Текстові задачі на складання рівнянь і систем-1

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 14

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Текстові задачі. Моделювання задач

Процес розв'язання більшості текстових задач складається з двох етапів:

- 1-й етап (не математичний) – моделювання задачі. Цей етап включає в себе введення невідомих параметрів, що характеризують процеси, які відбуваються в задачі. Моделювання задачі закінчується складанням системи рівнянь і нерівностей, яка повністю описує вказані процеси;
- 2-й етап (математичний) полягає в розв'язанні системи, отриманої на етапі моделювання задачі.

Текстові задачі. Моделювання задач

Процес розв'язання більшості текстових задач складається з двох етапів:

- 1-й етап (не математичний) – моделювання задачі. Цей етап включає в себе введення невідомих параметрів, що характеризують процеси, які відбуваються в задачі. Моделювання задачі закінчується складанням системи рівнянь і нерівностей, яка повністю описує вказані процеси;
- 2-й етап (математичний) полягає в розв'язанні системи, отриманої на етапі моделювання задачі.

Текстові задачі. Моделювання задач

Процес розв'язання більшості текстових задач складається з двох етапів:

- 1-й етап (не математичний) – моделювання задачі. Цей етап включає в себе введення невідомих параметрів, що характеризують процеси, які відбуваються в задачі. Моделювання задачі закінчується складанням системи рівнянь і нерівностей, яка повністю описує вказані процеси;
- 2-й етап (математичний) полягає в розв'язанні системи, отриманої на етапі моделювання задачі.

Текстові задачі. Моделювання задач

Зазначимо, що більшість систем, що описують процеси, які відбуваються в задачах, містять не тільки рівняння, але також і нерівності.

Так, значення багатьох параметрів повинні виражатися додатніми числами (наприклад, відстані, швидкості і т.п.) чи бути обмеженими за величиною (наприклад, процентний вміст речовини в суміші не менший 0 % і не більший 100 %). Як правило, подібні нерівності неявно передбачаються, але в явному вигляді в системи не включаються.

Результатом моделювання однієї і тієї ж задачі можуть бути різні системи, які можуть відрізнятися за кількістю рівнянь і невідомих.

Далі викладаються доцільні способи моделювання основних типів текстових задач.

Текстові задачі. Моделювання задач

Зазначимо, що більшість систем, що описують процеси, які відбуваються в задачах, містять не тільки рівняння, але також і нерівності.
Так, значення багатьох параметрів повинні виражатися додатніми числами (наприклад, відстані, швидкості і т.п.) чи бути обмеженими за величиною (наприклад, процентний вміст речовини в суміші не менший 0 % і не більший 100 %). Як правило, подібні нерівності неявно передбачаються, але в явному вигляді в системи не включаються.

Результатом моделювання однієї і тієї ж задачі можуть бути різні системи, які можуть відрізнятися за кількістю рівнянь і невідомих.

Далі викладаються доцільні способи моделювання основних типів текстових задач.

Текстові задачі. Моделювання задач

Зазначимо, що більшість систем, що описують процеси, які відбуваються в задачах, містять не тільки рівняння, але також і нерівності.
Так, значення багатьох параметрів повинні виражатися додатніми числами (наприклад, відстані, швидкості і т.п.) чи бути обмеженими за величиною (наприклад, процентний вміст речовини в суміші не менший 0 % і не більший 100 %). Як правило, подібні нерівності неявно передбачаються, але в явному вигляді в системи не включаються.

Результатом моделювання однієї і тієї ж задачі можуть бути різні системи, які можуть відрізнятися за кількістю рівнянь і невідомих.

Далі викладаються доцільні способи моделювання основних типів текстових задач.

Задачі на рух

Розглянемо приклади.

Приклад 1. З пункта A в пункт B одночасно відправляються пішохід і бігун, швидкість якого втричі більша швидкості пішохода. У той момент, коли бігун прибув до пункту B, звідти назустріч пішоходу виїхав велосипедист. Швидкість велосипедиста більша швидкості бігуна на 5 км/год. Через 24 хвилини після свого виїзду велосипедист зустрів пішохода, а ще через 21 хвилину він прибув до пункту A. Знайти швидкості руху бігуна, пішохода і велосипедиста.

- Розглянемо кілька способів моделювання задачі, які мають лише незначні відмінності (проте, отримані при цьому системи містять різну кількість рівнянь). В кожному випадку зверніть увагу на природність появи систем рівнянь в результаті моделювання задачі.

Задачі на рух

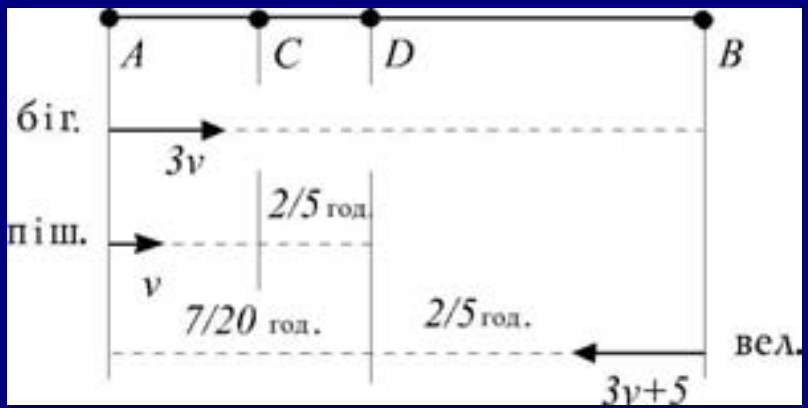
Розглянемо приклади.

Приклад 1. З пункта A в пункт B одночасно відправляються пішохід і бігун, швидкість якого втричі більша швидкості пішохода. У той момент, коли бігун прибув до пункту B, звідти назустріч пішоходу виїхав велосипедист. Швидкість велосипедиста більша швидкості бігуна на 5 км/год. Через 24 хвилини після свого виїзду велосипедист зустрів пішохода, а ще через 21 хвилину він прибув до пункту A. Знайти швидкості руху бігуна, пішохода і велосипедиста.

- Розглянемо кілька способів моделювання задачі, які мають лише незначні відмінності (проте, отримані при цьому системи містять різну кількість рівнянь). В кожному випадку зверніть увагу на природність появи систем рівнянь в результаті моделювання задачі.

Задачі на рух

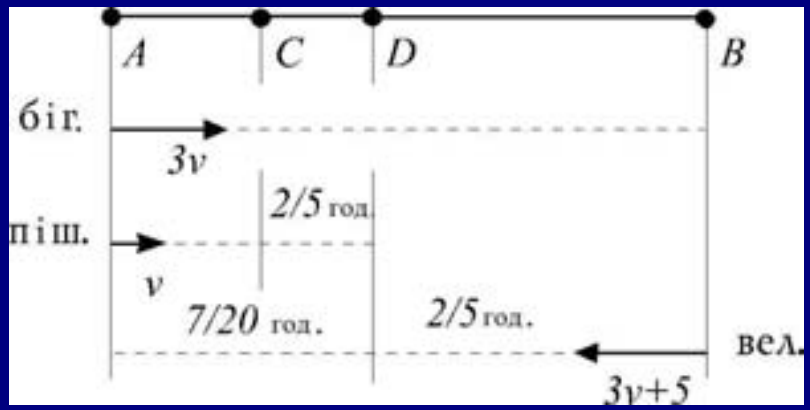
Р о з в' я з а н н я. 1-й спосіб. Нехай v – швидкість пішохода. Тоді швидкості бігуна і велосипедиста відповідно дорівнюють $3v$ і $3v+5$. Зобразимо на схемі дані умови задачі. Зазначимо, що в той момент, коли бігун і велосипедист знаходились в пункті B, пішохід знаходився в деякій точці C шляху AB. Місце зустрічі велосипедиста і пішохода позначимо через D. Отже, велосипедист шлях BD проїхав за 24 хв. $= 2/5$ години, а пішохід за цей же час пройшов шлях CD. Шлях DA велосипедист подолав за 21 хв. $= 7/20$ години



(для зручності параметри, що характеризують рух різних дійових осіб, рознесені в різні місця схеми).

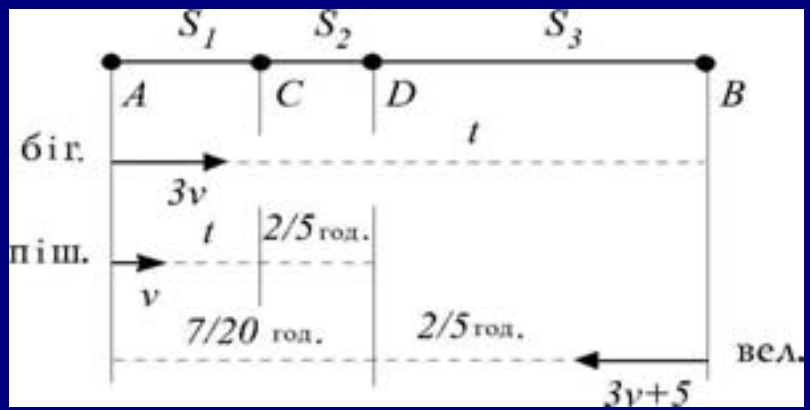
Задачі на рух

Ми використали всі дані умови задачі, проте, зазначимо, що наша схема поки що є незавершеною.



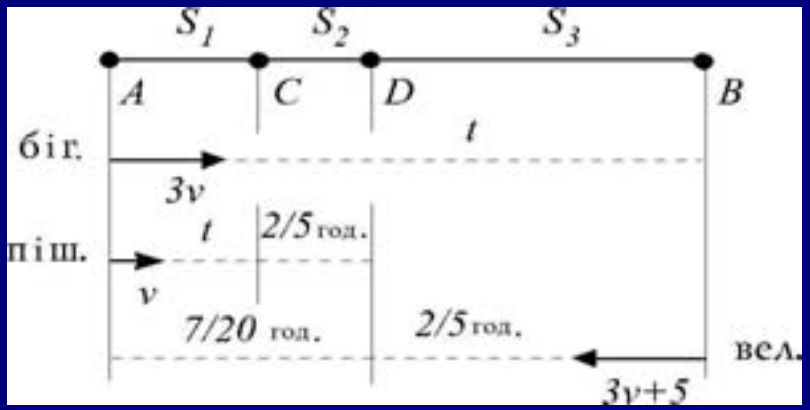
Так, на схемі відсутні часи руху пішохода по шляху AC і бігуна по шляху AB, а також відстані AC, CD і DB.

Введемо ці допоміжні невідомі елементи. Нехай S_1, S_2 і S_3 позначають відповідно відстані AC, CD і DB, t – час руху бігуна (він дорівнює також часу руху пішохода по шляху AC).



Тепер схема набуває завершеного вигляду.

Задачі на рух



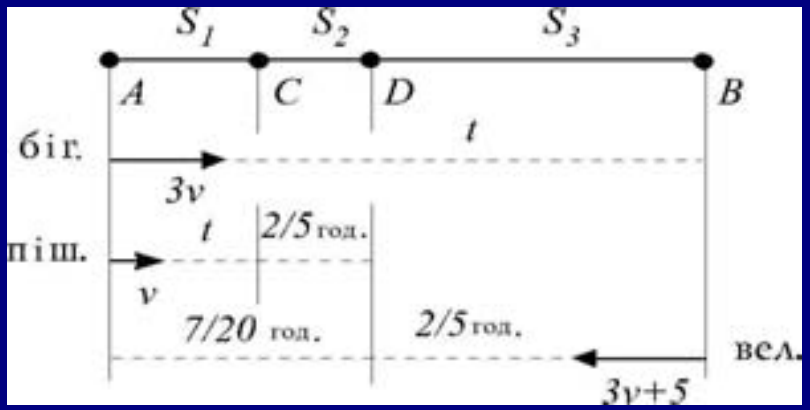
На схемі є п'ять невідомих S_1, S_2, S_3, t і v, для знаходження яких тепер очевидним способом отримуємо систему п'яти рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S_1 + S_2 + S_3, \\ vt = S_1, \\ \frac{2}{5}v = S_2, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_1 + S_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} S_1 = vt, \\ S_2 = \frac{2}{5}v, \\ S_3 = \frac{6}{5}v + 2, \\ 3vt = vt + \frac{2}{5}v + \frac{6}{5}v + 2, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = vt + \frac{2}{5}v, \end{cases}$$

З останньої системи для знаходження t і v маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Задачі на рух



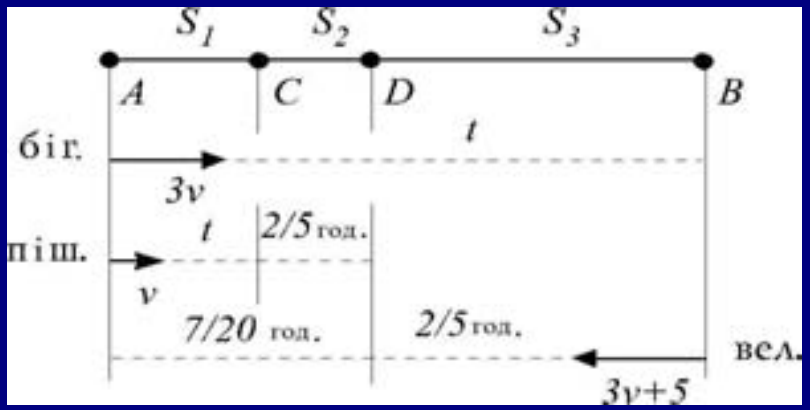
На схемі є п'ять невідомих S_1, S_2, S_3, t і v, для знаходження яких тепер очевидним способом отримуємо систему п'яти рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S_1 + S_2 + S_3, \\ vt = S_1, \\ \frac{2}{5}v = S_2, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_1 + S_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} S_1 = vt, \\ S_2 = \frac{2}{5}v, \\ S_3 = \frac{6}{5}v + 2, \\ 3vt = vt + \frac{2}{5}v + \frac{6}{5}v + 2, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = vt + \frac{2}{5}v, \end{cases}$$

З останньої системи для знаходження t і v маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Задачі на рух



На схемі є п'ять невідомих S_1, S_2, S_3, t і v, для знаходження яких тепер очевидним способом отримуємо систему п'яти рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S_1 + S_2 + S_3, \\ vt = S_1, \\ \frac{2}{5}v = S_2, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_1 + S_2, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} S_1 = vt, \\ S_2 = \frac{2}{5}v, \\ S_3 = \frac{6}{5}v + 2, \\ 3vt = vt + \frac{2}{5}v + \frac{6}{5}v + 2, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = vt + \frac{2}{5}v, \end{cases}$$

З останньої системи для знаходження t і v маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Задачі на рух

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, & \text{I} \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. & \text{II} \end{cases}$$

Домножаючи обидві частини другого рівняння цієї системи на (-2) і додаючи до першого рівняння системи, отримуємо рівняння $\text{I} + (-2)\text{II}$:

$$0 = \frac{8}{5}v + 2 - \frac{13}{10}v - \frac{7}{2} \iff \frac{3}{10}v - \frac{3}{2} = 0 \iff v = 5.$$

Тепер послідовно можуть бути знайдені решта невідомих: t, S_1, S_2 і S_3, хоча для повного розв'язання задачі нам достатньо вже знайденого значення невідомої v.

Так, швидкість пішохода дорівнює 5 км/час, швидкість бігуна $3v = 15$ (км/час), а швидкість велосипедиста $3v + 5 = 20$ (км/час).

- Як бачимо, значна кількість невідомих (п'ять) не є перешкодою на шляху розв'язання задачі.

Задачі на рух

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, & \text{I} \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. & \text{II} \end{cases}$$

Домножаючи обидві частини другого рівняння цієї системи на (-2) і додаючи до першого рівняння системи, отримуємо рівняння $\text{I} + (-2)\text{II}$:

$$0 = \frac{8}{5}v + 2 - \frac{13}{10}v - \frac{7}{2} \iff \frac{3}{10}v - \frac{3}{2} = 0 \iff v = 5.$$

Тепер послідовно можуть бути знайдені решта невідомих: t, S_1, S_2 і S_3, хоча для повного розв'язання задачі нам достатньо вже знайденого значення невідомої v.

Так, швидкість пішохода дорівнює 5 км/час, швидкість бігуна $3v = 15$ (км/час), а швидкість велосипедиста $3v + 5 = 20$ (км/час).

- Як бачимо, значна кількість невідомих (п'ять) не є перешкодою на шляху розв'язання задачі.

Задачі на рух

$$\begin{cases} 2vt = \frac{8}{5}v + 2, & \text{I} \\ vt = \frac{13}{20}v + \frac{7}{4}. & \text{II} \end{cases}$$

Домножаючи обидві частини другого рівняння цієї системи на (-2) і додаючи до першого рівняння системи, отримуємо рівняння $\text{I} + (-2)\text{II}$:

$$0 = \frac{8}{5}v + 2 - \frac{13}{10}v - \frac{7}{2} \iff \frac{3}{10}v - \frac{3}{2} = 0 \iff v = 5.$$

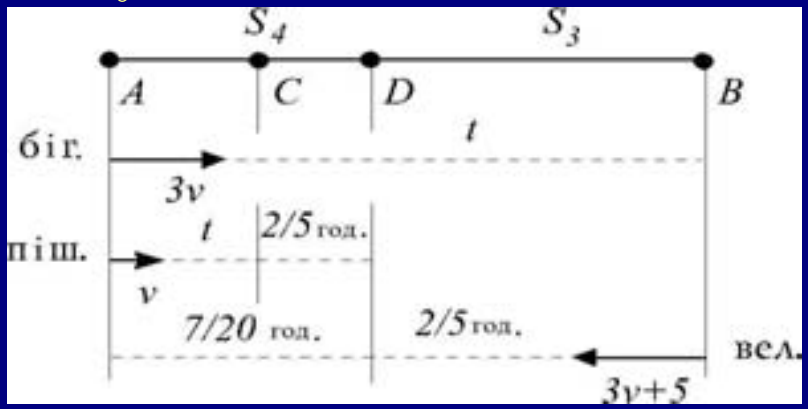
Тепер послідовно можуть бути знайдені решта невідомих: t, S_1, S_2 і S_3, хоча для повного розв'язання задачі нам достатньо вже знайденого значення невідомої v.

Так, швидкість пішохода дорівнює 5 км/час, швидкість бігуна $3v = 15$ (км/час), а швидкість велосипедиста $3v + 5 = 20$ (км/час).

- Як бачимо, значна кількість невідомих (п'ять) не є перешкодою на шляху розв'язання задачі.

Задачі на рух

2-й спосіб. Відзначимо, що при розв'язанні цієї задачі можна використати меншу кількість невідомих. Дійсно, якщо через S_4 позначити відстань AD (замість введених вище невідомих S_1 і S_2), то, зберігаючи попередні позначення, аналогічним способом отримуємо наступну схему.



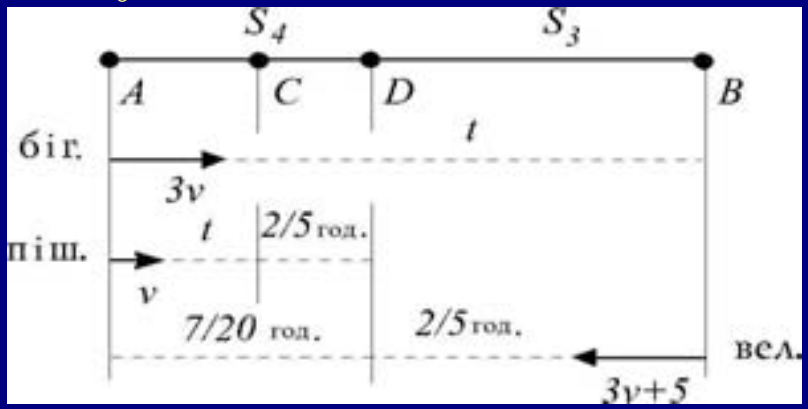
Для знаходження невідомих S_3, S_4, t, v записуємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S_3 + S_4, \\ v(t + \frac{2}{5}) = S_4, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_4. \end{cases}$$

Ця система може бути розв'язана аналогічно до розглянутої раніше системи рівнянь з невідомими S_1, S_2, S_3, t, v. Тут ми розглянемо інший спосіб її розв'язання.

Задачі на рух

2-й спосіб. Відзначимо, що при розв'язанні цієї задачі можна використати меншу кількість невідомих. Дійсно, якщо через S_4 позначити відстань AD (замість введених вище невідомих S_1 і S_2), то, зберігаючи попередні позначення, аналогічним способом отримуємо наступну схему.



Для знаходження невідомих S_3, S_4, t, v записуємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S_3 + S_4, \\ v(t + \frac{2}{5}) = S_4, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_4. \end{cases}$$

Ця система може бути розв'язана аналогічно до розглянутої раніше системи рівнянь з невідомими S_1, S_2, S_3, t, v. Тут ми розглянемо інший спосіб її розв'язання.

Задачі на рух

$$\begin{cases} 3vt = S_3 + S_4\,, \\ v(t+\frac{2}{5}) = S_4\,, \\ \frac{2}{5}(3v+5) = S_3\,, \\ \frac{7}{20}(3v+5) = S_4\,. \end{cases}$$

Оскільки за умовою задачі обидві частини четвертого рівняння системи не дорівнюють нулю, то можна виконати ділення третього рівняння системи на четверте, при цьому отримаємо

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{2}{5} : \frac{7}{20} = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{8}{7}.$$

Аналогічно при діленні першого рівняння системи на друге отримуємо $\frac{3t}{t+\frac{2}{5}} = \frac{S_3+S_4}{S_4}$ або ж $\frac{15t}{5t+2} = \frac{S_3}{S_4} + 1$.

Якщо тепер отримані рівняння доповнити другим і четвертим рівняннями системи, то отримаємо рівносильну їй систему

$$\begin{cases} v(t+\frac{2}{5}) = S_4\,, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = S_4\,, \\ \frac{S_3}{S_4} = \frac{8}{7}\,, \\ \frac{15t}{5t+2} = \frac{S_3}{S_4} + 1 = \frac{8}{7} + 1 = \frac{15}{7}\,. \end{cases}$$

Задачі на рух

$$\begin{cases} v(t+\frac{2}{5}) = S_4\,, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = S_4\,, \\ \frac{S_3}{S_4} = \frac{8}{7}\,, \\ \frac{15t}{5t+2} = \frac{S_3}{S_4} + 1 = \frac{8}{7} + 1 = \frac{15}{7}\,. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння

$$\frac{15t}{5t+2} = \frac{15}{7} \iff \frac{t}{5t+2} = \frac{1}{7} \iff \frac{7t-5t-2}{5t+2} = 0 \iff \frac{2t-2}{5t+2} = 0\,,$$

знаходимо $t = 1$.

Тепер, підставляючи значення $t = 1$ в перше рівняння системи і прирівнюючи ліві частини першого і другого рівнянь, отримуємо

$$\frac{7}{5}v = \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} \iff \frac{28}{20}v - \frac{21}{20}v = \frac{35}{20} \iff 7v = 35 \iff v = 5\,,$$

після чого очевидним способом знаходяться всі шукані швидкості.

Задачі на рух

$$\begin{cases} v(t+\frac{2}{5}) = S_4\,, \\ \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} = S_4\,, \\ \frac{S_3}{S_4} = \frac{8}{7}\,, \\ \frac{15t}{5t+2} = \frac{S_3}{S_4} + 1 = \frac{8}{7} + 1 = \frac{15}{7}\,. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння

$$\frac{15t}{5t+2} = \frac{15}{7} \iff \frac{t}{5t+2} = \frac{1}{7} \iff \frac{7t-5t-2}{5t+2} = 0 \iff \frac{2t-2}{5t+2} = 0\,,$$

знаходимо $t = 1$.

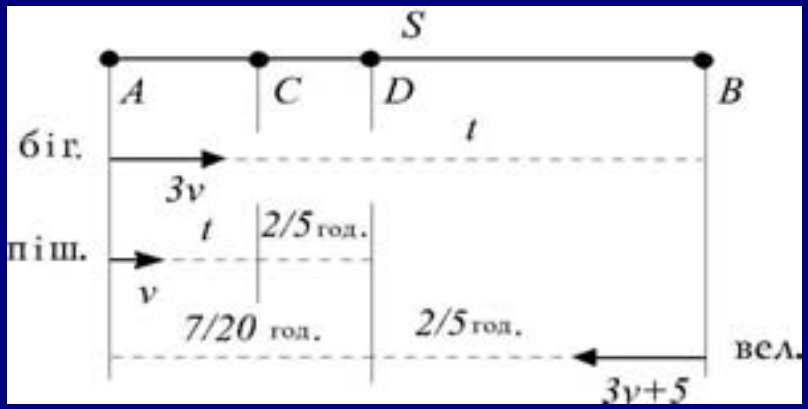
Тепер, підставляючи значення $t = 1$ в перше рівняння системи і прирівнюючи ліві частини першого і другого рівнянь, отримуємо

$$\frac{7}{5}v = \frac{21}{20}v + \frac{7}{4} \iff \frac{28}{20}v - \frac{21}{20}v = \frac{35}{20} \iff 7v = 35 \iff v = 5\,,$$

після чого очевидним способом знаходяться всі шукані швидкості.

Задачі на рух

3-й спосіб. Нарешті, розв'яжемо задачу за допомогою системи, що складається з трьох рівнянь.



Нехай S – відстань AB, а невідомі v і t, як і раніше, позначають швидкість пішохода і час руху бігуна.

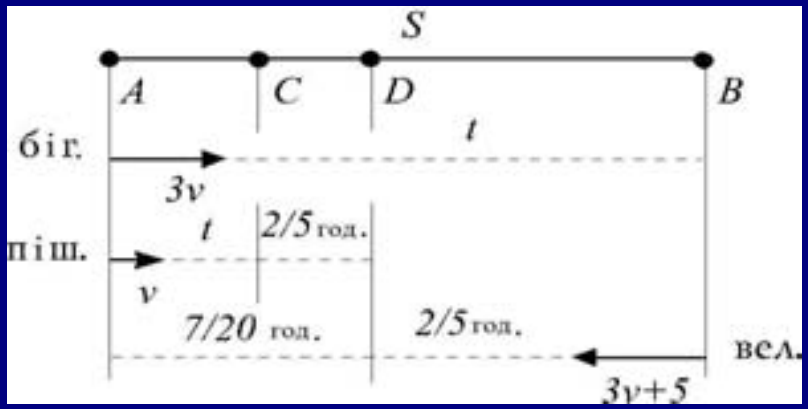
Для знаходження невідомих S, v і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S, \\ (\frac{7}{20} + \frac{2}{5})(3v+5) = S, \\ v(t+\frac{2}{5}) + \frac{2}{5}(3v+5) = S, \end{cases} \iff \begin{cases} 3vt = S, \\ \frac{9}{4}v + \frac{15}{4} = S, \\ vt + \frac{8}{5}v + 2 = S. \end{cases}$$

Домножаючи перше рівняння останньої системи на (-1), а третє рівняння на 3 і потім додаючи отримані рівняння, матимемо $\frac{24}{5}v + 6 = 2S \iff \frac{12}{5}v + 3 = S.$

Задачі на рух

3-й спосіб. Нарешті, розв'яжемо задачу за допомогою системи, що складається з трьох рівнянь.



Нехай S – відстань AB, а невідомі v і t, як і раніше, позначають швидкість пішохода і час руху бігуна.

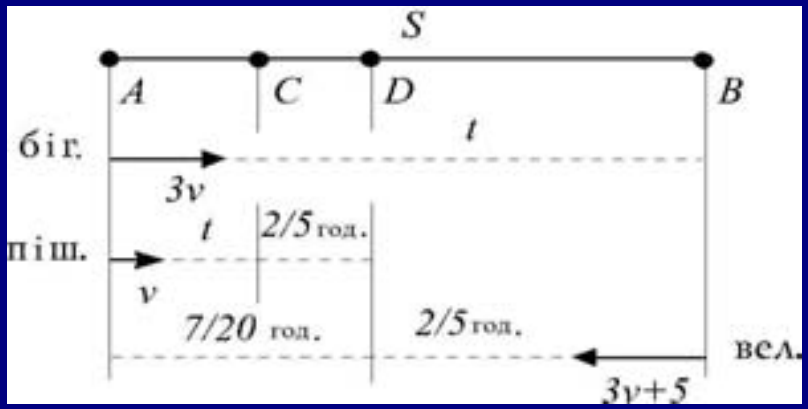
Для знаходження невідомих S, v і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S, \\ (\frac{7}{20} + \frac{2}{5})(3v+5) = S, \\ v(t+\frac{2}{5}) + \frac{2}{5}(3v+5) = S, \end{cases} \iff \begin{cases} 3vt = S, \\ \frac{9}{4}v + \frac{15}{4} = S, \\ vt + \frac{8}{5}v + 2 = S. \end{cases}$$

Домножаючи перше рівняння останньої системи на (-1), а третє рівняння на 3 і потім додаючи отримані рівняння, матимемо $\frac{24}{5}v + 6 = 2S \iff \frac{12}{5}v + 3 = S$.

Задачі на рух

3-й спосіб. Нарешті, розв'яжемо задачу за допомогою системи, що складається з трьох рівнянь.



Нехай S – відстань AB, а невідомі v і t, як і раніше, позначають швидкість пішохода і час руху бігуна.

Для знаходження невідомих S, v і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} 3vt = S, \\ (\frac{7}{20} + \frac{2}{5})(3v+5) = S, \\ v(t+\frac{2}{5}) + \frac{2}{5}(3v+5) = S, \end{cases} \iff \begin{cases} 3vt = S, \\ \frac{9}{4}v + \frac{15}{4} = S, \\ vt + \frac{8}{5}v + 2 = S. \end{cases}$$

Домножаючи перше рівняння останньої системи на (-1), а третє рівняння на 3 і потім додаючи отримані рівняння, матимемо $\frac{24}{5}v + 6 = 2S \iff \frac{12}{5}v + 3 = S.$

Задачі на рух

Замінюючи отриманим рівнянням $\frac{12}{5}v+3=S$ третє рівняння попередньої системи, отримуємо систему трьох рівнянь, рівносильну початковій системі:

$$\begin{cases} 3vt=S, \\ \frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=S, \\ \frac{12}{5}v+3=S, \end{cases}$$

з якої випливає рівняння

$$\frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=\frac{12}{5}v+3 \iff \frac{3}{4}v+\frac{5}{4}=\frac{4}{5}v+1 \iff$$

$$\iff \frac{5}{4}-1=\frac{4}{5}v-\frac{3}{4}v \iff \frac{1}{4}=\frac{16-15}{20}v \iff$$

$$\iff \frac{1}{4}=\frac{1}{20}v \iff v=5\,.$$

Тепер шукані швидкості легко обчислюються.

Відповідь: швидкості пішохода, бігуна і велосипедиста відповідно дорівнюють 5 км/год, 15 км/год і 20 км/год.

Задачі на рух

Замінюючи отриманим рівнянням $\frac{12}{5}v+3=S$ третє рівняння попередньої системи, отримуємо систему трьох рівнянь, рівносильну початковій системі:

$$\begin{cases} 3vt=S, \\ \frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=S, \\ \frac{12}{5}v+3=S, \end{cases}$$

з якої випливає рівняння

$$\frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=\frac{12}{5}v+3 \iff \frac{3}{4}v+\frac{5}{4}=\frac{4}{5}v+1 \iff$$
$$\iff \frac{5}{4}-1=\frac{4}{5}v-\frac{3}{4}v \iff \frac{1}{4}=\frac{16-15}{20}v \iff$$
$$\iff \frac{1}{4}=\frac{1}{20}v \iff v=5\,.$$

Тепер шукані швидкості легко обчислюються.

Відповідь: швидкості пішохода, бігуна і велосипедиста відповідно дорівнюють 5 км/год, 15 км/год і 20 км/год.

Задачі на рух

Замінюючи отриманим рівнянням $\frac{12}{5}v+3=S$ третє рівняння попередньої системи, отримуємо систему трьох рівнянь, рівносильну початковій системі:

$$\begin{cases} 3vt=S, \\ \frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=S, \\ \frac{12}{5}v+3=S, \end{cases}$$

з якої випливає рівняння

$$\frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=\frac{12}{5}v+3 \iff \frac{3}{4}v+\frac{5}{4}=\frac{4}{5}v+1 \iff$$
$$\iff \frac{5}{4}-1=\frac{4}{5}v-\frac{3}{4}v \iff \frac{1}{4}=\frac{16-15}{20}v \iff$$
$$\iff \frac{1}{4}=\frac{1}{20}v \iff v=5\,.$$

Тепер шукані швидкості легко обчислюються.

Відповідь: швидкості пішохода, бігуна і велосипедиста відповідно дорівнюють 5 км/год, 15 км/год і 20 км/год.

Задачі на рух

Замінюючи отриманим рівнянням $\frac{12}{5}v+3=S$ третє рівняння попередньої системи, отримуємо систему трьох рівнянь, рівносильну початковій системі:

$$\begin{cases} 3vt=S, \\ \frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=S, \\ \frac{12}{5}v+3=S, \end{cases}$$

з якої випливає рівняння

$$\frac{9}{4}v+\frac{15}{4}=\frac{12}{5}v+3 \iff \frac{3}{4}v+\frac{5}{4}=\frac{4}{5}v+1 \iff$$
$$\iff \frac{5}{4}-1=\frac{4}{5}v-\frac{3}{4}v \iff \frac{1}{4}=\frac{16-15}{20}v \iff$$
$$\iff \frac{1}{4}=\frac{1}{20}v \iff v=5\,.$$

Тепер шукані швидкості легко обчислюються.

Відповідь: швидкості пішохода, бігуна і велосипедиста відповідно дорівнюють 5 км/год, 15 км/год і 20 км/год.

Задачі на рух

Приклад 2. Велосипедист і мотоцикліст виїжджають назустріч один одному з пунктів A і B, причому швидкість мотоцикліста втричі більша швидкості велосипедиста, але він починає свій рух на 3 години пізніше, ніж велосипедист. Їх зустріч відбулася на середині шляху між A і B. Якщо б мотоцикліст виїхав всього лиш на 2 години пізніше велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до A. Знайти відстань AB.

Розв'язання. Зазначимо, що з умови задачі випливає, що мотоцикліст рухається з пункту B. Дійсно, у випадку, коли він виїжджає на 2 години пізніше велосипедиста, до зустрічі пропливає більший проміжок часу після виїзду мотоцикліста, ніж у випадку, коли він починає рух пізніше на 3 години. За цей більший проміжок часу мотоцикліст проїжджає більшу відстань і опиняється ближче до пункту A.

Задачі на рух

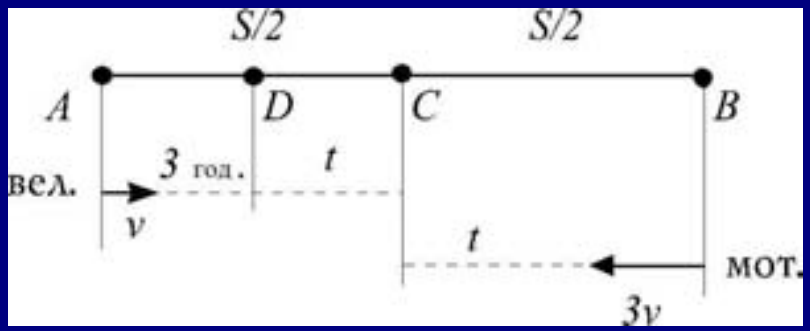
Приклад 2. Велосипедист і мотоцикліст виїжджають назустріч один одному з пунктів A і B, причому швидкість мотоцикліста втричі більша швидкості велосипедиста, але він починає свій рух на 3 години пізніше, ніж велосипедист. Їх зустріч відбулася на середині шляху між A і B. Якщо б мотоцикліст виїхав всього лиш на 2 години пізніше велосипедиста, то зустріч відбулася б на 15 км ближче до A. Знайти відстань AB.

Розв'язання. Зазначимо, що з умови задачі випливає, що мотоцикліст рухається з пункту B. Дійсно, у випадку, коли він виїжджає на 2 години пізніше велосипедиста, до зустрічі пропливає більший проміжок часу після виїзду мотоцикліста, ніж у випадку, коли він починає рух пізніше на 3 години. За цей більший проміжок часу мотоцикліст проїжджає більшу відстань і опиняється ближче до пункту A.

Задачі на рух

Позначимо через C середину шляху між A і B, а через D – пункт, в якому знаходиться велосипедист через 3 години після свого виїзду з пункта A.

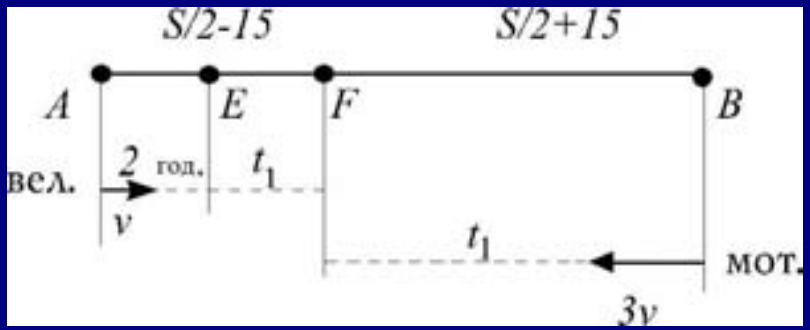
Нехай S – відстань AB, v – швидкість велосипедиста, $3v$ – швидкість мотоцикліста, t – час руху мотоцикліста до зустрічі (він також дорівнює часу руху велосипедиста по шляху DC).



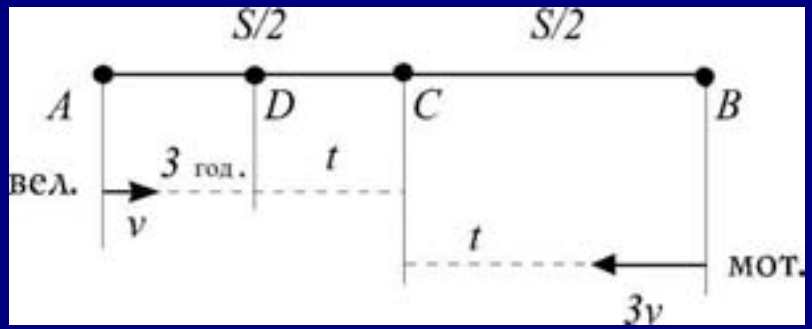
Задачі на рух

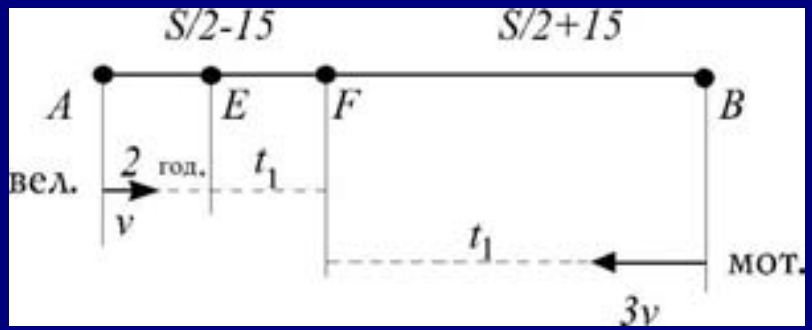
Позначимо також через E пункт, в якому знаходиться велосипедист через 2 години після свого виїзду з пункта A, а через F – місце зустрічі велосипедиста і мотоцикліста в тому випадку, коли мотоцикліст виїжджає всього лиш на 2 години пізніше, ніж велосипедист. Нехай t_1 – час руху мотоцикліста до зустрічі в цьому випадку (він також дорівнює часу руху велосипедиста по шляху EF).

Відзначимо, що оскільки відстань BE більша за відстань BC, то $t_1 > t$ (на цій нерівності базувався наведений на початку розв'язання висновок про те, що мотоцикліст рухається з пункта B).



Задачі на рух





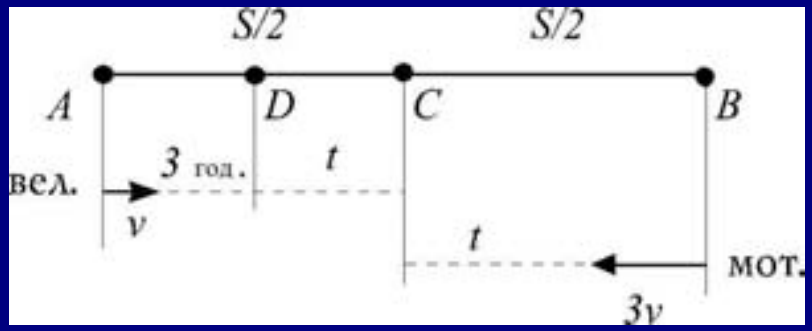
Отже, маємо чотири невідомих S, v, t і t_1, для знаходження яких очевидним способом отримуємо систему чотирьох рівнянь:

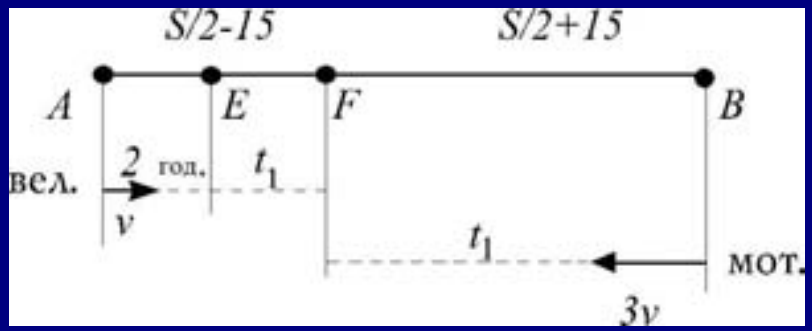
$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2-15, \\ 3vt_1 = S/2+15. \end{cases}$$

Виконуючи ділення першого рівняння системи на друге, отримуємо рівняння

$$\frac{t+3}{3t} = 1 \Longleftrightarrow \frac{3-2t}{3t} = 0 \Longleftrightarrow t = 3/2\,.$$

Задачі на рух





Отже, маємо чотири невідомих S, v, t і t_1, для знаходження яких очевидним способом отримуємо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2 - 15, \\ 3vt_1 = S/2 + 15. \end{cases}$$

Виконуючи ділення першого рівняння системи на друге, отримуємо рівняння

$$\frac{t+3}{3t} = 1 \Longleftrightarrow \frac{3-2t}{3t} = 0 \Longleftrightarrow t = 3/2\,.$$

Задачі на рух

Отже,

$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2-15, \\ 3vt_1 = S/2+15. \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3/2, \\ S = 6vt = 9v, \\ vt_1 + 2v = \frac{9}{2}v - 15, \\ 3vt_1 = \frac{9}{2}v + 15. \end{cases}$$

Домножаючи третє рівняння останньої системи на (-3) і додаючи його до четвертого рівняння, отримуємо

$$-6v = -\frac{27}{2}v + 45 + \frac{9}{2}v + 15 \iff -6v = -9v + 60 \iff$$

$$\iff 3v = 60 \iff v = 20\,,$$

після чого знаходимо шукану відстань

$S = 9v = 180$ (км).

Відповідь: 180 км.

Задачі на рух

Отже,

$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2-15, \\ 3vt_1 = S/2+15. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 3/2, \\ S = 6vt = 9v, \\ vt_1 + 2v = \frac{9}{2}v - 15, \\ 3vt_1 = \frac{9}{2}v + 15. \end{cases}$$

Домножаючи третє рівняння останньої системи на (-3) і додаючи його до четвертого рівняння, отримуємо

$$-6v = -\frac{27}{2}v + 45 + \frac{9}{2}v + 15 \Longleftrightarrow -6v = -9v + 60 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3v = 60 \Longleftrightarrow v = 20,$$

після чого знаходимо шукану відстань

$S = 9v = 180$ (км).

Відповідь: 180 км.

Задачі на рух

Отже,

$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2-15, \\ 3vt_1 = S/2+15. \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3/2, \\ S = 6vt = 9v, \\ vt_1 + 2v = \frac{9}{2}v - 15, \\ 3vt_1 = \frac{9}{2}v + 15. \end{cases}$$

Домножаючи третє рівняння останньої системи на (-3) і додаючи його до четвертого рівняння, отримуємо

$$-6v = -\tfrac{27}{2}v + 45 + \tfrac{9}{2}v + 15 \iff -6v = -9v + 60 \iff$$

$$\iff 3v = 60 \iff v = 20\,,$$

після чого знаходимо шукану відстань

$S = 9v = 180$ (км).

Відповідь: 180 км.

Задачі на рух

Отже,

$$\begin{cases} v(t+3) = S/2, \\ 3vt = S/2, \\ v(t_1+2) = S/2-15, \\ 3vt_1 = S/2+15. \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3/2, \\ S = 6vt = 9v, \\ vt_1 + 2v = \frac{9}{2}v - 15, \\ 3vt_1 = \frac{9}{2}v + 15. \end{cases}$$

Домножаючи третє рівняння останньої системи на (-3) і додаючи його до четвертого рівняння, отримуємо

$$-6v = -\tfrac{27}{2}v + 45 + \tfrac{9}{2}v + 15 \iff -6v = -9v + 60 \iff$$

$$\iff 3v = 60 \iff v = 20\,,$$

після чого знаходимо шукану відстань

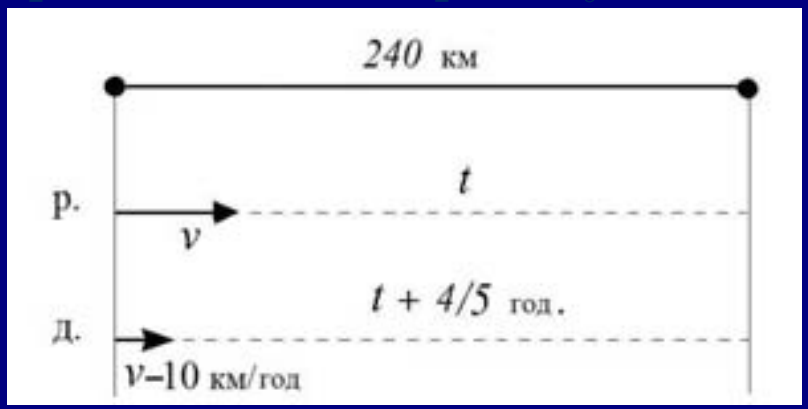
$S = 9v = 180$ (км).

Відповідь: 180 км.

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

Розв'язання. Нехай v – швидкість і t – час проходження перегону 240 км за розкладом.



Поїзд, рухаючись зі швидкістю $v-10$ км/год, запізнився на 48 хв.$=4/5$ години.

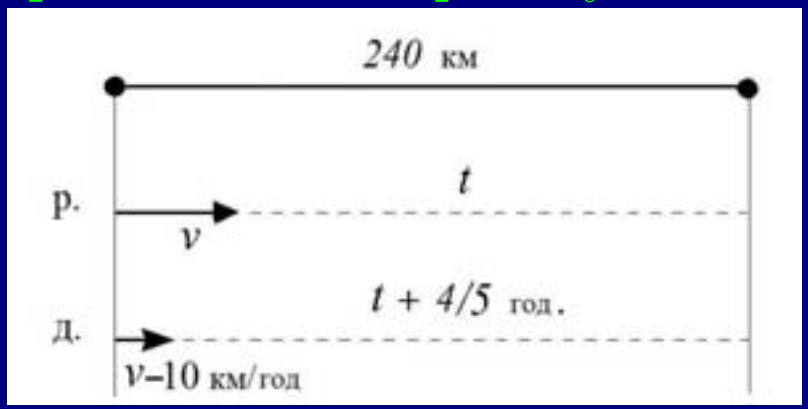
Тому для знаходження невідомих v і t отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} vt = 240, \\ (v-10)(t+\frac{4}{5}) = 240, \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

Розв'язання. Нехай v – швидкість і t – час проходження перегону 240 км за розкладом.



Поїзд, рухаючись зі швидкістю $v-10$ км/год, запізнився на 48 хв.$=4/5$ години.

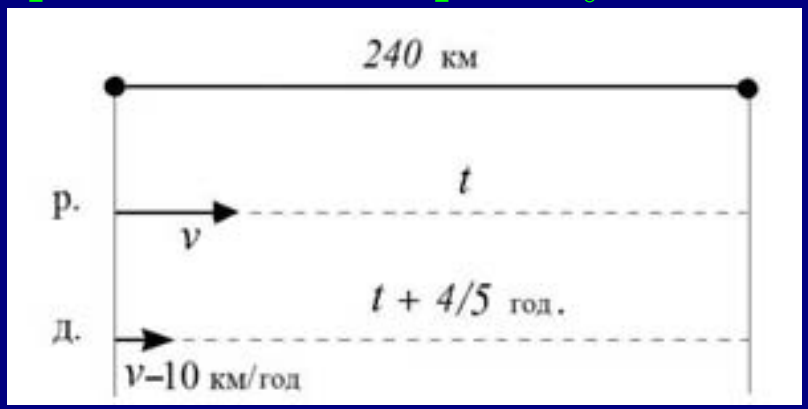
Тому для знаходження невідомих v і t отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} vt = 240, \\ (v-10)(t+\frac{4}{5}) = 240, \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). На перегоні, довжина якого дорівнює 240 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год менше, ніж мала бути за розкладом, і запізнився на 48 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

Розв'язання. Нехай v – швидкість і t – час проходження перегону 240 км за розкладом.



Поїзд, рухаючись зі швидкістю $v-10$ км/год, запізнився на 48 хв.$=4/5$ години.

Тому для знаходження невідомих v і t отримуємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} vt = 240, \\ (v-10)(t+\frac{4}{5}) = 240, \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Приклад із ЗНО

$$\begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ vt + \frac{4}{5}v - 10t - 8 = 240, & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} vt = 240, & \text{I} \\ -\frac{4}{5}v + 10t + 8 = 0. & \text{I} - \text{II} \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння останньої системи t:

$10t = \frac{4}{5}v - 8 \iff t = 0,08v - 0,8$

і підставляючи в перше рівняння системи, отримуємо квадратне рівняння для знаходження v:

$v(0,08v - 0,8) = 240 \iff 0,08v^2 - 0,8v = 240 \iff$

$\iff 0,01v^2 - 0,1v = 30 \iff v^2 - 10v - 3000 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} v = -50, \\ v = 60. \end{array} \right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $v = 60$ (км/год).

Відповідь: 60.

Задачі на спільну роботу

Задачі на спільну роботу аналогічні задачам на рух у тому сенсі, що при моделюванні цих задач використовуються аналогічні за своїм змістом параметри S, t, v (див. наведену тут таблицю), які зв'язані між собою співвідношенням $S = vt$.

Позначення	Назва в задачах на	
	спільну роботу	рух
S	кількість роботи	пройдений шлях
t	час	час
v	продуктивність праці	швидкість

Задачі на спільну роботу

Приклад 4. Два насоси марки A і один насос марки B наповнюють водою резервуар ємністю $200\,\text{м}^3$ за 10 годин при спільній роботі всіх трьох насосів. Насос марки B може наповнити цей резервуар на 8 год. 20 хв. швидше, ніж насос марки A. Скільки м^3 води за годину перекачують насоси марки A і B кожний окремо?

Розв'язання. Заповнимо таблицю

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продуктивність				
час роботи				

параметрами, які характеризують роботу насосів.

При цьому 8 год. 20 хв. $= 8\frac{1}{3}$ год. $= \frac{25}{3}$ год.

Задачі на спільну роботу

Приклад 4. Два насоси марки A і один насос марки B наповнюють водою резервуар ємністю $200\,\text{м}^3$ за 10 годин при спільній роботі всіх трьох насосів. Насос марки B може наповнити цей резервуар на 8 год. 20 хв. швидше, ніж насос марки A. Скільки м^3 води за годину перекачують насоси марки A і B кожний окремо?

Розв'язання. Заповнимо таблицю

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продуктивність				
час роботи				

параметрами, які характеризують роботу насосів.

При цьому 8 год. 20 хв. $= 8\frac{1}{3}$ год. $= \frac{25}{3}$ год.

Задачі на спільну роботу

Приклад 4. Два насоси марки A і один насос марки B наповнюють водою резервуар ємністю $200\,\text{м}^3$ за 10 годин при спільній роботі всіх трьох насосів. Насос марки B може наповнити цей резервуар на 8 год. 20 хв. швидше, ніж насос марки A. Скільки м^3 води за годину перекачують насоси марки A і B кожний окремо?

Розв'язання. Заповнимо таблицю

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продук-тивність				
час роботи				

параметрами, які характеризують роботу насосів.

При цьому 8 год. 20 хв. $= 8\frac{1}{3}$ год. $= \frac{25}{3}$ год.

Задачі на спільну роботу

Нехай за 1 годину насоси марки A і B перекачують відповідно v_A і v_B м^3 води, а насос марки B наповнює весь резервуар за t_B годин. В таблиці відображені три ситуації, що згадуються в умові задачі, а саме:

1) резервуар наповнюється усіма трьома насосами за 10 годин;
2) резервуар наповнюється лише одним насосом марки B;
3) резервуар наповнюється насосом марки A за $t_B + \frac{25}{3}$ години.

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продуктивність	v_A	v_A	v_B	$200\,\text{м}^3$
час роботи	10 год.	10 год.	10 год.	
продуктивність	—	—	v_B	$200\,\text{м}^3$
час роботи	—	—	t_B	
продуктивність	v_A	—	—	$200\,\text{м}^3$
час роботи	$t_B + \frac{25}{3}$	—	—	

Задачі на спільну роботу

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продуктивність	v_A	v_A	v_B	
час роботи	10 год.	10 год.	10 год.	$200\,\text{м}^3$
продуктивність	—	—	v_B	
час роботи	—	—	t_B	$200\,\text{м}^3$
продуктивність	v_A	—	—	
час роботи	$t_B + \frac{25}{3}$	—	—	$200\,\text{м}^3$

Отже, є три невідомих v_A, v_B і t_B,
для знаходження яких записуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_A \cdot 10 + v_A \cdot 10 + v_B \cdot 10 = 200, \\ v_B t_B = 200, \\ v_A\left(t_B + \frac{25}{3}\right) = 200, \end{cases} \iff \begin{cases} v_B = 20 - 2v_A\,, \\ t_B = \frac{200}{v_B} = \frac{100}{10 - v_A}\,, \\ v_A\left(\frac{100}{10 - v_A} + \frac{25}{3}\right) = 200\,. \end{cases}$$

Задачі на спільну роботу

	1-й насос (марки A)	2-й насос (марки A)	3-й насос (марки B)	кількість виконаної роботи
продуктивність	v_A	v_A	v_B	
час роботи	10 год.	10 год.	10 год.	$200\,\text{м}^3$
продуктивність	—	—	v_B	
час роботи	—	—	t_B	$200\,\text{м}^3$
продуктивність	v_A	—	—	
час роботи	$t_B + \frac{25}{3}$	—	—	$200\,\text{м}^3$

Отже, є три невідомих v_A, v_B і t_B,
для знаходження яких записуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_A \cdot 10 + v_A \cdot 10 + v_B \cdot 10 = 200, \\ v_B t_B = 200, \\ v_A(t_B + \frac{25}{3}) = 200, \end{cases} \iff \begin{cases} v_B = 20 - 2v_A\,, \\ t_B = \frac{200}{v_B} = \frac{100}{10 - v_A}\,, \\ v_A(\frac{100}{10 - v_A} + \frac{25}{3}) = 200\,. \end{cases}$$

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Розв'язуємо рівняння з невідомою v_A:

$$v_A\left(\frac{100}{10-v_A}+\frac{25}{3}\right)=200 \iff v_A\left(\frac{4}{10-v_A}+\frac{1}{3}\right)=8 \iff$$

$$\iff \frac{v_A(12+10-v_A)-24(10-v_A)}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{22v_A-v_A^2-240+24v_A}{3(10-v_A)}=0 \iff \frac{-v_A^2+46v_A-240}{3(10-v_A)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{v_A^2-46v_A+240}{10-v_A}=0 \iff \left[\begin{array}{l} v_A=6, \\ v_A=40. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що при $v_A=40$ маємо $v_B=20-2v_A=-60<0$, що, очевидно, не узгоджується зі змістом задачі.

Тому $v_A=6$ і $v_B=20-2v_A=8$.

Відповідь: насоси марки A і B за 1 годину перекачують відповідно 6 і 8 м^3 води.

Задачі на спільну роботу

Приклад 5. A виконує деяку роботу на 6 днів довше, ніж B, і на 8 днів довше, ніж C. A і B, працюючи разом, виконують цю роботу за стільки ж днів, що і C. Визначити час, за який кожен виконує цю роботу самостійно.

Розв'язання. Нехай S – кількість роботи, яку C виконує за t днів, а через v_1, v_2 і v_3 позначимо відповідно продуктивності праці A, B і C.

	A	B	C	кількість роботи
продуктивність	—	—	v_3	S
час роботи	—	—	t	
продуктивність	v_1	—	—	S
час роботи	$t+8$	—	—	
продуктивність	—	v_2	—	S
час роботи	—	$t+2$	—	
продуктивність	v_1	v_2	—	S
час роботи	t	t	—	

Задачі на спільну роботу

Приклад 5. A виконує деяку роботу на 6 днів довше, ніж B, і на 8 днів довше, ніж C. A і B, працюючи разом, виконують цю роботу за стільки ж днів, що і C. Визначити час, за який кожен виконує цю роботу самостійно.

Розв'язання. Нехай S – кількість роботи, яку C виконує за t днів, а через v_1, v_2 і v_3 позначимо відповідно продуктивності праці A, B і C.

	A	B	C	кількість роботи
продуктивність	—	—	v_3	S
час роботи	—	—	t	
продуктивність	v_1	—	—	S
час роботи	$t+8$	—	—	
продуктивність	—	v_2	—	S
час роботи	—	$t+2$	—	
продуктивність	v_1	v_2	—	S
час роботи	t	t	—	

Задачі на спільну роботу

	A	B	C	кількість роботи
продуктивність	—	—	v_3	S
час роботи	—	—	t	
продуктивність	v_1	—	—	S
час роботи	$t+8$	—	—	
продуктивність	—	v_2	—	S
час роботи	—	$t+2$	—	
продуктивність	v_1	v_2	—	S
час роботи	t	t	—	

Для знаходження невідомого часу t можна обмежитися чотирма невідомими: S, v_1, v_2 і t, співвідношення між якими утворюють систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Зауважимо, що системи, в яких кількість невідомих більша кількості рівнянь, як правило, мають нескінченну множину розв'язків.

Задачі на спільну роботу

	A	B	C	кількість роботи
продуктивність	—	—	v_3	S
час роботи	—	—	t	
продуктивність	v_1	—	—	S
час роботи	$t+8$	—	—	
продуктивність	—	v_2	—	S
час роботи	—	$t+2$	—	
продуктивність	v_1	v_2	—	S
час роботи	t	t	—	

Для знаходження невідомого часу t можна обмежитися чотирма невідомими: S, v_1, v_2 і t, співвідношення між якими утворюють систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Зауважимо, що системи, в яких кількість невідомих більша кількості рівнянь, як правило, мають нескінченну множину розв'язків.

Задачі на спільну роботу

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Не зважаючи на це, шуканий в задачі час t знаходиться однозначно (при будь-якій невідомій кількості роботи S). В цьому можна переконатися, якщо розв'язати систему як систему з параметром S.

Для спрощення подібних систем кількість виконаної роботи в задачах можна вважати рівною умовній одиниці, тобто покласти $S = 1$.
Після такої домовленості система перетворюється в систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = 1, \\ v_2(t+2) = 1, \\ v_1 t + v_2 t = 1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t+8}, \\ v_2 = \frac{1}{t+2}, \\ \frac{t}{t+8} + \frac{t}{t+2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$\frac{t}{(t+8)} + \frac{t}{(t+2)} = 1 \Longleftrightarrow \frac{t(t+2) + t(t+8) - (t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)} = 0 \Longleftrightarrow$$

Задачі на спільну роботу

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Не зважаючи на це, шуканий в задачі час t знаходиться однозначно (при будь-якій невідомій кількості роботи S). В цьому можна переконатися, якщо розв'язати систему як систему з параметром S.

Для спрощення подібних систем кількість виконаної роботи в задачах можна вважати рівною умовній одиниці, тобто покласти $S = 1$.

Після такої домовленості система перетворюється в систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = 1, \\ v_2(t+2) = 1, \\ v_1 t + v_2 t = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t+8}, \\ v_2 = \frac{1}{t+2}, \\ \frac{t}{t+8} + \frac{t}{t+2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$\frac{t}{(t+8)} + \frac{t}{(t+2)} = 1 \iff \frac{t(t+2) + t(t+8) - (t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)} = 0 \iff$$

Задачі на спільну роботу

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Не зважаючи на це, шуканий в задачі час t знаходиться однозначно (при будь-якій невідомій кількості роботи S). В цьому можна переконатися, якщо розв'язати систему як систему з параметром S.

Для спрощення подібних систем кількість виконаної роботи в задачах можна вважати рівною умовній одиниці, тобто покласти $S = 1$.

Після такої домовленості система перетворюється в систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = 1, \\ v_2(t+2) = 1, \\ v_1 t + v_2 t = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t+8}, \\ v_2 = \frac{1}{t+2}, \\ \frac{t}{t+8} + \frac{t}{t+2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$\frac{t}{(t+8)} + \frac{t}{(t+2)} = 1 \iff \frac{t(t+2) + t(t+8) - (t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)} = 0 \iff$$

Задачі на спільну роботу

$$\begin{cases} v_1(t+8) = S, \\ v_2(t+2) = S, \\ v_1 t + v_2 t = S. \end{cases}$$

Не зважаючи на це, шуканий в задачі час t знаходиться однозначно (при будь-якій невідомій кількості роботи S). В цьому можна переконатися, якщо розв'язати систему як систему з параметром S.

Для спрощення подібних систем кількість виконаної роботи в задачах можна вважати рівною умовній одиниці, тобто покласти $S = 1$.

Після такої домовленості система перетворюється в систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} v_1(t+8) = 1, \\ v_2(t+2) = 1, \\ v_1 t + v_2 t = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t+8}, \\ v_2 = \frac{1}{t+2}, \\ \frac{t}{t+8} + \frac{t}{t+2} = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$\frac{t}{(t+8)} + \frac{t}{(t+2)} = 1 \iff \frac{t(t+2) + t(t+8) - (t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)} = 0 \iff$$

Задачі на спільну роботу

$$\Longleftrightarrow \frac{t(t+2)+t(t+8)-(t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2+2t+t^2+8t+2-(t^2+2t+8t+16)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2-16}{(t+8)(t+2)}=0,$$

звідки маємо $t=4$ (оскільки в задачі $t>0$).

Отже, C виконує роботу за 4 дні, B – за $t+2=6$ днів, A – за $t+8=12$ днів.

Відповідь: C виконує роботу за 4 дні, B – за 6 днів, A – за 12 днів.

Задачі на спільну роботу

$$\Longleftrightarrow \frac{t(t+2)+t(t+8)-(t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2+2t+t^2+8t+2-(t^2+2t+8t+16)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2-16}{(t+8)(t+2)}=0,$$

звідки маємо $t=4$ (оскільки в задачі $t>0$).

Отже, C виконує роботу за 4 дні, B – за $t+2=6$ днів, A – за $t+8=12$ днів.

Відповідь: C виконує роботу за 4 дні, B – за 6 днів, A – за 12 днів.

Задачі на спільну роботу

$$\Longleftrightarrow \frac{t(t+2)+t(t+8)-(t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2+2t+t^2+8t+2-(t^2+2t+8t+16)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2-16}{(t+8)(t+2)}=0,$$

звідки маємо $t=4$ (оскільки в задачі $t>0$).

Отже, C виконує роботу за 4 дні, B – за $t+2=6$ днів, A – за $t+8=12$ днів.

Відповідь: C виконує роботу за 4 дні, B – за 6 днів, A – за 12 днів.

Задачі на спільну роботу

$$\Longleftrightarrow \frac{t(t+2)+t(t+8)-(t+8)(t+2)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2+2t+t^2+8t+2-(t^2+2t+8t+16)}{(t+8)(t+2)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{t^2-16}{(t+8)(t+2)}=0,$$

звідки маємо $t=4$ (оскільки в задачі $t>0$).

Отже, C виконує роботу за 4 дні, B – за $t+2=6$ днів, A – за $t+8=12$ днів.

Відповідь: C виконує роботу за 4 дні, B – за 6 днів, A – за 12 днів.

Приклад із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 години 6 хвилин. Скільки часу (у годинах) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 години більше, ніж першому робітникові?

Розв'язання. Нехай першому робітникові на виконання завдання (кількість якого вважаємо рівною умовній одиниці) необхідно t годин. Через v_1 і v_2 позначимо відповідно продуктивності праці першого і другого робітника. Працюючи разом, робітники виконують завдання за 2 години 6 хвилин$= 2,1$ години.

Заповнимо таблицю:

Приклад із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 години 6 хвилин. Скільки часу (у годинах) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 години більше, ніж першому робітникові?

Розв'язання. Нехай першому робітникові на виконання завдання (кількість якого вважаємо рівною умовній одиниці) необхідно t годин. Через v_1 і v_2 позначимо відповідно продуктивності праці першого і другого робітника. Працюючи разом, робітники виконують завдання за 2 години 6 хвилин$= 2,1$ години.

Заповнимо таблицю:

Приклад із ЗНО

	I-й	II-й	кількість роботи
продуктивність	v_1	v_2	1
час роботи	$2,1$ год.	$2,1$ год.	
продуктивність	v_1	—	1
час роботи	t	—	
продуктивність	—	v_2	1
час роботи	—	$t+4$	

Для знаходження невідомих v_1, v_2 і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 t = 1, \\ v_2(t+4) = 1, \\ 2,1v_1 + 2,1v_2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t}, \\ v_2 = \frac{1}{t+4}, \\ 2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1 \iff \frac{2,1(t+4+t) - t(t+4)}{t(t+4)} = 0 \iff$$

Приклад із ЗНО

	I-й	II-й	кількість роботи
продуктивність	v_1	v_2	1
час роботи	2,1 год.	2,1 год.	
продуктивність	v_1	—	1
час роботи	t	—	
продуктивність	—	v_2	1
час роботи	—	$t+4$	

Для знаходження невідомих v_1, v_2 і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 t = 1, \\ v_2(t+4) = 1, \\ 2,1v_1 + 2,1v_2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t}, \\ v_2 = \frac{1}{t+4}, \\ 2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1 \iff \frac{2,1(t+4+t) - t(t+4)}{t(t+4)} = 0 \iff$$

Приклад із ЗНО

	I-й	II-й	кількість роботи
продуктивність	v_1	v_2	1
час роботи	$2,1$ год.	$2,1$ год.	
продуктивність	v_1	—	1
час роботи	t	—	
продуктивність	—	v_2	1
час роботи	—	$t+4$	

Для знаходження невідомих v_1, v_2 і t отримуємо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} v_1 t = 1, \\ v_2(t+4) = 1, \\ 2,1v_1 + 2,1v_2 = 1. \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = \frac{1}{t}, \\ v_2 = \frac{1}{t+4}, \\ 2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуємо рівняння з невідомою t:

$$2,1\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+4}\right) = 1 \iff \frac{2,1(t+4+t) - t(t+4)}{t(t+4)} = 0 \iff$$

Приклад із ЗНО

$$\iff \frac{2,1(2t+4)-t(t+4)}{t(t+4)}=0 \iff \frac{4,2t+8,4-t^2-4t}{t(t+4)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-t^2+0,2t+8,4}{t(t+4)}=0 \iff \frac{t^2-0,2t-8,4}{t(t+4)}=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t=-2,8\,, \\ t=3\,. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $t=3$ (год.).

Отже, другий робітник виконує завдання за $t+4=7$ годин.

Відповідь: 7.

Приклад із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \frac{2,1(2t+4)-t(t+4)}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{4,2t+8,4-t^2-4t}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-t^2+0,2t+8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{t^2-0,2t-8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2,8\,, \\ t=3\,. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $t=3$ (год.).

Отже, другий робітник виконує завдання за $t+4=7$ годин.

Відповідь: 7.

Приклад із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \frac{2,1(2t+4)-t(t+4)}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{4,2t+8,4-t^2-4t}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-t^2+0,2t+8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{t^2-0,2t-8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2,8\,, \\ t=3\,. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $t=3$ (год.).

Отже, другий робітник виконує завдання за $t+4=7$ годин.

Відповідь: 7.

Приклад із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \frac{2,1(2t+4)-t(t+4)}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{4,2t+8,4-t^2-4t}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-t^2+0,2t+8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow \frac{t^2-0,2t-8,4}{t(t+4)}=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2,8\,, \\ t=3\,. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $t=3$ (год.).

Отже, другий робітник виконує завдання за $t+4=7$ годин.

Відповідь: 7.

Приклад із ЗНО

$$\iff \frac{2,1(2t+4)-t(t+4)}{t(t+4)}=0 \iff \frac{4,2t+8,4-t^2-4t}{t(t+4)}=0 \iff$$

$$\iff \frac{-t^2+0,2t+8,4}{t(t+4)}=0 \iff \frac{t^2-0,2t-8,4}{t(t+4)}=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} t=-2,8\,, \\ t=3\,. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє тільки додатнє значення $t=3$ (год.).

Отже, другий робітник виконує завдання за $t+4=7$ годин.

Відповідь: 7.