Теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 17 (частина перша)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

Для рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей стандартного вигляду використовуються теореми про рівносильні перетворення таких рівнянь і нерівностей.

Ці теореми можуть бути згруповані в блоки, кожний з яких повністю описує групу рівнянь і нерівностей, схожих за своїм виглядом.

Так, в Уроці 9 вже розглянуто блок теорем про корінь парного степеня.

Теореми про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей

Розглянемо також ряд інших теорем про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей.

Відзначимо, що кожна з теорем доводиться узагальненим методом інтервалів шляхом виділення і аналізу всіх можливих в кожній конкретній ситуації випадків, що істотно відрізняються між собою.

- Підкреслимо, що при викладенні навчального матеріалу увага слухачів фокусується на пастках, в які потрапляють абітурієнти внаслідок незнання теорем про рівносильні перетворення рівнянь і нерівностей, що часто є результатом зневажливого ставлення до необхідності їх систематичного вивчення.

Теореми про добуток функцій

Теорема 1.

$$f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in D(f)\bigcap D(g) \quad \text{(ОДЗ)}, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

де через $D(f)$ і $D(g)$ позначені відповідно області визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$.
Таким чином, $D(f)\bigcap D(g)$ є областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння.

- Відзначимо, зокрема, що якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на всій множині дійсних чисел **R**, то $f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right.$ але, в загальному випадку без урахування областей визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$ таке перетворення рівнянь, як правило, приводить до появи зайвих коренів!

Теореми про добуток функцій

Теорема 1.

$$f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in D(f)\bigcap D(g) \quad \text{(ОДЗ)}, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

де через $D(f)$ і $D(g)$ позначені відповідно області визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$.
Таким чином, $D(f)\bigcap D(g)$ є областю допустимих значень (ОДЗ) рівняння.

- Відзначимо, зокрема, що якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на всій множині дійсних чисел $\mathbf{R}$, то $f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right.$ але, в загальному випадку без урахування областей визначення функцій $f(x)$ і $g(x)$ таке перетворення рівнянь, як правило, приводить до появи зайвих коренів!

Теореми про добуток функцій

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння
$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0 \iff \begin{cases} 2-x\ge 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ \sqrt{2-x}=0, \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right.$$

оскільки значення $x=4$ не задовольняє нерівність $2-x\ge 0$, що міститься в системі.

В і д п о в і д ь: $x\in\{-1;2\}$.

Теореми про добуток функцій

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0 \iff \begin{cases} 2-x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ \sqrt{2-x}=0, \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right.$$

оскільки значення $x=4$ не задовольняє нерівність $2-x\geq 0$, що міститься в системі.

Відповідь: $x\in\{-1;2\}$.

Теореми про добуток функцій

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0 \iff \begin{cases} 2-x\ge 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ \sqrt{2-x}=0, \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2-x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right.$$

оскільки значення $x=4$ не задовольняє нерівність $2-x\ge 0$, що міститься в системі.

Відповідь: $x\in\{-1;2\}$.

Теореми про добуток функцій

Приклад 1. Розв'язати рівняння
$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 отримуємо

$$(x^2-3x-4)\sqrt{2-x}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ \sqrt{2-x}=0, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-1, \\ x=2, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2, \end{array}\right.$$

оскільки значення $x=4$ не задовольняє нерівність $2-x\geq 0$, що міститься в системі.

Відповідь: $x\in\{-1;2\}$.

Теореми про добуток функцій

Теорема 2.

$$f(x)g(x)>0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$f(x)g(x)<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)g(x)>0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)g(x)<0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}<0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 3 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x>0, \\ \sqrt{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0, \\ \sqrt{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 2.

$$f(x)g(x)>0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$f(x)g(x)<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)g(x)>0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)g(x)<0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}<0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 3 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x>0, \\ \sqrt{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0, \\ \sqrt{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 2.

$$f(x)g(x) > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$f(x)g(x) < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2} < 0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 3 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2} < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x > 0, \\ \sqrt{x+2} < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x < 0, \\ \sqrt{x+2} > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 2.

$$f(x)g(x)>0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$f(x)g(x)<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)g(x)>0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)g(x)<0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}<0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 3 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x>0, \\ \sqrt{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0, \\ \sqrt{x+2}>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 2.

$$f(x)g(x)>0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)<0,\\ g(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$f(x)g(x)<0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)<0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)<0,\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)g(x)>0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)g(x)<0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків.

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}<0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 3 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}<0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x>0,\\ \sqrt{x+2}<0,\end{cases}\\ \begin{cases} 4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теореми про добуток функцій

Перша система сукупності

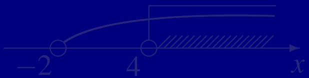
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x>0, \\ \sqrt{x+2}<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x<0, \\ \sqrt{x+2}>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

не має розв'язків, оскільки $\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow x \in \varnothing$.

Отже, залишається розв'язати другу систему:

$$\begin{cases} 4-x<0, \\ \sqrt{x+2}>0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4<x, \\ x+2>0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>4, & \mathrm{I} \\ x>-2. & \mathrm{II} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathrm{I}=(4,\infty)$ і $\mathrm{II}=(-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$\mathrm{I} \cap \mathrm{II}=(4,\infty)$

Відповідь: $x \in (4,\infty)$.

Теореми про добуток функцій

Перша система сукупності

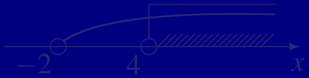
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x>0,\\ \sqrt{x+2}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0\end{cases}\end{array}\right.$$

не має розв'язків, оскільки $\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow x\in\varnothing$.

Отже, залишається розв'язати другу систему:

$$\begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}4<x,\\ x+2>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x>4, & \mathrm{I}\\ x>-2. & \mathrm{II}\end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathrm{I}=(4,\infty)$ і $\mathrm{II}=(-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=(4,\infty)$$

Відповідь: $x\in(4,\infty)$.

Теореми про добуток функцій

Перша система сукупності

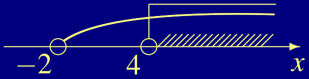
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x>0,\\ \sqrt{x+2}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0\end{cases}\end{array}\right.$$

не має розв'язків, оскільки $\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow x\in\varnothing$.

Отже, залишається розв'язати другу систему:

$$\begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}4<x,\\ x+2>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x>4, & \mathrm{I}\\ x>-2. & \mathrm{II}\end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathrm{I}=(4,\infty)$ і $\mathrm{II}=(-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=(4,\infty)$

Відповідь: $x\in(4,\infty)$.

Теореми про добуток функцій

Перша система сукупності

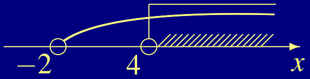
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x>0,\\ \sqrt{x+2}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0\end{cases}\end{array}\right.$$

не має розв'язків, оскільки $\sqrt{x+2}<0 \Longleftrightarrow x\in\varnothing$.

Отже, залишається розв'язати другу систему:

$$\begin{cases}4-x<0,\\ \sqrt{x+2}>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}4<x,\\ x+2>0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x>4, & \mathrm{I}\\ x>-2. & \mathrm{II}\end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathrm{I}=(4,\infty)$ і $\mathrm{II}=(-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=(4,\infty)$

Відповідь: $x\in(4,\infty)$.

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x \leq 0, \\ \sqrt{x+2} \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

$$\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x, \\ x+2 = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ x = -2, \end{cases} \Longleftrightarrow x = -2.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x \leq 0, \\ \sqrt{x+2} \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

$$\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x, \\ x+2 = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ x = -2, \end{cases} \Longleftrightarrow x = -2.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x)\geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 0,\\ g(x)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\leq 0,\\ g(x)\leq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x)\leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 0,\\ g(x)\leq 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\leq 0,\\ g(x)\geq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}\leq 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}\leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4-x\geq 0,\\ \sqrt{x+2}\leq 0,\end{cases}\\ \begin{cases} 4-x\leq 0,\\ \sqrt{x+2}\geq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

$$\begin{cases} 4-x\geq 0,\\ \sqrt{x+2}\leq 0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4\geq x,\\ x+2=0,\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\leq 4,\\ x=-2,\end{cases} \Longleftrightarrow x=-2.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x)\ge 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x)\le 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}\le 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}\le 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4-x\ge 0,\\ \sqrt{x+2}\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases} 4-x\le 0,\\ \sqrt{x+2}\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

$$\begin{cases} 4-x\ge 0,\\ \sqrt{x+2}\le 0,\end{cases} \iff \begin{cases} 4\ge x,\\ x+2=0,\end{cases} \iff \begin{cases} x\le 4,\\ x=-2,\end{cases} \iff x=-2.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x)\ge 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x)\le 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2}\le 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2}\le 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 4-x\ge 0,\\ \sqrt{x+2}\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases} 4-x\le 0,\\ \sqrt{x+2}\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

$$\begin{cases} 4-x\ge 0,\\ \sqrt{x+2}\le 0,\end{cases} \iff \begin{cases} 4\ge x,\\ x+2=0,\end{cases} \iff \begin{cases} x\le 4,\\ x=-2,\end{cases} \iff x=-2.$$

Теореми про добуток функцій

Теорема 4.

$$f(x)g(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$f(x)g(x) \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Порівнюючи з теоремами 2, 3, відзначаємо, що в теоремах 4, 5 функції $f(x)$ і $g(x)$ можуть обертатися в нуль.

П р и к л а д 3. Розв'язати нерівність $(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 5 отримуємо

$$(4-x)\sqrt{x+2} \leq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x \leq 0, \\ \sqrt{x+2} \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи першу систему сукупності, маємо

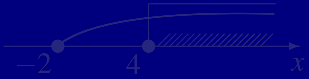
$$\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ \sqrt{x+2} \leq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x, \\ x+2 = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq 4, \\ x = -2, \end{cases} \Longleftrightarrow x = -2.$$

Теореми про добуток функцій

При розв'язанні другої системи сукупності отримуємо

$$\begin{cases} 4-x \le 0, \\ \sqrt{x+2} \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \le x, \\ x+2 \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 4, & \mathbf{I} \\ x \ge -2. & \mathbf{II} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathrm{I} = [4, \infty)$ і $\mathrm{II} = [-2, \infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [4, \infty)$$

Таким чином, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x \in [4, \infty), \end{array} \right. \iff x \in \{-2\} \cup [4, \infty).$$

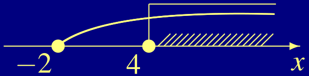
Відповідь: $x \in \{-2\} \cup [4, \infty)$.

Теореми про добуток функцій

При розв'язанні другої системи сукупності отримуємо

$$\begin{cases} 4 - x \le 0, \\ \sqrt{x+2} \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \le x, \\ x+2 \ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 4, & \mathbf{I} \\ x \ge -2. & \mathbf{II} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathbf{I} = [4, \infty)$ і $\mathbf{II} = [-2, \infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = [4, \infty)$$

Таким чином, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x \in [4, \infty), \end{array} \right. \iff x \in \{-2\} \cup [4, \infty).$$

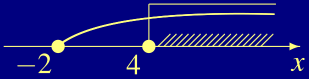
Відповідь: $x \in \{-2\} \cup [4, \infty)$.

Теореми про добуток функцій

При розв'язанні другої системи сукупності отримуємо

$$\begin{cases} 4-x\le 0, \\ \sqrt{x+2}\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4\le x, \\ x+2\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 4, & \mathbf{I} \\ x\ge -2. & \mathbf{II} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathbf{I}=[4,\infty)$ і $\mathbf{II}=[-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$\mathbf{I}\cap\mathbf{II}=[4,\infty)$

Таким чином, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x\in[4,\infty), \end{array}\right. \iff x\in\{-2\}\cup[4,\infty).$$

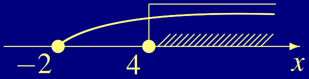
Відповідь: $x\in\{-2\}\cup[4,\infty)$.

Теореми про добуток функцій

При розв'язанні другої системи сукупності отримуємо

$$\begin{cases} 4-x\le 0, \\ \sqrt{x+2}\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 4\le x, \\ x+2\ge 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x\ge 4, & \mathbf{I} \\ x\ge -2. & \mathbf{II} \end{cases}$$

Перетинаючи множини $\mathbf{I}=[4,\infty)$ і $\mathbf{II}=[-2,\infty)$, знаходимо розв'язки системи:



$\mathbf{I}\cap\mathbf{II}=[4,\infty)$

Таким чином, приходимо до сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x\in[4,\infty), \end{array}\right. \iff x\in\{-2\}\cup[4,\infty)\,.$$

В і д п о в і д ь: $x\in\{-2\}\cup[4,\infty)\,.$

Теореми про частку двох функцій

Теорема 1.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Слід звернути увагу на необхідність правильного розв'язання нерівностей вигляду $g(x) \neq 0$.

- Так, щоб розв'язати нерівність $g(x) \neq 0$, потрібно з області визначення цієї функції (!) виключити ті значення x, при яких $g(x) = 0$.

Наприклад, $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \not\Longleftrightarrow x \neq 1$ (!), оскільки

$$\sqrt{x} \neq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Теореми про частку двох функцій

Теорема 1.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Слід звернути увагу на необхідність правильного розв'язання нерівностей вигляду $g(x) \neq 0$.

- Так, щоб розв'язати нерівність $g(x) \neq 0$, потрібно з області визначення цієї функції (!) виключити ті значення x, при яких $g(x) = 0$.

Наприклад, $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \not\Longleftrightarrow x \neq 1$ (!), оскільки

$$\sqrt{x} \neq 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Теореми про частку двох функцій

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2=1, \\ \sqrt{x}\neq 1, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x\neq 1. \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\varnothing$$

(оскільки корінь $x=1$ рівняння $x^2=1$, очевидно, не задовольняє нерівність $x\neq 1$, а корінь $x=-1$ того ж рівняння не задовольняє нерівність $x\geq 0$).

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Теореми про частку двох функцій

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0 \iff \begin{cases} x^2-1=0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=1, \\ \sqrt{x}\neq 1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=\pm 1, \\ x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x\neq 1. \end{cases} \iff x\in\varnothing$$

(оскільки корінь $x=1$ рівняння $x^2=1$, очевидно, не задовольняє нерівність $x\neq 1$, а корінь $x=-1$ того ж рівняння не задовольняє нерівність $x\geq 0$).

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Теореми про частку двох функцій

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2=1, \\ \sqrt{x}\neq 1, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x\neq 1. \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\varnothing$$

(оскільки корінь $x=1$ рівняння $x^2=1$, очевидно, не задовольняє нерівність $x\neq 1$, а корінь $x=-1$ того ж рівняння не задовольняє нерівність $x\geq 0$).

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Теореми про частку двох функцій

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0 \iff \begin{cases} x^2-1=0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=1, \\ \sqrt{x}\neq 1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=\pm 1, \\ x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x\neq 1. \end{cases} \iff x\in\varnothing$$

(оскільки корінь $x=1$ рівняння $x^2=1$, очевидно, не задовольняє нерівність $x\neq 1$, а корінь $x=-1$ того ж рівняння не задовольняє нерівність $x\geq 0$).

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Теореми про частку двох функцій

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=0 \iff \begin{cases} x^2-1=0, \\ \sqrt{x}-1\neq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=1, \\ \sqrt{x}\neq 1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x=\pm 1, \\ x\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ x\neq 1. \end{cases} \iff x\in\varnothing$$

(оскільки корінь $x=1$ рівняння $x^2=1$, очевидно, не задовольняє нерівність $x\neq 1$, а корінь $x=-1$ того ж рівняння не задовольняє нерівність $x\geq 0$).

Відповідь: $x\in\varnothing$.

Теореми про частку двох функцій

Теорема 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 5.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)/g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)/g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків. Крім того, в теоремах 4, 5 функція $f(x)$ може обертатися в нуль.

Теореми про частку двох функцій

Теорема 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 4.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)/g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)/g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків. Крім того, в теоремах 4, 5 функція $f(x)$ може обертатися в нуль.

Теореми про частку двох функцій

Теорема 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 5.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)/g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)/g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків. Крім того, в теоремах 4, 5 функція $f(x)$ може обертатися в нуль.

Теореми про частку двох функцій

Теорема 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теорема 5.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)/g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)/g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків. Крім того, в теоремах 4, 5 функція $f(x)$ може обертатися в нуль.

Теореми про частку двох функцій

Теорема 2.

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 3.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 4.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема 5.

$$\frac{f(x)}{g(x)} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для доведення теорем 2, 3 достатньо зазначити, що для виконання нерівності $f(x)/g(x) > 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути одного знаку (тобто обидва додатні або обидва від'ємні), а для виконання нерівності $f(x)/g(x) < 0$ значення $f(x)$ і $g(x)$ повинні бути різних знаків. Крім того, в теоремах 4, 5 функція $f(x)$ може обертатися в нуль.

Теореми про модуль

Теорема 1.

$$|f(x)| = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 1.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) < 0$, а на другій – виконується нерівність $g(x) \geq 0$. Оскільки модуль $|f(x)|$ не приймає від'ємних значень, то, очевидно, що рівняння $|f(x)| = g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) < 0$. На іншій її частині, де $g(x) \geq 0$, у відповідності з геометричним змістом модуля розв'язками рівняння $|f(x)| = g(x)$ будуть ті x, для яких $f(x) = \pm g(x)$. Теорему доведено.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|2x-2| = 2+2x-x^2$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Теореми про модуль

Теорема 1.

$$|f(x)| = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 1.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) < 0$, а на другій – виконується нерівність $g(x) \geq 0$. Оскільки модуль $|f(x)|$ не приймає від'ємних значень, то, очевидно, що рівняння $|f(x)| = g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) < 0$. На іншій її частині, де $g(x) \geq 0$, у відповідності з геометричним змістом модуля розв'язками рівняння $|f(x)| = g(x)$ будуть ті x, для яких $f(x) = \pm g(x)$. Теорему доведено.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $|2x-2| = 2+2x-x^2$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Теореми про модуль

Теорема 1.

$$|f(x)| = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 1.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) < 0$, а на другій – виконується нерівність $g(x) \geq 0$. Оскільки модуль $|f(x)|$ не приймає від'ємних значень, то, очевидно, що рівняння $|f(x)| = g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) < 0$. На іншій її частині, де $g(x) \geq 0$, у відповідності з геометричним змістом модуля розв'язками рівняння $|f(x)| = g(x)$ будуть ті x, для яких $f(x) = \pm g(x)$. Теорему доведено.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $|2x-2| = 2+2x-x^2$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Теореми про модуль

Теорема 1.

$$|f(x)| = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 1.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) < 0$, а на другій – виконується нерівність $g(x) \geq 0$. Оскільки модуль $|f(x)|$ не приймає від'ємних значень, то, очевидно, що рівняння $|f(x)| = g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) < 0$. На іншій її частині, де $g(x) \geq 0$, у відповідності з геометричним змістом модуля розв'язками рівняння $|f(x)| = g(x)$ будуть ті x, для яких $f(x) = \pm g(x)$. Теорему доведено.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|2x-2| = 2+2x-x^2$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Теореми про модуль

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2) \,. \end{array} \right. \end{cases}$$

Відзначимо, що якщо система містить нерівності і хоча б одне рівняння, то зазвичай ці нерівності можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми розв'яжемо сукупність двох рівнянь і перевіримо, які з їх коренів задовольняють нерівність, а які – не задовольняють.

Маємо

$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2\,.$

$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$

$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0$ і $x_2 = 4\,.$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x=0$ і $x=2\,.$

Відповідь: $x \in \{0;2\}\,.$

Теореми про модуль

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \begin{cases} 2+2x-x^2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array} \right. \end{cases}$$

Відзначимо, що якщо система містить нерівності і хоча б одне рівняння, то зазвичай ці нерівності можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми розв'яжемо сукупність двох рівнянь і перевіримо, які з їх коренів задовольняють нерівність, а які – не задовольняють. Маємо

$$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

$$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$$

$$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0 \text{ і } x_2 = 4.$$

Нерівність $2+2x-x^2 \geq 0$ задовольняють тільки два корені: $x = 0$ і $x = 2$.

Відповідь: $x \in \{0;2\}$.

Теореми про модуль

$$|2x-2| = 2+2x-x^2 \iff \left\{\begin{array}{l} 2+2x-x^2 \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-2 = 2+2x-x^2, \\ 2x-2 = -(2+2x-x^2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Відзначимо, що якщо система містить нерівності і хоча б одне рівняння, то зазвичай ці нерівності можна не розв'язувати. Так, в нашому прикладі ми розв'яжемо сукупність двох рівнянь і перевіримо, які з їх коренів задовольняють нерівність, а які – не задовольняють. Маємо

$$2x-2 = 2+2x-x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

$$2x-2 = -(2+2x-x^2) \iff 2x-2 = x^2-2x-2 \iff$$

$$\iff x^2-4x = 0 \iff x_1 = 0 \ \text{і} \ x_2 = 4.$$

Нерівність $2+2x-x^2 \ge 0$ задовольняють тільки два корені: $x = 0$ і $x = 2$.

В і д п о в і д ь: $x \in \{0; 2\}$.

Теореми про модуль

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$|x+2-|7-x||=4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|x+2-|7-x||=4-x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-|7-x|=4-x, \\ x+2-|7-x|=-(4-x), \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-4+x=|7-x|, \\ x+2+4-x=|7-x|, \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x|=2x-2, \\ |7-x|=6. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Тепер кожне з рівнянь сукупності може бути розв'язане за допомогою наведеної вище теореми 1.

Теореми про модуль

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$|x+2-|7-x||=4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|x+2-|7-x||=4-x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-|7-x|=4-x, \\ x+2-|7-x|=-(4-x), \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-4+x=|7-x|, \\ x+2+4-x=|7-x|, \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x|=2x-2, \\ |7-x|=6. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Тепер кожне з рівнянь сукупності може бути розв'язане за допомогою наведеної вище теореми 1.

Теореми про модуль

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$|x+2-|7-x||=4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

$$|x+2-|7-x||=4-x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-|7-x|=4-x, \\ x+2-|7-x|=-(4-x), \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-4+x=|7-x|, \\ x+2+4-x=|7-x|, \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x|=2x-2, \\ |7-x|=6. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Тепер кожне з рівнянь сукупності може бути розв'язане за допомогою наведеної вище теореми 1.

Теореми про модуль

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$|x+2-|7-x||=4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 1 маємо

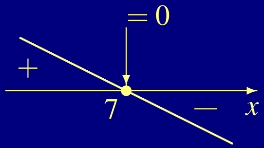
$$|x+2-|7-x||=4-x \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-|7-x|=4-x, \\ x+2-|7-x|=-(4-x), \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x+2-4+x=|7-x|, \\ x+2+4-x=|7-x|, \end{array}\right. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x|=2x-2, \\ |7-x|=6. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Тепер кожне з рівнянь сукупності може бути розв'язане за допомогою наведеної вище теореми 1.

Теореми про модуль

Наразі ми помітимо, що на проміжку $(-\infty, 4]$ (тобто при умові $x \le 4$ системи) вираз $7-x$ є додатнім, див. криву знаків функції $y = 7-x$:



Тому при $x \le 4$ виконується рівність $|7-x| = 7-x$, з урахуванням якої рівняння сукупності спрощуються, так що маємо:

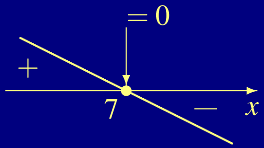
$$\begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x| = 2x-2, \\ |7-x| = 6. \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} 7-x = 2x-2, \\ 7-x = 6, \end{array} \right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Відповідь: $x \in \{3;1\}$.

Теореми про модуль

Наразі ми помітимо, що на проміжку $(-\infty, 4]$ (тобто при умові $x \le 4$ системи) вираз $7-x$ є додатнім, див. криву знаків функції $y = 7-x$:



Тому при $x \le 4$ виконується рівність $|7-x| = 7-x$, з урахуванням якої рівняння сукупності спрощуються, так що маємо:

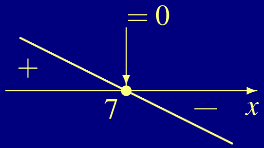
$$\begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x| = 2x-2, \\ |7-x| = 6. \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} 7-x = 2x-2, \\ 7-x = 6, \end{array} \right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Відповідь: $x \in \{3; 1\}$.

Теореми про модуль

Наразі ми помітимо, що на проміжку $(-\infty, 4]$ (тобто при умові $x \le 4$ системи) вираз $7 - x$ є додатнім, див. криву знаків функції $y = 7 - x$:



Тому при $x \le 4$ виконується рівність $|7 - x| = 7 - x$, з урахуванням якої рівняння сукупності спрощуються, так що маємо:

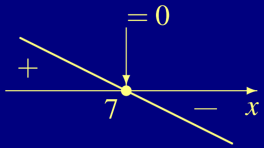
$$\begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7-x| = 2x-2, \\ |7-x| = 6. \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \le 4, \\ \left[\begin{array}{l} 7-x = 2x-2, \\ 7-x = 6, \end{array} \right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

В і д п о в і д ь: $x \in \{3; 1\}$.

Теореми про модуль

Наразі ми помітимо, що на проміжку $(-\infty, 4]$ (тобто при умові $x \leq 4$ системи) вираз $7 - x$ є додатнім, див. криву знаків функції $y = 7 - x$:



Тому при $x \leq 4$ виконується рівність $|7 - x| = 7 - x$, з урахуванням якої рівняння сукупності спрощуються, так що маємо:

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} |7 - x| = 2x - 2, \\ |7 - x| = 6. \end{array} \right. \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 4, \\ \left[\begin{array}{l} 7 - x = 2x - 2, \\ 7 - x = 6, \end{array} \right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array} \right.$$

Відповідь: $x \in \{3; 1\}$.

Теореми про модуль

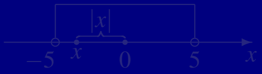
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

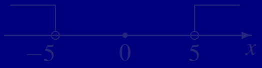
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \iff -5 < x < 5 \iff \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \iff x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \ge g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

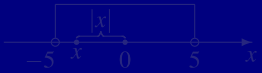
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

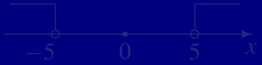
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \Longleftrightarrow -5 < x < 5 \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \leq g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \geq g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

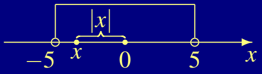
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

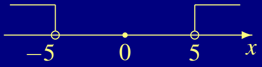
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \iff -5 < x < 5 \iff \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \iff x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \ge g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

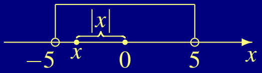
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

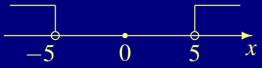
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \iff -5 < x < 5 \iff \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \iff x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

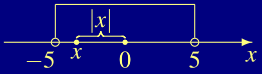
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

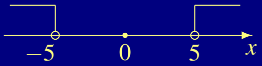
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \iff -5 < x < 5 \iff \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \iff x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \iff \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

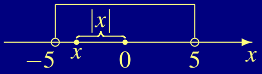
Теорема 2.

$$|f(x)| < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

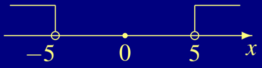
Теорема 3.

$$|f(x)| > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Відзначимо корисні для запам'ятовування теорем 2, 3 аналогії:



$$|x| < 5 \Longleftrightarrow -5 < x < 5 \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > -5; \end{cases}$$



$$|x| > 5 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -5. \end{array} \right.$$

Теорема 4.

$$|f(x)| \leq g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Теорема 5.

$$|f(x)| \geq g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right.$$

Теореми 4, 5 аналогічні відповідно теоремам 2, 3, але при цьому всі нерівності є нестрогими.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2|<4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2|<4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>-(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x<6, \\ x-2+4-x>0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ 2>0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3).$$

Відповідь: $x\in(-\infty,3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2|\geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2|\geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 4-x, \\ x-2\leq -(4-x), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq 6, \\ x-2+4-x\leq 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ 2\leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[3,\infty), \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in[3,\infty).$$

Відповідь: $x\in[3,\infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2|<4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2|<4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>-(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x<6, \\ x-2+4-x>0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ 2>0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3).$$

Відповідь: $x\in(-\infty,3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2|\geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2|\geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 4-x, \\ x-2\leq -(4-x), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq 6, \\ x-2+4-x\leq 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ 2\leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[3,\infty), \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in[3,\infty).$$

Відповідь: $x\in[3,\infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2| < 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2| < 4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2 < 4-x, \\ x-2 > -(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x < 6, \\ x-2+4-x > 0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 2 > 0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2| \geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2| \geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4-x, \\ x-2 \leq -(4-x), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 6, \\ x-2+4-x \leq 0, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2 \leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [3, \infty), \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in [3, \infty).$$

Відповідь: $x \in [3, \infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2|<4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2|<4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>-(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x<6, \\ x-2+4-x>0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ 2>0 \quad (\text{істина}), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3).$$

Відповідь: $x\in(-\infty,3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2|\geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2|\geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 4-x, \\ x-2\leq -(4-x), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq 6, \\ x-2+4-x\leq 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ 2\leq 0 \quad (\text{хибне}), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[3,\infty), \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in[3,\infty).$$

Відповідь: $x\in[3,\infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2| < 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2| < 4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2 < 4-x, \\ x-2 > -(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x < 6, \\ x-2+4-x > 0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 2 > 0 \quad (\text{істина}), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2| \geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2| \geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4-x, \\ x-2 \leq -(4-x), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 6, \\ x-2+4-x \leq 0, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2 \leq 0 \quad (\text{хибне}), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [3, \infty), \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in [3, \infty).$$

Відповідь: $x \in [3, \infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2|<4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2|<4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>-(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x<6, \\ x-2+4-x>0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ 2>0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in(-\infty,3).$$

Відповідь: $x\in(-\infty,3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2|\geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2|\geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\geq 4-x, \\ x-2\leq -(4-x), \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x\geq 6, \\ x-2+4-x\leq 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ 2\leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[3,\infty), \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \Longleftrightarrow x\in[3,\infty).$$

Відповідь: $x\in[3,\infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2| < 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2| < 4-x \iff \begin{cases} x-2 < 4-x, \\ x-2 > -(4-x), \end{cases} \iff \begin{cases} 2x < 6, \\ x-2+4-x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x < 3, \\ 2 > 0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff x \in (-\infty, 3).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2| \geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2| \geq 4-x \iff \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4-x, \\ x-2 \leq -(4-x), \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x \geq 6, \\ x-2+4-x \leq 0, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2 \leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [3, \infty), \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in [3, \infty).$$

Відповідь: $x \in [3, \infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2| < 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2| < 4-x \Longleftrightarrow \begin{cases} x-2 < 4-x, \\ x-2 > -(4-x), \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x < 6, \\ x-2+4-x > 0, \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ 2 > 0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 3).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2| \geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2| \geq 4-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4-x, \\ x-2 \leq -(4-x), \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x \geq 6, \\ x-2+4-x \leq 0, \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2 \leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [3, \infty), \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in [3, \infty).$$

Відповідь: $x \in [3, \infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2| < 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2| < 4-x \iff \begin{cases} x-2 < 4-x, \\ x-2 > -(4-x), \end{cases} \iff \begin{cases} 2x < 6, \\ x-2+4-x > 0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x < 3, \\ 2 > 0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 3), \\ x \in \mathbf{R}, \end{cases} \iff x \in (-\infty, 3).$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2| \geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2| \geq 4-x \iff \left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4-x, \\ x-2 \leq -(4-x), \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x \geq 6, \\ x-2+4-x \leq 0, \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \geq 3, \\ 2 \leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in [3, \infty), \\ x \in \varnothing, \end{array} \right. \iff x \in [3, \infty).$$

Відповідь: $x \in [3, \infty)$.

Теореми про модуль

Приклад 7. Розв'язати нерівність $|x-2|<4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 2 маємо

$$|x-2|<4-x \iff \begin{cases} x-2<4-x, \\ x-2>-(4-x), \end{cases} \iff \begin{cases} 2x<6, \\ x-2+4-x>0, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x<3, \\ 2>0 \quad \text{(істина)}, \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty,3), \\ x\in\mathbf{R}, \end{cases} \iff x\in(-\infty,3).$$

Відповідь: $x\in(-\infty,3)$.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $|x-2|\geq 4-x$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 5 маємо

$$|x-2|\geq 4-x \iff \left[\begin{array}{l} x-2\geq 4-x, \\ x-2\leq -(4-x), \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x\geq 6, \\ x-2+4-x\leq 0, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ 2\leq 0 \quad \text{(хибне)}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\in[3,\infty), \\ x\in\varnothing, \end{array}\right. \iff x\in[3,\infty).$$

Відповідь: $x\in[3,\infty)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \iff (f(x))^2 = (g(x))^2 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \iff (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \le |g(x)| \iff (f(x))^2 \le (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \iff (x-3)^2 < (x-5)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \iff 4x < 16 \iff x < 4.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 4)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \iff (f(x))^2 = (g(x))^2 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array} \right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \iff (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \le |g(x)| \iff (f(x))^2 \le (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

П р и к л а д 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \iff (x-3)^2 < (x-5)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \iff 4x < 16 \iff x < 4.$$

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, 4)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \Longleftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \Longleftrightarrow (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \le |g(x)| \Longleftrightarrow (f(x))^2 \le (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

П р и к л а д 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \Longleftrightarrow (x-3)^2 < (x-5)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \Longleftrightarrow 4x < 16 \Longleftrightarrow x < 4.$$

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, 4)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \iff (f(x))^2 = (g(x))^2 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \iff (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \leq |g(x)| \iff (f(x))^2 \leq (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \iff (x-3)^2 < (x-5)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \iff 4x < 16 \iff x < 4.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 4)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \iff (f(x))^2 = (g(x))^2 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \iff (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \le |g(x)| \iff (f(x))^2 \le (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

П р и к л а д 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \iff (x-3)^2 < (x-5)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \iff 4x < 16 \iff x < 4.$$

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, 4)$.

Теореми про модулі

Теорема 6.

$$|f(x)| = |g(x)| \iff (f(x))^2 = (g(x))^2 \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Теорема 7.

$$|f(x)| < |g(x)| \iff (f(x))^2 < (g(x))^2.$$

Теорема 8.

$$|f(x)| \le |g(x)| \iff (f(x))^2 \le (g(x))^2.$$

Для доведення теорем 6 – 8 достатньо зазначити, що у випадку, коли обидві частини рівняння чи нерівності є невід'ємними, піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x-3| < |x-5|$.

Розв'язання. У відповідності з теоремою 7 отримуємо

$$|x-3| < |x-5| \iff (x-3)^2 < (x-5)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 6x + 9 < x^2 - 10x + 25 \iff 4x < 16 \iff x < 4.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, 4)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'яжіть рівняння $(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0$. У відповідь запишіть суму коренів.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ}, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

отримуємо

$$(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -15+8x-x^2 \geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-9=0, \\ \sqrt{-15+8x-x^2}=0, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15 \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=9, \\ x^2-8x+15=0, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15 \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 3, \\ x=3, \\ x=5, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'яжіть рівняння $(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0$. У відповідь запишіть суму коренів.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою

$$f(x)g(x)=0 \iff \begin{cases} x\in \text{ОДЗ}, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

отримуємо

$$(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0 \iff \begin{cases} -15+8x-x^2\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-9=0, \\ \sqrt{-15+8x-x^2}=0, \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2-8x+15\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=9, \\ x^2-8x+15=0, \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-8x+15\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 3, \\ x=3, \\ x=5, \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). Розв'яжіть рівняння $(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0$. У відповідь запишіть суму коренів.

Розв'язання. У відповідності з теоремою

$$f(x)g(x)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x\in \text{ОДЗ}, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \end{cases}$$

отримуємо

$$(x^2-9)\sqrt{-15+8x-x^2}=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -15+8x-x^2\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}), \\ \left[\begin{array}{l} x^2-9=0, \\ \sqrt{-15+8x-x^2}=0, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=9, \\ x^2-8x+15=0, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15\leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 3, \\ x=3, \\ x=5, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2-8x+15 \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3, \\ x=5, \end{array} \right. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=5, \end{array} \right.$$

оскільки значення $x=-3$ не задовольняє нерівність $x^2-8x+15 \le 0$, що міститься в системі.
Отже, задане рівняння має два корені: $x_1=3$ і $x_2=5$, а їх сума $x_1+x_2=3+5=8$.

Відповідь: 8.

Приклади із ЗНО

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15 \le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3, \\ x=5, \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=5, \end{array}\right.$$

оскільки значення $x=-3$ не задовольняє нерівність $x^2-8x+15 \le 0$, що міститься в системі.
Отже, задане рівняння має два корені: $x_1=3$ і $x_2=5$, а їх сума $x_1+x_2=3+5=8$.

Відповідь: 8.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть НАЙМЕНШЕ число a, при якому рівняння $\dfrac{x^2-x+a}{2x+3}=0$ має рівно один корінь.

Розв'язання. У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-x+a}{2x+3}=0 \iff \begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0. \end{cases}$$

Отримана система має рівно один розв'язок в наступних двох випадках: 1) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має єдиний корінь і цей корінь задовольняє нерівність системи; 2) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має два корені, але один з його коренів не задовольняє нерівність системи.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть НАЙМЕНШЕ число a, при якому рівняння $\dfrac{x^2-x+a}{2x+3}=0$ має рівно один корінь.

Розв'язання. У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-x+a}{2x+3}=0 \iff \begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0. \end{cases}$$

Отримана система має рівно один розв'язок в наступних двох випадках: 1) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має єдиний корінь і цей корінь задовольняє нерівність системи; 2) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має два корені, але один з його коренів не задовольняє нерівність системи.

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 11 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Вкажіть НАЙМЕНШЕ число a, при якому рівняння $\dfrac{x^2-x+a}{2x+3}=0$ має рівно один корінь.

Р о з в' я з а н н я. У відповідності з теоремою про рівність дробу нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \iff \begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$$

отримуємо

$$\frac{x^2-x+a}{2x+3}=0 \iff \begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0. \end{cases}$$

Отримана система має рівно один розв'язок в наступних двох випадках: 1) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має єдиний корінь і цей корінь задовольняє нерівність системи; 2) квадратне рівняння $x^2-x+a=0$ має два корені, але один з його коренів не задовольняє нерівність системи.

Приклади із ЗНО

Розглянемо кожний з вказаних випадків:

1) квадратне рівняння $x^2 - x + a = 0$ системи

$$\begin{cases} x^2 - x + a = 0, \\ 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

має єдиний корінь, якщо його дискримінант $D = 0$. Маємо $D = 1 - 4a$.

$$D = 0 \iff 1 - 4a = 0 \iff a = 1/4 = 0,25.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що при $a = 0,25$ корінь квадратного рівняння $x^2 - x + 0,25 = 0 \iff x = 0,5$ задовольняє нерівність $2x + 3 \neq 0$, тобто $x \neq -1,5$.

Отже, при $a = 0,25$ вказана система має єдиний розв'язок;

Приклади із ЗНО

Розглянемо кожний з вказаних випадків:

1) квадратне рівняння $x^2 - x + a = 0$ системи

$$\begin{cases} x^2 - x + a = 0, \\ 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

має єдиний корінь, якщо його дискримінант $D = 0$.
Маємо $D = 1 - 4a$.

$D = 0 \iff 1 - 4a = 0 \iff a = 1/4 = 0,25.$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що при $a = 0,25$ корінь квадратного рівняння $x^2 - x + 0,25 = 0 \iff x = 0,5$ задовольняє нерівність $2x + 3 \neq 0$, тобто $x \neq -1,5$.

Отже, при $a = 0,25$ вказана система має єдиний розв'язок;

Приклади із ЗНО

Розглянемо кожний з вказаних випадків:

1) квадратне рівняння $x^2 - x + a = 0$ системи

$$\begin{cases} x^2 - x + a = 0, \\ 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

має єдиний корінь, якщо його дискримінант $D = 0$.
Маємо $D = 1 - 4a$.

$D = 0 \iff 1 - 4a = 0 \iff a = 1/4 = 0,25.$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що при $a = 0,25$ корінь квадратного рівняння $x^2 - x + 0,25 = 0 \iff x = 0,5$ задовольняє нерівність $2x + 3 \neq 0$, тобто $x \neq -1,5$.

Отже, при $a = 0,25$ вказана система має єдиний розв'язок;

Приклади із ЗНО

Розглянемо кожний з вказаних випадків:

1) квадратне рівняння $x^2 - x + a = 0$ системи

$$\begin{cases} x^2 - x + a = 0, \\ 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

має єдиний корінь, якщо його дискримінант $D = 0$. Маємо $D = 1 - 4a$.

$$D = 0 \iff 1 - 4a = 0 \iff a = 1/4 = 0,25.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що при $a = 0,25$ корінь квадратного рівняння $x^2 - x + 0,25 = 0 \iff x = 0,5$ задовольняє нерівність $2x + 3 \neq 0$, тобто $x \neq -1,5$.

Отже, при $a = 0,25$ вказана система має єдиний розв'язок;

Приклади із ЗНО

2) знайдемо значення параметра a, при якому одним з коренів квадратного рівняння $x^2-x+a=0$ системи

$$\begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0. \end{cases}$$

є $x=-1,5$:

$(-1,5)^2+1,5+a=0 \iff 2,25+1,5+a=0 \iff a=-3,75$.

Переконаємося, що у випадку $a=-3,75$ вказана система дійсно має єдиний розв'язок.
В цьому випадку квадратне рівняння системи набуває вигляду $x^2-x-3,75=0$ і має два корені:
$x_1=-1,5$ і $x_2=2,5$, перший з яких не задовольняє нерівність $2x+3\neq 0$,
тобто при $a=-3,75$ система має єдиний розв'язок $x=2,5$.

Приклади із ЗНО

2) знайдемо значення параметра a, при якому одним з коренів квадратного рівняння $x^2-x+a=0$ системи

$$\begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0. \end{cases}$$

є $x=-1,5$:

$$(-1,5)^2+1,5+a=0 \iff 2,25+1,5+a=0 \iff a=-3,75.$$

Переконаємося, що у випадку $a=-3,75$ вказана система дійсно має єдиний розв'язок.
В цьому випадку квадратне рівняння системи набуває вигляду $x^2-x-3,75=0$ і має два корені:
$x_1=-1,5$ і $x_2=2,5$, перший з яких не задовольняє нерівність $2x+3\neq 0$,
тобто при $a=-3,75$ система має єдиний розв'язок $x=2,5$.

Приклади із ЗНО

Отже, задане рівняння, рівносильне наведеній тут системі:

$$\frac{x^2-x+a}{2x+3}=0 \iff \begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0, \end{cases}$$

має єдиний корінь тільки при двох значеннях параметра a: $a=0,25$ і $a=-3,75$, найменшим з яких є $a=-3,75$.

Відповідь: $-3,75$.

Приклади із ЗНО

Отже, задане рівняння, рівносильне наведеній тут системі:

$$\frac{x^2-x+a}{2x+3}=0 \iff \begin{cases} x^2-x+a=0, \\ 2x+3\neq 0, \end{cases}$$

має єдиний корінь тільки при двох значеннях параметра a: $a=0,25$ і $a=-3,75$, найменшим з яких є $a=-3,75$.

Відповідь: $-3,75$.