система має два розв'язки: $(2;0),(-2;0)$.

Відповідь: $\{(2;0),(-2;0)\}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

За теоремою про рівність дробу нулю маємо

$$\frac{2y}{x-y}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y. \end{cases}$$

Отже, замінимо систему рівнянь рівносильною їй системою

$$\begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2+y^3=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\pm 2, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, система має два розв'язки: $(2;0),(-2;0)$.

Відповідь: $\{(2;0),(-2;0)\}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

За теоремою про рівність дробу нулю маємо

$$\frac{2y}{x-y} = 0 \iff \begin{cases} y = 0, \\ x \neq y. \end{cases}$$

Отже, замінимо систему рівнянь рівносильною їй системою

$$\begin{cases} y = 0, \\ x \neq y, \\ x^2 + y^3 = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, \\ x \neq y, \\ x^2 = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0, \\ x = \pm 2, \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, система має два розв'язки: $(2;0), (-2;0)$.

Відповідь: $\{(2;0), (-2;0)\}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

За теоремою про рівність дробу нулю маємо

$$\frac{2y}{x-y}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y. \end{cases}$$

Отже, замінимо систему рівнянь рівносильною їй системою

$$\begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2+y^3=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\pm 2, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, система має два розв'язки: $(2;0),(-2;0)$.

Відповідь: $\{(2;0),(-2;0)\}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

За теоремою про рівність дробу нулю маємо

$$\frac{2y}{x-y}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y. \end{cases}$$

Отже, замінимо систему рівнянь рівносильною їй системою

$$\begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2+y^3=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x\neq y, \\ x^2=4, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=\pm 2, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2, \\ y=0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, система має два розв'язки: $(2;0),(-2;0)$.

Відповідь: $\{(2;0),(-2;0)\}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t=x+y$, $z=xy$. Тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2z$.

Маємо систему з невідомими t і z:

$$\begin{cases} t^2-2z+2t=23, \\ t-2z=-7, \end{cases} \iff \begin{cases} 2z=t+7, \\ t^2-(t+7)+2t=23. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння системи, отримуємо

$$t^2-(t+7)+2t=23 \iff t^2+t-30=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5. \end{array} \right.$$

Тоді

$$\begin{cases} z=(t+7)/2, \\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5, \end{array} \right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-6, \\ z=(t+7)/2=1/2, \end{cases} \\ \begin{cases} t=5, \\ z=(t+7)/2=6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t=x+y$, $z=xy$. Тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2z$.

Маємо систему з невідомими t і z:

$$\begin{cases} t^2-2z+2t=23, \\ t-2z=-7, \end{cases} \iff \begin{cases} 2z=t+7, \\ t^2-(t+7)+2t=23. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння системи, отримуємо

$$t^2-(t+7)+2t=23 \iff t^2+t-30=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\begin{cases} z=(t+7)/2, \\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-6, \\ z=(t+7)/2=1/2, \end{cases} \\ \begin{cases} t=5, \\ z=(t+7)/2=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t=x+y$, $z=xy$. Тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2z$.

Маємо систему з невідомими t і z:

$$\begin{cases} t^2-2z+2t=23, \\ t-2z=-7, \end{cases} \iff \begin{cases} 2z=t+7, \\ t^2-(t+7)+2t=23. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння системи, отримуємо

$$t^2-(t+7)+2t=23 \iff t^2+t-30=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\begin{cases} z=(t+7)/2, \\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-6, \\ z=(t+7)/2=1/2, \end{cases} \\ \begin{cases} t=5, \\ z=(t+7)/2=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t=x+y$, $z=xy$. Тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2z$.

Маємо систему з невідомими t і z:

$$\begin{cases} t^2-2z+2t=23, \\ t-2z=-7, \end{cases} \iff \begin{cases} 2z=t+7, \\ t^2-(t+7)+2t=23. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння системи, отримуємо

$$t^2-(t+7)+2t=23 \iff t^2+t-30=0 \iff \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5. \end{array}\right.$$

Тоді

$$\begin{cases} z=(t+7)/2, \\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-6, \\ z=(t+7)/2=1/2, \end{cases} \\ \begin{cases} t=5, \\ z=(t+7)/2=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Приклад 5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних: $t=x+y$, $z=xy$. Тоді $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=t^2-2z$.

Маємо систему з невідомими t і z:

$$\begin{cases} t^2-2z+2t=23, \\ t-2z=-7, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2z=t+7, \\ t^2-(t+7)+2t=23. \end{cases}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння системи, отримуємо

$$t^2-(t+7)+2t=23 \Longleftrightarrow t^2+t-30=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5. \end{array} \right.$$

Тоді

$$\begin{cases} z=(t+7)/2, \\ \left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=5, \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=-6, \\ z=(t+7)/2=1/2, \end{cases} \\ \begin{cases} t=5, \\ z=(t+7)/2=6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Тепер після зворотної заміни $t = x + y,\ z = xy$ необхідно розв'язати сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} x + y = -6, \\ xy = 1/2, \end{array}\right. & (*) \\ \left\{\begin{array}{l} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{array}\right. & (**) \end{array}\right.$$

1) Розв'язуємо систему $(*)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = -6, \\ xy = 1/2, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -x - 6, \\ x(-x-6) = 1/2. \end{array}\right.$$

Перетворюємо квадратне рівняння системи до стандартного вигляду:

$x(-x-6) = 1/2 \iff -2x^2 - 12x = 1 \iff 2x^2 + 12x + 1 = 0$.

Обчислюємо $D/4 = 6^2 - 2 \cdot 1 = 34$ і знаходимо корені квадратного рівняння: $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{34}}{2} = -3 \pm \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

Тепер після зворотної заміни $t = x + y$, $z = xy$ необхідно розв'язати сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 1/2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

1) Розв'язуємо систему $(*)$:

$$\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 1/2, \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x - 6, \\ x(-x-6) = 1/2. \end{cases}$$

Перетворюємо квадратне рівняння системи до стандартного вигляду:

$x(-x-6) = 1/2 \iff -2x^2 - 12x = 1 \iff 2x^2 + 12x + 1 = 0$.

Обчислюємо $D/4 = 6^2 - 2 \cdot 1 = 34$ і знаходимо корені квадратного рівняння: $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{34}}{2} = -3 \pm \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

Тепер після зворотної заміни $t = x + y$, $z = xy$ необхідно розв'язати сукупність двох систем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=1/2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

1) Розв'язуємо систему $(*)$:

$$\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=1/2, \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x-6, \\ x(-x-6)=1/2. \end{cases}$$

Перетворюємо квадратне рівняння системи до стандартного вигляду:

$$x(-x-6)=1/2 \iff -2x^2-12x=1 \iff 2x^2+12x+1=0\,.$$

Обчислюємо $D/4 = 6^2 - 2\cdot 1 = 34$ і знаходимо корені квадратного рівняння: $x = \dfrac{-6\pm\sqrt{34}}{2} = -3\pm\dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Розв'язання систем методом заміни змінних

Далі маємо

$$\begin{cases} y = -x - 6, \\ x = -3 \pm \frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 - \frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y = -x - 6 = -3 + \frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 + \frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y = -x - 6 = -3 - \frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \end{array} \right.$$

тобто система $(*)$ має два розв'язки.

2) Знаходимо розв'язки системи $(**)$, спираючись на теорему, обернену до теореми Вієта:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ y = 2, \end{cases} \end{array} \right.$$

тобто система $(**)$ також має два розв'язки.

Відповідь:

$$\left\{ \left(-3 - \frac{\sqrt{34}}{2}, -3 + \frac{\sqrt{34}}{2}\right), \left(-3 + \frac{\sqrt{34}}{2}, -3 - \frac{\sqrt{34}}{2}\right), (2;3), (3;2), \right\}.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Далі маємо

$$\begin{cases} y=-x-6, \\ x=-3\pm\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y=-x-6=-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y=-x-6=-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \end{array} \right.$$

тобто система $(*)$ має два розв'язки.

2) Знаходимо розв'язки системи $(**)$, спираючись на теорему, обернену до теореми Вієта:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \end{array} \right.$$

тобто система $(**)$ також має два розв'язки.

Відповідь:

$$\left\{ \left(-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, -3+\frac{\sqrt{34}}{2}\right), \left(-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, -3-\frac{\sqrt{34}}{2}\right), (2;3), (3;2), \right\}.$$

Розв'язання систем методом заміни змінних

Далі маємо

$$\begin{cases} y=-x-6, \\ x=-3\pm\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y=-x-6=-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, \\ y=-x-6=-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, \end{cases} \end{array}\right.$$

тобто система $(*)$ має два розв'язки.

2) Знаходимо розв'язки системи $(**)$, спираючись на теорему, обернену до теореми Вієта:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases} \end{array}\right.$$

тобто система $(**)$ також має два розв'язки.

Відповідь:

$$\left\{\left(-3-\frac{\sqrt{34}}{2}, -3+\frac{\sqrt{34}}{2}\right), \left(-3+\frac{\sqrt{34}}{2}, -3-\frac{\sqrt{34}}{2}\right), (2;3), (3;2), \right\}.$$

Симетричні системи

Відзначимо, що в попередньому прикладі розв'язками системи

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x+y)=23, \\ x+y-2xy=-7 \end{cases}$$

є симетричні пари чисел: $(2;3),(3;2)$ і $\left(-3-\frac{\sqrt{34}}{2},-3+\frac{\sqrt{34}}{2}\right),\left(-3+\frac{\sqrt{34}}{2},-3-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$, що є притаманним симетричним системам рівнянь.

- Симетричними називають системи, які не змінюються при заміні в них x на y і y на x.

Система однорідних рівнянь

Приклад 6. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} y^2 - yx - 2x^2 = 0, \\ y^2 - 5xy + 6x^2 = 0 \end{cases} \quad ?$$

Розв'язання. Розглянемо однорідне рівняння

$$y^2 - yx - 2x^2 = 0 \tag{3}$$

з двома невідомими x і y (однорідними називають рівняння, в яких сума степенів невідомих x і y в кожному доданку однакова. Зокрема, в рівнянні (3) вона дорівнює 2).
Воно має, принаймні, нульовий розв'язок $(0;0)$.
Знайдемо інші (ненульові) розв'язки рівняння (3).
Оскільки для них $x \neq 0$, то, розділивши обидві частини рівняння (3) на x^2, отримаємо

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 2 = 0.$$

Система однорідних рівнянь

П р и к л а д 6. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} y^2 - yx - 2x^2 = 0, \\ y^2 - 5xy + 6x^2 = 0 \end{cases} \quad ?$$

Р о з в' я з а н н я. Розглянемо однорідне рівняння

$$y^2 - yx - 2x^2 = 0 \tag{3}$$

з двома невідомими x і y (однорідними називають рівняння, в яких сума степенів невідомих x і y в кожному доданку однакова. Зокрема, в рівнянні (3) вона дорівнює 2).
Воно має, принаймні, нульовий розв'язок $(0;0)$.
Знайдемо інші (ненульові) розв'язки рівняння (3).
Оскільки для них $x \neq 0$, то, розділивши обидві частини рівняння (3) на x^2, отримаємо

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - 2 = 0.$$

Система однорідних рівнянь

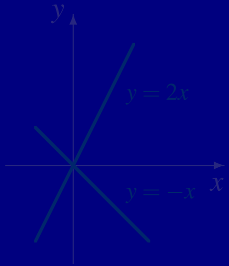
Застосовуючи заміну змінних $t = \frac{y}{x}$ і розв'язуючи квадратне рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, знаходимо $t_1 = -1$ і $t_2 = 2$, тобто

$$\left[\begin{array}{l} \frac{y}{x} = -1, \\ \frac{y}{x} = 2, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = -x, \\ y = 2x. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Якщо до знайдених ненульових (при $x \neq 0$) розв'язків рівняння

$$y^2 - yx - 2x^2 = 0 \qquad (3)$$

додати вказаний раніше нульовий розв'язок (0;0), то



легко помітити, що всі розв'язки рівняння (3) – це пари (x, y) чисел x і y, для яких

$y = -x,\ x \in \mathbf{R}$ або $y = 2x,\ x \in \mathbf{R}$,

а геометричний образ рівняння (3) утворюють дві прямі:

$y = -x$ і $y = 2x$.

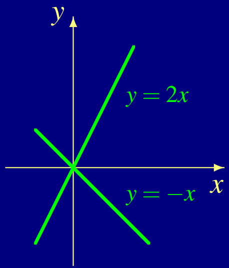
Система однорідних рівнянь

Застосовуючи заміну змінних $t = \frac{y}{x}$ і розв'язуючи квадратне рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, знаходимо $t_1 = -1$ і $t_2 = 2$, тобто
$$\left[\begin{array}{l} \frac{y}{x} = -1, \\ \frac{y}{x} = 2, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = -x, \\ y = 2x. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Якщо до знайдених ненульових (при $x \neq 0$) розв'язків рівняння

$$y^2 - yx - 2x^2 = 0 \qquad (3)$$

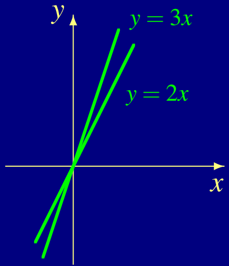
додати вказаний раніше нульовий розв'язок $(0;0)$, то



легко помітити, що всі розв'язки рівняння (3) – це пари (x, y) чисел x і y, для яких $y = -x,\ x \in \mathbf{R}$ або $y = 2x,\ x \in \mathbf{R}$, а геометричний образ рівняння (3) утворюють дві прямі: $y = -x$ і $y = 2x$.

Система однорідних рівнянь

Для другого рівняння $y^2-5yx+6x^2=0$ системи аналогічно знаходимо його геометричний образ, що складається з двох прямих: $y=2x$ і $y=3x$.

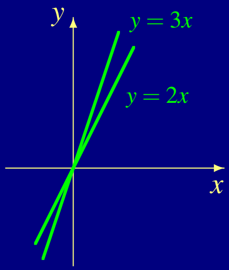


Очевидно, що перетином геометричних образів рівнянь системи є їх спільна пряма $y=2x$, а спільні розв'язки рівнянь системи утворюють нескінченну множину $\{(x,y) : y=2x, x\in\mathbf{R}\}$.

Відповідь: нескінченну множину.

Система однорідних рівнянь

Для другого рівняння $y^2 - 5yx + 6x^2 = 0$ системи аналогічно знаходимо його геометричний образ, що складається з двох прямих: $y = 2x$ і $y = 3x$.

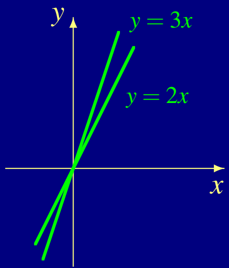


Очевидно, що перетином геометричних образів рівнянь системи є їх спільна пряма $y = 2x$, а спільні розв'язки рівнянь системи утворюють нескінченну множину $\{(x, y) : y = 2x, x \in \mathbf{R}\}$.

Відповідь: нескінченну множину.

Система однорідних рівнянь

Для другого рівняння $y^2 - 5yx + 6x^2 = 0$ системи аналогічно знаходимо його геометричний образ, що складається з двох прямих: $y = 2x$ і $y = 3x$.



Очевидно, що перетином геометричних образів рівнянь системи є їх спільна пряма $y = 2x$, а спільні розв'язки рівнянь системи утворюють нескінченну множину $\{(x,y) : y = 2x, x \in \mathbf{R}\}$.

Відповідь: нескінченну множину.

Однорідне рівняння другого степеня

Всі розв'язки однорідного рівняння другого степеня $ay^2 + bxy + cx^2 = 0$, де a, b, c – деякі дійсні числа і $a \neq 0$, можна знайти за допомогою заміни змінних $y = tx$.

При цьому можливі випадки:

- $D > 0$, де D – дискримінант квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Тоді це квадратне рівняння має два корені t_1 і t_2, а геометричний образ однорідного рівняння складається з двох прямих: $y = t_1 x$ і $y = t_2 x$;
- $D = 0$. Тоді вказане квадратне рівняння має один корінь t_0, а геометричний образ однорідного рівняння складається з однієї прямої: $y = t_0 x$;
- $D < 0$. Тоді вказане квадратне рівняння не має коренів, проте однорідне рівняння при цьому має єдиний розв'язок $(0;0)$ і його геометричним образом є точка $(0;0)$.

Однорідне рівняння другого степеня

Всі розв'язки однорідного рівняння другого степеня $ay^2 + bxy + cx^2 = 0$, де a, b, c – деякі дійсні числа і $a \neq 0$, можна знайти за допомогою заміни змінних $y = tx$.

При цьому можливі випадки:

- $D > 0$, де D – дискримінант квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Тоді це квадратне рівняння має два корені t_1 і t_2, а геометричний образ однорідного рівняння складається з двох прямих: $y = t_1 x$ і $y = t_2 x$;
- $D = 0$. Тоді вказане квадратне рівняння має один корінь t_0, а геометричний образ однорідного рівняння складається з однієї прямої: $y = t_0 x$;
- $D < 0$. Тоді вказане квадратне рівняння не має коренів, проте однорідне рівняння при цьому має єдиний розв'язок $(0;0)$ і його геометричним образом є точка $(0;0)$.

Однорідне рівняння другого степеня

Всі розв'язки однорідного рівняння другого степеня $ay^2+bxy+cx^2=0$, де a,b,c – деякі дійсні числа і $a\neq 0$, можна знайти за допомогою заміни змінних $y=tx$.

При цьому можливі випадки:

- $D>0$, де D – дискримінант квадратного рівняння $at^2+bt+c=0$. Тоді це квадратне рівняння має два корені t_1 і t_2, а геометричний образ однорідного рівняння складається з двох прямих: $y=t_1x$ і $y=t_2x$;
- $D=0$. Тоді вказане квадратне рівняння має один корінь t_0, а геометричний образ однорідного рівняння складається з однієї прямої: $y=t_0x$;
- $D<0$. Тоді вказане квадратне рівняння не має коренів, проте однорідне рівняння при цьому має єдиний розв'язок $(0;0)$ і його геометричним образом є точка $(0;0)$.

Однорідне рівняння другого степеня

Всі розв'язки однорідного рівняння другого степеня $ay^2+bxy+cx^2=0$, де a,b,c – деякі дійсні числа і $a\neq 0$, можна знайти за допомогою заміни змінних $y=tx$.

При цьому можливі випадки:

- $D>0$, де D – дискримінант квадратного рівняння $at^2+bt+c=0$. Тоді це квадратне рівняння має два корені t_1 і t_2, а геометричний образ однорідного рівняння складається з двох прямих: $y=t_1x$ і $y=t_2x$;
- $D=0$. Тоді вказане квадратне рівняння має один корінь t_0, а геометричний образ однорідного рівняння складається з однієї прямої: $y=t_0x$;
- $D<0$. Тоді вказане квадратне рівняння не має коренів, проте однорідне рівняння при цьому має єдиний розв'язок $(0;0)$ і його геометричним образом є точка $(0;0)$.

Однорідне рівняння другого степеня

Наприклад, за допомогою заміни змінних $y = tx$ розв'яжемо однорідне рівняння

$$y^2 - 5yx + 6x^2 = 0$$

(друге рівняння з системи, розглянутої в попередньому прикладі). Матимемо

$$t^2x^2 - 5tx^2 + 6x^2 = 0 \iff x^2(t^2 - 5t + 6) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ t^2 - 5t + 6 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ t = 2, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

При зворотній заміні $y = tx$ отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ t = 2, \\ t = 3, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0 \\ y = 2x, \\ y = 3x, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = 3x \end{array}\right.$$

(оскільки розв'язок $x = y = 0$ міститься в кожному з розв'язків вигляду $y = 2x$ або $y = 3x$), тобто геометричний образ цього однорідного рівняння складається з двох прямих: $y = 2x$ і $y = 3x$.

Однорідне рівняння другого степеня

Наприклад, за допомогою заміни змінних $y = tx$ розв'яжемо однорідне рівняння

$$y^2 - 5yx + 6x^2 = 0$$

(друге рівняння з системи, розглянутої в попередньому прикладі). Матимемо

$$t^2x^2 - 5tx^2 + 6x^2 = 0 \iff x^2(t^2 - 5t + 6) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ t^2 - 5t + 6 = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ t = 2, \\ t = 3. \end{array}\right.$$

При зворотній заміні $y = tx$ отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ t = 2, \\ t = 3, \end{array}\right. \implies \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = 0 \\ y = 2x, \\ y = 3x, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = 2x, \\ y = 3x \end{array}\right.$$

(оскільки розв'язок $x = y = 0$ міститься в кожному з розв'язків вигляду $y = 2x$ або $y = 3x$), тобто геометричний образ цього однорідного рівняння складається з двох прямих: $y = 2x$ і $y = 3x$.

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2, \\ 4x^2 - 7xy + 9y^2 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Рівняння цієї системи не є однорідними, оскільки праві частини рівнянь містять доданки зі змінними в нульовому степені.

Проте, домножаючи обидві частини першого рівняння системи на 2 і віднімаючи після цього від нього друге рівняння системи, отримуємо однорідне рівняння:

$$2(5x^2 - 6xy + 5y^2) - (4x^2 - 7xy + 9y^2) = 2 \cdot 2 - 4 \iff$$
$$\iff y^2 - 5yx + 6x^2 = 0,$$

для якого вище знайдено всі розв'язки у вигляді $y = 2x$ або $y = 3x$.

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

П р и к л а д 7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2, \\ 4x^2 - 7xy + 9y^2 = 4. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Рівняння цієї системи не є однорідними, оскільки праві частини рівнянь містять доданки зі змінними в нульовому степені.

Проте, домножаючи обидві частини першого рівняння системи на 2 і віднімаючи після цього від нього друге рівняння системи, отримуємо однорідне рівняння:

$$2(5x^2 - 6xy + 5y^2) - (4x^2 - 7xy + 9y^2) = 2 \cdot 2 - 4 \iff$$
$$\iff y^2 - 5yx + 6x^2 = 0,$$

для якого вище знайдено всі розв'язки у вигляді $y = 2x$ або $y = 3x$.

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

Отже, справедливі рівносильні переходи:

$$\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 4x^2-7xy+9y^2=4, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 6x^2-5xy+y^2=0, & 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 5x^2-6xy+5y^2=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=2x, \\ y=3x, \end{array} \right. \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=2x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} y=3x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2. \end{cases} & (**) \end{array} \right.$$

1) При розв'язанні системи $(*)$ підставимо $y=2x$ в друге рівняння:

$$5x^2-6x\cdot 2x+5(2x)^2=2 \iff 13x^2=2 \iff x^2=2/13 \iff$$

$$\iff x=\pm\sqrt{2/13}\,.$$

Отже, система $(*)$ має два розв'язки:

$$(\sqrt{2/13}; 2\sqrt{2/13}),\ (-\sqrt{2/13}; -2\sqrt{2/13})\,.$$

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

Отже, справедливі рівносильні переходи:

$$\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 4x^2-7xy+9y^2=4, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 6x^2-5xy+y^2=0, & 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=2x, \\ y=3x, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=2x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} y=3x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2. \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

1) При розв'язанні системи $(*)$ підставимо $y=2x$ в друге рівняння:

$$5x^2-6x\cdot 2x+5(2x)^2=2 \iff 13x^2=2 \iff x^2=2/13 \iff$$

$$\iff x=\pm\sqrt{2/13}.$$

Отже, система $(*)$ має два розв'язки:

$$(\sqrt{2/13}; 2\sqrt{2/13}), (-\sqrt{2/13}; -2\sqrt{2/13}).$$

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

Отже, справедливі рівносильні переходи:

$$\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 4x^2-7xy+9y^2=4, & \mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 6x^2-5xy+y^2=0, & 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=2x, \\ y=3x, \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=2x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} y=3x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2. \end{cases} & (**) \end{array} \right.$$

1) При розв'язанні системи $(*)$ підставимо $y=2x$ в друге рівняння:

$$5x^2-6x\cdot 2x+5(2x)^2=2 \iff 13x^2=2 \iff x^2=2/13 \iff$$

$$\iff x=\pm\sqrt{2/13}\,.$$

Отже, система $(*)$ має два розв'язки:

$(\sqrt{2/13}; 2\sqrt{2/13}), (-\sqrt{2/13}; -2\sqrt{2/13})$.

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

Отже, справедливі рівносильні переходи:

$$\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 4x^2-7xy+9y^2=4, & \mathrm{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, & \mathrm{I} \\ 6x^2-5xy+y^2=0, & 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=2, \\ \left[\begin{array}{l} y=2x, \\ y=3x, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=2x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2, \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} y=3x, \\ 5x^2-6xy+5y^2=2. \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

1) При розв'язанні системи $(*)$ підставимо $y=2x$ в друге рівняння:

$$5x^2-6x\cdot 2x+5(2x)^2=2 \iff 13x^2=2 \iff x^2=2/13 \iff$$
$$\iff x=\pm\sqrt{2/13}\,.$$

Отже, система $(*)$ має два розв'язки:

$$(\sqrt{2/13};2\sqrt{2/13}),\ (-\sqrt{2/13};-2\sqrt{2/13})\,.$$

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

2) При розв'язанні системи

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2. \end{cases} \quad (**)$$

підставимо $y = 3x$ в друге рівняння:

$$5x^2 - 6x \cdot 3x + 5(3x)^2 = 2 \iff 32x^2 = 2 \iff x^2 = 1/16 \iff$$

$$\iff x = \pm 1/4\,.$$

Отже, система $(**)$ також має два розв'язки:

$(1/4; 3/4)$, $(-1/4; -3/4)$.

Відповідь:

$$\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{13}}; 2\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{13}}; -2\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)\right\}.$$

Система, в якій можна виділити однорідне рівняння

2) При розв'язанні системи

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2. \end{cases} \quad (**)$$

підставимо $y = 3x$ в друге рівняння:

$$5x^2 - 6x \cdot 3x + 5(3x)^2 = 2 \iff 32x^2 = 2 \iff x^2 = 1/16 \iff$$

$$\iff x = \pm 1/4\,.$$

Отже, система $(**)$ також має два розв'язки:

$(1/4; 3/4)$, $(-1/4; -3/4)$.

Відповідь:

$$\left\{ \left(\sqrt{\frac{2}{13}}; 2\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(-\sqrt{\frac{2}{13}}; -2\sqrt{\frac{2}{13}}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right) \right\}.$$