Стереометрія-2: Розв’язання задач методом введення допомоміжної невідомої

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 19

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення методів розв'язання задач стереометрії на прикладах розв'язання задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (див. Урок 7, частина перша).

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної невідомої.

Перший з цих методів розглянуто в Уроці 7.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення методів розв'язання задач стереометрії на прикладах розв'язання задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (див. Урок 7, частина перша).

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної невідомої.

Перший з цих методів розглянуто в Уроці 7.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення методів розв'язання задач стереометрії на прикладах розв'язання задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (див. Урок 7, частина перша).

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної невідомої.

Перший з цих методів розглянуто в Уроці 7.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення методів розв'язання задач стереометрії на прикладах розв'язання задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (див. Урок 7, частина перша).

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної невідомої.

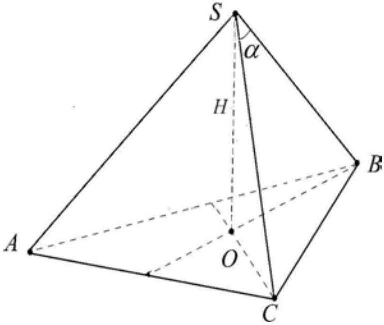
Перший з цих методів розглянуто в Уроці 7.

Метод введення допоміжної невідомої

- Задачі про знаходження параметрів тіл, які не вдається розв'язати методом послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач, можуть бути розв'язані методом введення допоміжної невідомої.

Характерні особливості цього методу розглянуто в Уроці 6 при розв'язанні планіметричних задач. В цьому уроці виклад методу доповнюється типовими прикладами розв'язання задач стереометрії.

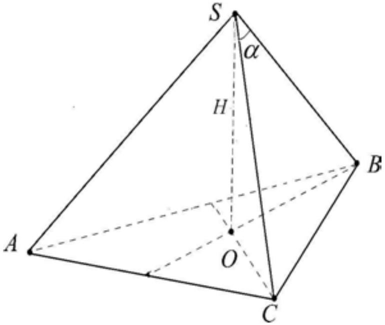
Метод введення допоміжної невідомої



Приклад 1. Висота правильної трикутної піраміди H, а плоский кут при вершині піраміди α. Знайти суму довжин усіх ребер піраміди.

Розв'язання. Відзначимо, що в задачі неможливо виділити жодного повністю визначеного трикутника. Таку задачу слід розв'язувати методом введення допоміжної невідомої.

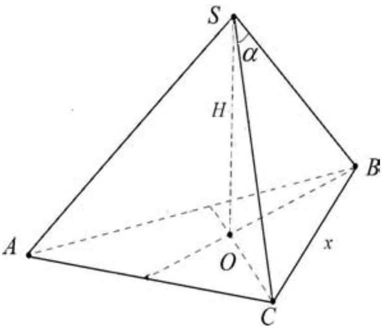
Метод введення допоміжної невідомої



Приклад 1. Висота правильної трикутної піраміди H, а плоский кут при вершині піраміди α. Знайти суму довжин усіх ребер піраміди.

Розв'язання. Відзначимо, що в задачі неможливо виділити жодного повністю визначеного трикутника. Таку задачу слід розв'язувати методом введення допоміжної невідомої.

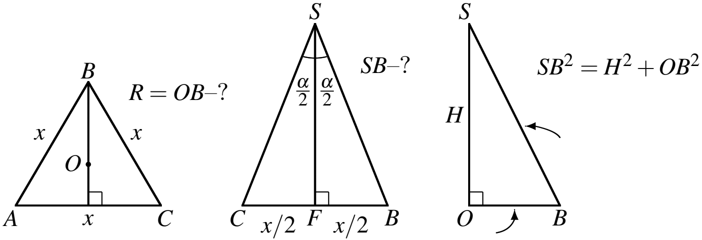
Метод введення допоміжної невідомої



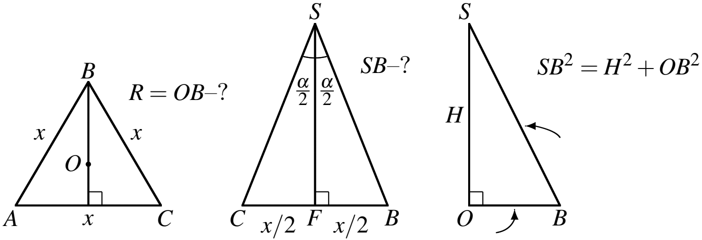
Нехай сторона основи піраміди $BC = x$. Тепер в рівносторонньому $\triangle ABC$ і в рівнобедреному $\triangle CSB$ через x можна виразити будь-які параметри.

Розглянемо також $\triangle SOB$, в якому $\angle SOB = 90^\circ$ і задано катет $SO = H$,

з метою складання рівняння для знаходження x.



Метод введення допоміжної невідомої



Цю мету буде досягнуто в результаті виконання наступних кроків:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо $OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в рівнобедреному $\triangle SBC$ виражаємо SB:

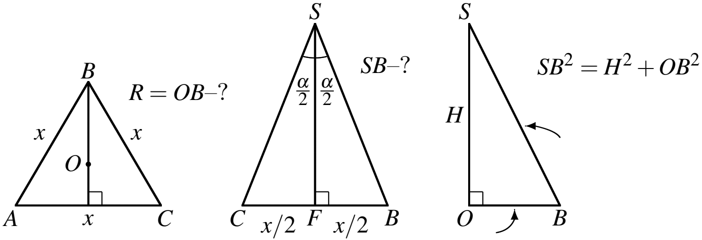
$\frac{FB}{SB} = \sin\frac{\alpha}{2}$ (тут F – середина сторони BC), звідки

$SB = \frac{FB}{\sin(\alpha/2)} = \frac{x}{2\sin(\alpha/2)}$;

3) записуючи теорему Піфагора $SB^2 = SO^2 + OB^2$ для трикутника SOB, отримуємо рівняння

$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3}$.

Метод введення допоміжної невідомої



Цю мету буде досягнуто в результаті виконання наступних кроків:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо $OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в рівнобедреному $\triangle SBC$ виражаємо SB:

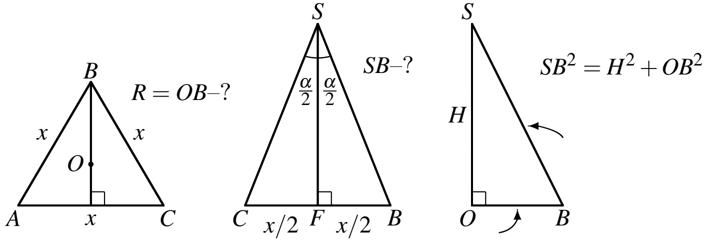
$\frac{FB}{SB} = \sin\frac{\alpha}{2}$ (тут F – середина сторони BC), звідки

$SB = \frac{FB}{\sin(\alpha/2)} = \frac{x}{2\sin(\alpha/2)}$;

3) записуючи теорему Піфагора $SB^2 = SO^2 + OB^2$ для трикутника SOB, отримуємо рівняння

$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3}$.

Метод введення допоміжної невідомої



Цю мету буде досягнуто в результаті виконання наступних кроків:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо $OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в рівнобедреному $\triangle SBC$ виражаємо SB:

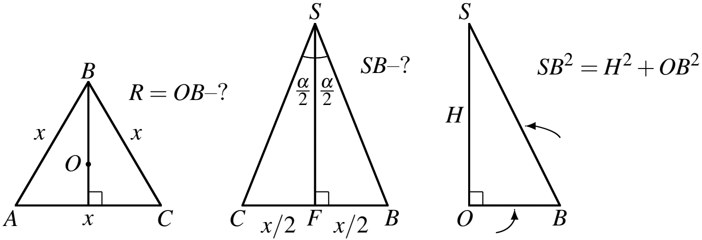
$\frac{FB}{SB} = \sin\frac{\alpha}{2}$ (тут F – середина сторони BC), звідки

$SB = \frac{FB}{\sin(\alpha/2)} = \frac{x}{2\sin(\alpha/2)}$;

3) записуючи теорему Піфагора $SB^2 = SO^2 + OB^2$ для трикутника SOB, отримуємо рівняння

$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3}$.

Метод введення допоміжної невідомої



Цю мету буде досягнуто в результаті виконання наступних кроків:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо $OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в рівнобедреному $\triangle SBC$ виражаємо SB:

$\frac{FB}{SB} = \sin\frac{\alpha}{2}$ (тут F – середина сторони BC), звідки

$SB = \frac{FB}{\sin(\alpha/2)} = \frac{x}{2\sin(\alpha/2)}$;

3) записуючи теорему Піфагора $SB^2 = SO^2 + OB^2$ для трикутника SOB, отримуємо рівняння

$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3-4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{12H^2\sin^2(\alpha/2)}{3-4\sin^2(\alpha/2)} \iff x = H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Тепер шукану суму довжин усіх ребер піраміди (тобто трьох сторін основи x и трьох бічних ребер $b = SB$) виражаємо через знайдений вираз x:

$$3x + 3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}H\dfrac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3-4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{12H^2\sin^2(\alpha/2)}{3-4\sin^2(\alpha/2)} \iff x = H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Тепер шукану суму довжин усіх ребер піраміди (тобто трьох сторін основи x и трьох бічних ребер $b = SB$) виражаємо через знайдений вираз x:

$$3x+3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}H\dfrac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3-4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{12H^2\sin^2(\alpha/2)}{3-4\sin^2(\alpha/2)} \iff x = H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Тепер шукану суму довжин усіх ребер піраміди (тобто трьох сторін основи x и трьох бічних ребер $b = SB$) виражаємо через знайдений вираз x:

$$3x + 3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}H\dfrac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3-4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{12H^2\sin^2(\alpha/2)}{3-4\sin^2(\alpha/2)} \iff x = H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Тепер шукану суму довжин усіх ребер піраміди (тобто трьох сторін основи x и трьох бічних ребер $b = SB$) виражаємо через знайдений вираз x:

$$3x + 3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3-4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{12H^2\sin^2(\alpha/2)}{3-4\sin^2(\alpha/2)} \iff x = H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Тепер шукану суму довжин усіх ребер піраміди (тобто трьох сторін основи x и трьох бічних ребер $b = SB$) виражаємо через знайдений вираз x:

$$3x+3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

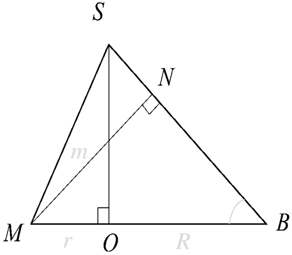
$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1+2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

В і д п о в і д ь: $3\sqrt{3}H\frac{1+2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3-4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з правильною трикутною пірамідою

Розглянемо ще одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з двогранним кутом при бічному ребрі у правильній трикутній піраміді (задачу 1 такого типу розглянуто в частині першій Уроку 7).

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.



Задача 2. Дано: $\triangle MSB$, SO і MN – висоти, $MO = r, OB = R, MN = m$. Знайти SO (висота піраміди) і SB (бічне ребро).

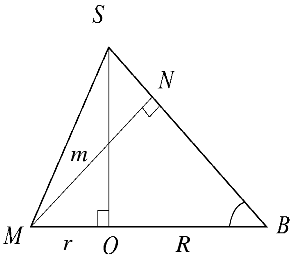
Розв'язання. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SOB.

Розглянемо також подібний йому трикутник MNB, який є повністю визначеним.

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з правильною трикутною пірамідою

Розглянемо ще одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з двогранним кутом при бічному ребрі у правильній трикутній піраміді (задачу 1 такого типу розглянуто в частині першій Уроку 7).

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.



З а д а ч а 2. Дано: $\triangle MSB$, SO і MN – висоти, $MO = r, OB = R, MN = m$. Знайти SO (висота піраміди) і SB (бічне ребро).

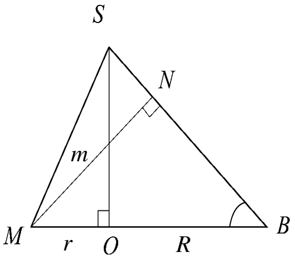
Р о з в'я з а н н я. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SOB.

Розглянемо також подібний йому трикутник MNB, який є повністю визначеним.

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з правильною трикутною пірамідою

Розглянемо ще одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з двогранним кутом при бічному ребрі у правильній трикутній піраміді (задачу 1 такого типу розглянуто в частині першій Уроку 7).

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.

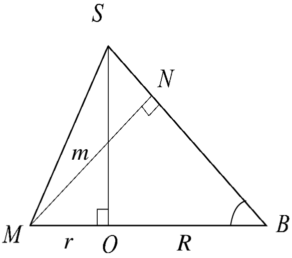


Задача 2. Дано: $\triangle MSB$, SO і MN – висоти, $MO = r, OB = R, MN = m$. Знайти SO (висота піраміди) і SB (бічне ребро).

Розв'язання. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SOB.

Розглянемо також подібний йому трикутник MNB, який є повністю визначеним.

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SOB$ з $\triangle MNB$

$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg} \angle NBO = \frac{MN}{NB},$$

з яких випливає рівність

$$SO = \frac{OB \cdot MN}{NB} = \frac{OB \cdot MN}{\sqrt{BM^2 - MN^2}} = \frac{Rm}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}.$$

Аналогічно маємо:

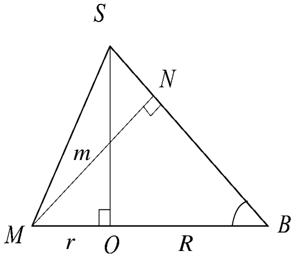
з $\triangle SOB$ з $\triangle MNB$

$$\frac{OB}{SB} = \cos \angle NBO = \frac{NB}{BM},$$

звідки отримуємо

$$SB = \frac{OB \cdot BM}{NB} = \frac{OB \cdot BM}{\sqrt{BM^2 - MN^2}} = \frac{R(R+r)}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}.$$

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SOB$ з $\triangle MNB$

$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle NBO = \frac{MN}{NB},$$

з яких випливає рівність

$$SO = \frac{OB \cdot MN}{NB} = \frac{OB \cdot MN}{\sqrt{BM^2 - MN^2}} = \frac{Rm}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}.$$

Аналогічно маємо:

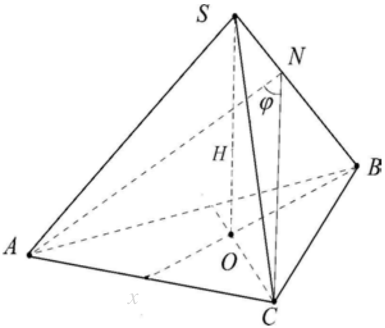
з $\triangle SOB$ з $\triangle MNB$

$$\frac{OB}{SB} = \cos\angle NBO = \frac{NB}{BM},$$

звідки отримуємо

$$SB = \frac{OB \cdot BM}{NB} = \frac{OB \cdot BM}{\sqrt{BM^2 - MN^2}} = \frac{R(R+r)}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

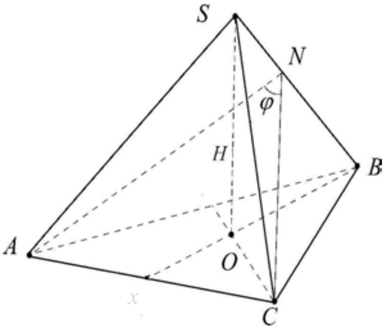


Приклад 2. Висота правильної трикутної піраміди H, а двогранний кут при бічному ребрі φ. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. Відзначимо, що в задачі неможливо виділити жодного повністю визначеного трикутника. Тому задачу розв'язуємо методом введення допоміжної невідомої.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Тепер в рівносторонньому $\triangle ABC$ і в рівнобедреному $\triangle ANC$ через x можна виразити будь-які параметри.

Метод введення допоміжної невідомої

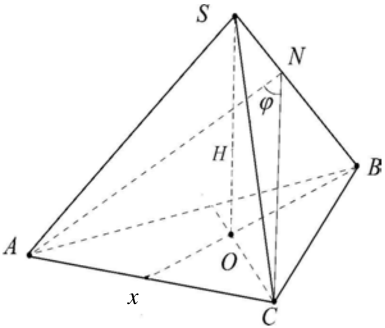


Приклад 2. Висота правильної трикутної піраміди H, а двогранний кут при бічному ребрі φ. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. Відзначимо, що в задачі неможливо виділити жодного повністю визначеного трикутника. Тому задачу розв'язуємо методом введення допоміжної невідомої.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Тепер в рівносторонньому $\triangle ABC$ і в рівнобедреному $\triangle ANC$ через x можна виразити будь-які параметри.

Метод введення допоміжної невідомої

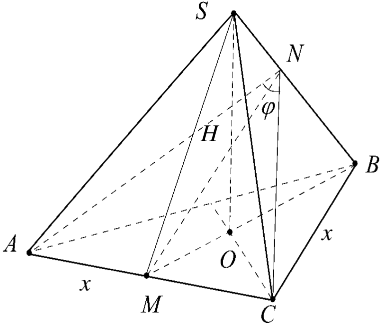


Приклад 2. Висота правильної трикутної піраміди H, а двогранний кут при бічному ребрі φ. Знайти об'єм піраміди.

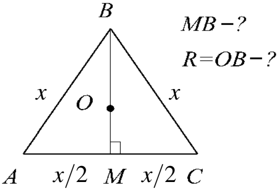
Розв'язання. Відзначимо, що в задачі неможливо виділити жодного повністю визначеного трикутника. Тому задачу розв'язуємо методом введення допоміжної невідомої.

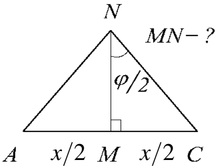
Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Тепер в рівносторонньому $\triangle ABC$ і в рівнобедреному $\triangle ANC$ через x можна виразити будь-які параметри.

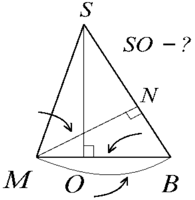
Метод введення допоміжної невідомої



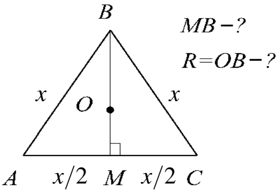
Щоб скласти рівняння для знаходження невідомої x, використаємо $\triangle MSB$ і виразимо в ньому через x задану висоту $SO = H$ (див. розглянуту вище стандартну планіметричну задачу 2). Для цього необхідно спочатку виразити через x відрізки $R = OB$, MB і MN.

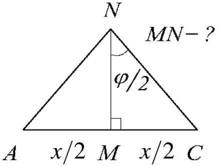


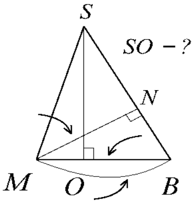




Метод введення допоміжної невідомої







Таким чином:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо MB і R:

$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}x,\qquad R = \frac{\sqrt{3}}{3}x;$

2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ виражаємо висоту MN:

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, звідки $MN = \frac{MC}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} = MC\cdot\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$

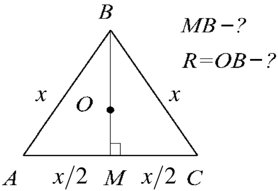
3) в $\triangle MSB$ маємо співвідношення (див. задачу 2):

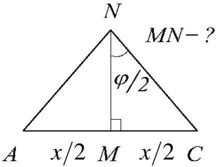
$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle NBO = \frac{MN}{NB}.$$

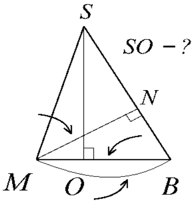
Виражаючи звідси висоту SO, отримуємо рівняння:

$$H = SO = \frac{OB\cdot MN}{NB} = \frac{OB\cdot MN}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x\,\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Метод введення допоміжної невідомої







Таким чином:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо MB і R:

$$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad R = \frac{\sqrt{3}}{3}x;$$

2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ виражаємо висоту MN:

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, звідки $MN = \frac{MC}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} = MC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$;

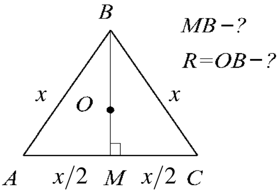
3) в $\triangle MSB$ маємо співвідношення (див. задачу 2):

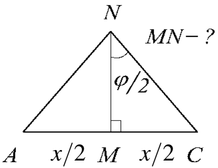
$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle NBO = \frac{MN}{NB}.$$

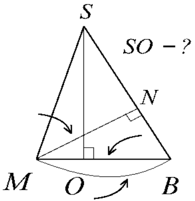
Виражаючи звідси висоту SO, отримуємо рівняння:

$$H = SO = \frac{OB \cdot MN}{NB} = \frac{OB \cdot MN}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Метод введення допоміжної невідомої







Таким чином:

1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ виражаємо MB і R:

$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad R = \frac{\sqrt{3}}{3}x;$

2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ виражаємо висоту MN:

$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, звідки $MN = \frac{MC}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} = MC \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$

3) в $\triangle MSB$ маємо співвідношення (див. задачу 2):

$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle NBO = \frac{MN}{NB}.$$

Виражаючи звідси висоту SO, отримуємо рівняння:

$$H = SO = \frac{OB \cdot MN}{NB} = \frac{OB \cdot MN}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}x\,\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння

$$H = \frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} \iff x = \frac{3H\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{3}H\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}\,.$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди за формулою $V=\frac{1}{3}S_0H$, де $S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ – площа основи піраміди. Отже, маємо

$$V=\tfrac{1}{3}S_0H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3H^2\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)H=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right).$$

Відповідь: $V=\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right).$

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння

$$H = \frac{\sqrt{3}\,x\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} \iff x = \frac{3H\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{3}\,H\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}\,.$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3}S_0H$, де $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ – площа основи піраміди. Отже, маємо

$$V = \tfrac{1}{3}S_0H = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2H = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3H^2\left(3\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)H =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right).$$

Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння

$$H = \frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} \iff x = \frac{3H\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{3}\,H\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}\,.$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди за формулою $V = \frac{1}{3}S_0H$, де $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ – площа основи піраміди. Отже, маємо

$$V = \tfrac{1}{3}S_0H = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2H = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3H^2\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)H =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right).$$

Відповідь: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)$.

Метод введення допоміжної невідомої

Розв'язуємо отримане рівняння

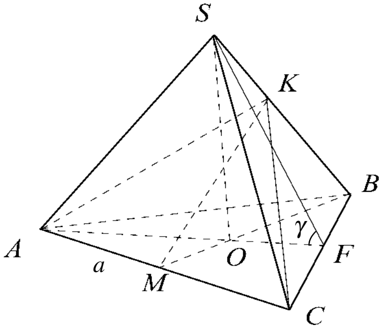
$$H=\frac{\sqrt{3}\,x\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}\iff x=\frac{3H\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{3}\,H\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}\,.$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди за формулою $V=\frac{1}{3}S_0H$, де $S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ – площа основи піраміди. Отже, маємо

$$V=\tfrac{1}{3}S_0H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x^2H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3H^2\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)H=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1\right).$$

Відповідь: $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}-1\right).$

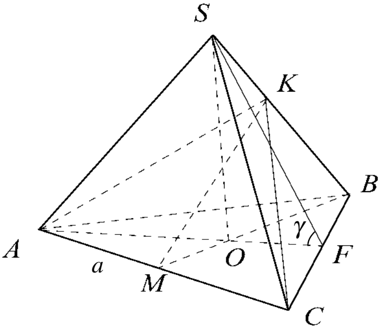
Метод введення допоміжної невідомої



Приклад 3. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і γ – двогранний кут при ребрі основи. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро основи і утворює з площиною основи кут δ.

Розв'язання. Перерізом є рівнобедрений $\triangle AKC$. Тому кут KMB, де M — середина сторони AC, є лінійним кутом двогранного кута, який утворює переріз з площиною основи піраміди, тобто $\angle KMB = \delta$.
Оскільки площа $\triangle AKC$ (площа перерізу):
$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot MK$, то розв'язання задачі зводиться до знаходження відрізка MK .

Метод введення допоміжної невідомої



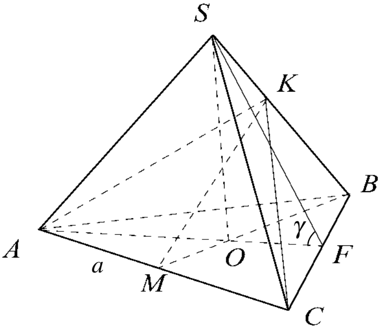
П р и к л а д 3. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і γ – двогранний кут при ребрі основи. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро основи і утворює з площиною основи кут δ.

Р о з в' я з а н н я. Перерізом є рівнобедрений $\triangle AKC$. Тому кут KMB, де M — середина сторони AC, є лінійним кутом двогранного кута, який утворює переріз з площиною основи піраміди, тобто $\angle KMB = \delta$.

Оскільки площа $\triangle AKC$ (площа перерізу):

$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2}AC \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot MK$, то розв'язання задачі зводиться до знаходження відрізка MK.

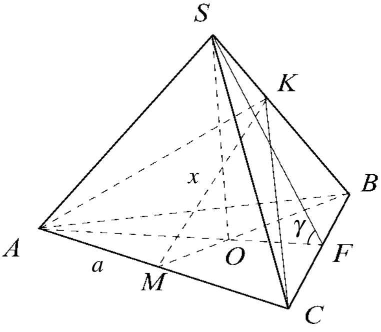
Метод введення допоміжної невідомої



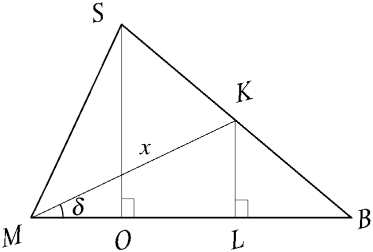
Приклад 3. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і γ – двогранний кут при ребрі основи. Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через ребро основи і утворює з площиною основи кут δ.

Розв'язання. Перерізом є рівнобедрений $\triangle AKC$.
Тому кут KMB, де M — середина сторони AC, є лінійним кутом двогранного кута, який утворює переріз з площиною основи піраміди, тобто $\angle KMB = \delta$.
Оскільки площа $\triangle AKC$ (площа перерізу):
$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MK = \frac{a}{2} \cdot MK$, то розв'язання задачі зводиться до знаходження відрізка MK .

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $MK = x$ і KL – висота трикутника MKB. Тоді $ML = x\cos\delta$ і $KL = x\sin\delta$.

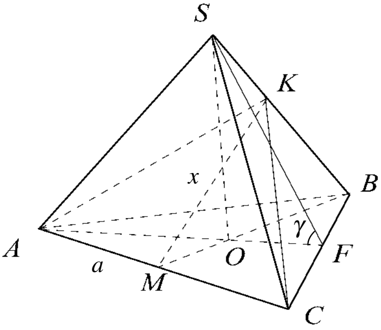


Для складання рівняння з метою знаходження невідомої x використаємо співвідношення

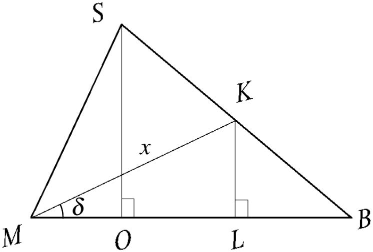
$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle KBL = \frac{KL}{LB} \iff \frac{SO}{OB} = \frac{KL}{MB-ML} \iff \frac{SO}{OB} = \frac{x\sin\delta}{MB-x\cos\delta}.$$

Відрізки SO, OB і MB знаходимо в результаті розв'язання наступних стандартних планіметричних задач:

Метод введення допоміжної невідомої



Нехай $MK = x$ і KL – висота трикутника MKB. Тоді $ML = x\cos\delta$ і $KL = x\sin\delta$.

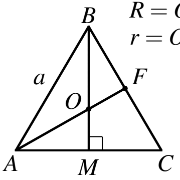


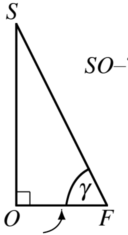
Для складання рівняння з метою знаходження невідомої x використаємо співвідношення

$$\frac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle KBL = \frac{KL}{LB} \iff \frac{SO}{OB} = \frac{KL}{MB-ML} \iff \frac{SO}{OB} = \frac{x\sin\delta}{MB-x\cos\delta}.$$

Відрізки SO, OB і MB знаходимо в результаті розв'язання наступних стандартних планіметричних задач:

Метод введення допоміжної невідомої





1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо

$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $OF = r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$;

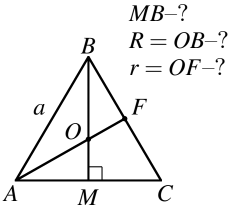
2) в прямокутному $\triangle SOF$ знаходимо SO:

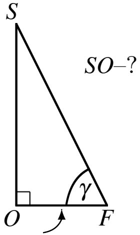
$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{OF}$, звідки $SO = OF \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\gamma$.

Підставляючи вирази відрізків SO, OB і MB в отримане вище співвідношення $\frac{SO}{OB} = \frac{x\sin\delta}{MB - x\cos\delta}$, отримуємо рівняння для знаходження x:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\gamma}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta} \iff \frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta}.$$

Метод введення допоміжної невідомої





1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо

$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\quad OF = r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$;

2) в прямокутному $\triangle SOF$ знаходимо SO:

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{SO}{OF}$, звідки $SO = OF \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\gamma$.

Підставляючи вирази відрізків SO, OB і MB в отримане вище співвідношення $\frac{SO}{OB} = \frac{x\sin\delta}{MB - x\cos\delta}$, отримуємо рівняння для знаходження x:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\gamma}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta} \iff \frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta}.$$

Метод введення допоміжної невідомої

Оскільки знаменник дробу в правій частині рівняння

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta}$

не дорівнює нулю як довжина деякого відрізка, то рівняння набуває вигляду

$$\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta\right) = 2x\sin\delta \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\gamma = x(\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta).$$

Звідси знаходимо

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta}$.

Тепер знаходимо площу перерізу:

$S_{\text{пер}} = \frac{a}{2}\cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}$.

Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Оскільки знаменник дробу в правій частині рівняння
$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta}$

не дорівнює нулю як довжина деякого відрізка, то рівняння набуває вигляду

$$\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta\right) = 2x\sin\delta \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\gamma = x(\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta).$$

Звідси знаходимо

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta}$.

Тепер знаходимо площу перерізу:

$$S_{\text{пер}} = \frac{a}{2}\cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}.$$

Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}$.

Метод введення допоміжної невідомої

Оскільки знаменник дробу в правій частині рівняння

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\sin\delta}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta}$

не дорівнює нулю як довжина деякого відрізка, то рівняння набуває вигляду

$$\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\cos\delta\right) = 2x\sin\delta \iff$$

$$\iff \frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{tg}\gamma = x(\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta)\,.$$

Звідси знаходимо

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta}\,.$

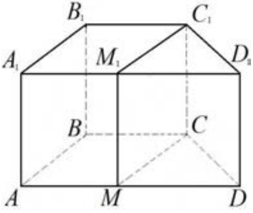
Тепер знаходимо площу перерізу:

$S_{\text{пер}} = \frac{a}{2}\cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}\,.$

В і д п о в і д ь: $S_{\text{пер}} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\,\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cdot\cos\delta + 2\sin\delta}\,.$

Приклади із ЗНО

П р и к л а д 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3, а її висота 8 см.

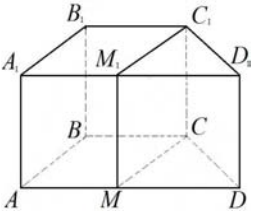


Р о з в' я з а н н я. Нехай $BC = x$ – менша основа трапеції $ABCD$. Тоді більша її основа $AD = 6x$ і її висота $BN = 6x$. Площа трапеції $ABCD$ (основи призми):

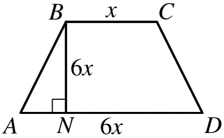
$$S_0 = \frac{6x + x}{2} \cdot 6x = 21x^2.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об'єм призми дорівнює 672 см^3, а її висота 8 см.



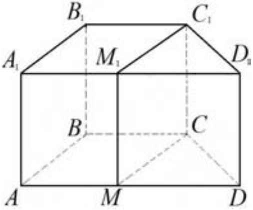
Розв'язання. Нехай $BC = x$ – менша основа трапеції $ABCD$. Тоді більша її основа $AD = 6x$ і її висота $BN = 6x$. Площа трапеції $ABCD$ (основи призми):



$$S_0 = \frac{6x + x}{2} \cdot 6x = 21x^2 .$$

Приклади із ЗНО

Виражаючи через x заданий об'єм призми $V = S_0 H$, де $V = 672$, площа основи $S_0 = 21x^2$ і висота призми $H = 8$, отримуємо рівняння для знаходження x:
$672 = 21x^2 \cdot 8 \iff 168x^2 = 672 \iff x^2 = 4$,
звідки вибираємо додатній корінь $x = 2$.



Заданим перерізом призми є прямокутник MM_1C_1C, при цьому $MC \parallel AB$. Тому $ABCM$ – паралелограм і $MC = AB$. Отже, для знаходження площі перерізу

$S_{\text{пер}} = MC \cdot CC_1 = AB \cdot 8$ необхідно знайти бічну сторону AB трапеції $ABCD$:

AB–?

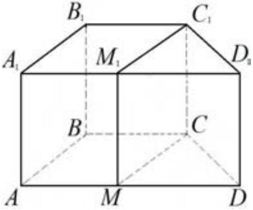
$S_{MM_1C_1C}$ –?

Приклади із ЗНО

Виражаючи через x заданий об'єм призми $V = S_0 H$, де $V = 672$, площа основи $S_0 = 21x^2$ і висота призми $H = 8$, отримуємо рівняння для знаходження x:

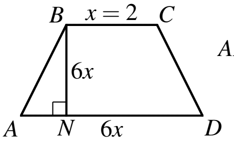
$672 = 21x^2 \cdot 8 \iff 168x^2 = 672 \iff x^2 = 4$,

звідки вибираємо додатній корінь $x = 2$.

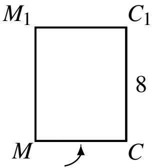


Заданим перерізом призми є прямокутник MM_1C_1C, при цьому $MC \parallel AB$. Тому $ABCM$ – паралелограм і $MC = AB$. Отже, для знаходження площі перерізу

$S_{\text{пер}} = MC \cdot CC_1 = AB \cdot 8$ необхідно знайти бічну сторону AB трапеції $ABCD$:

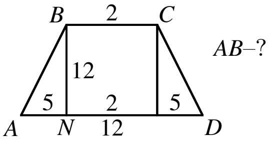


AB–?



$S_{MM_1C_1C}$ –?

Приклади із ЗНО



Отже, $BC = x = 2$, $AD = BN = 6x = 12$. В рівнобічній трапеції $ABCD$ маємо $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$. Тоді

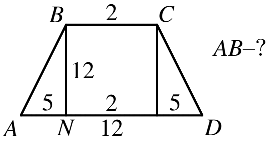
$$AB = \sqrt{BN^2 + AN^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$$
$$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13\,.$$

Отже,
$S_{\text{пер}} = AB \cdot 8 = 13 \cdot 8 = 104$ (см^2).

Відповідь: 104 см^2.

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює 1020 см^3. Через діагональ AC та вершину B_1 тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см^2), якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$.

Приклади із ЗНО



Отже, $BC = x = 2$, $AD = BN = 6x = 12$. В рівнобічній трапеції $ABCD$ маємо $AN = \frac{AD - BC}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$. Тоді

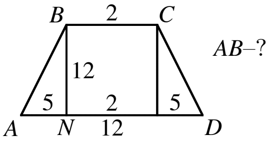
$AB = \sqrt{BN^2 + AN^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$
$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Отже,
$S_{\text{пер}} = AB \cdot 8 = 13 \cdot 8 = 104$ (см^2).

Відповідь: 104 см^2.

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює 1020 см^3. Через діагональ AC та вершину B_1 тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см^2), якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$.

Приклади із ЗНО



Отже, $BC = x = 2$, $AD = BN = 6x = 12$. В рівнобічній трапеції $ABCD$ маємо $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$. Тоді

$AB = \sqrt{BN^2 + AN^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$

$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

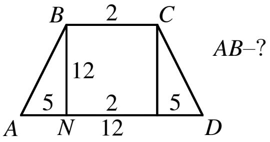
Отже,

$S_{\text{пер}} = AB \cdot 8 = 13 \cdot 8 = 104$ (см^2).

Відповідь: 104 см^2.

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює 1020 см^3. Через діагональ AC та вершину B_1 тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см^2), якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$.

Приклади із ЗНО



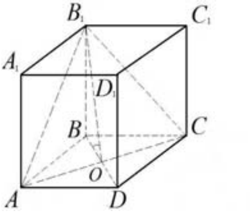
Отже, $BC = x = 2$, $AD = BN = 6x = 12$. В рівнобічній трапеції $ABCD$ маємо $AN = \frac{AD-BC}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$. Тоді $AB = \sqrt{BN^2 + AN^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} =$
$= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Отже,
$S_{\text{пер}} = AB \cdot 8 = 13 \cdot 8 = 104$ (см^2).

Відповідь: 104 см^2.

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2013 р.). Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якому більша діагональ $AC = 17$ см. Об'єм призми дорівнює 1020 см^3. Через діагональ AC та вершину B_1 тупого кута верхньої основи призми проведено площину, яка утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть площу утвореного перерізу призми (у см^2), якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$.

Приклади із ЗНО



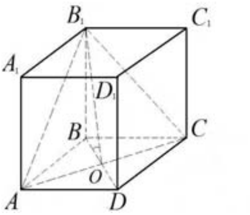
Р о з в' я з а н н я. Перерізом призми є рівнобедрений $\triangle AB_1C$, який утворює з площиною основи призми $\angle B_1OB = \alpha$, де O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, при цьому $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$.

Нехай $OB = x$. Щоб скласти рівняння, виразимо через x заданий об'єм призми $V = S_0H$, де $V = 1020$, площа основи S_0 – це площа ромба $ABCD$, в якому задано діагональ $AC = 17$, і $H = BB_1$ – висота призми, яку виразимо в прямокутному $\triangle B_1BO$:

S_0–?

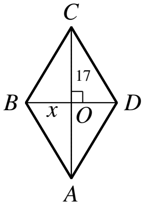
BB_1–?

Приклади із ЗНО

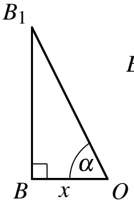


Розв'язання. Перерізом призми є рівнобедрений $\triangle AB_1C$, який утворює з площиною основи призми $\angle B_1OB = \alpha$, де O – точка перетину діагоналей ромба $ABCD$, при цьому $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$.

Нехай $OB = x$. Щоб скласти рівняння, виразимо через x заданий об'єм призми $V = S_0H$, де $V = 1020$, площа основи S_0 – це площа ромба $ABCD$, в якому задано діагональ $AC = 17$, і $H = BB_1$ – висота призми, яку виразимо в прямокутному $\triangle B_1BO$:

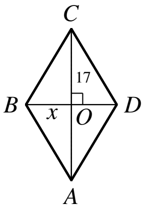


S_0–?

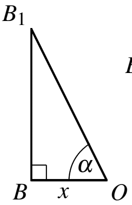


BB_1–?

Приклади із ЗНО



S_0–?



BB_1–?

Отже, виражаємо площу ромба $ABCD$:

$S_0 = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 17x$

і катет BB_1 прямокутного $\triangle B_1BO$, в якому $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$:

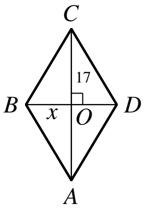
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB_1}{x}$, звідки $BB_1 = x \operatorname{tg}\alpha = 2,4x$.

Підставляючи відповідні вирази в рівність $V = S_0 H$, отримуємо рівняння:

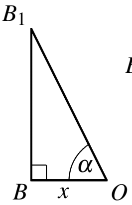
$1020 = 17x \cdot 2,4x \iff 48,8x^2 = 1020 \iff x^2 = 25$,

звідки вибираємо додатній корінь $x = 5$.

Приклади із ЗНО



S_0–?



BB_1–?

Отже, виражаємо площу ромба $ABCD$:

$S_0 = \frac{1}{2} BD \cdot AC = 17x$

і катет BB_1 прямокутного $\triangle B_1BO$, в якому $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BB_1}{x}$, звідки $BB_1 = x \operatorname{tg}\alpha = 2,4x$.

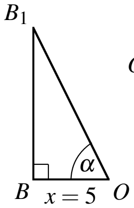
Підставляючи відповідні вирази в рівність $V = S_0 H$, отримуємо рівняння:

$1020 = 17x \cdot 2,4x \iff 48,8x^2 = 1020 \iff x^2 = 25$,

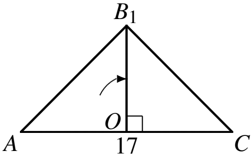
звідки вибираємо додатній корінь $x = 5$.

Приклади із ЗНО

Тепер, щоб знайти площу перерізу призми – рівнобедреного $\triangle AB_1C$: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1$, необхідно спочатку знайти гіпотенузу OB_1 в прямокутному $\triangle B_1BO$:



OB_1 –?



S_{AB_1C} –?

$\cos\alpha = \frac{OB}{OB_1}$, звідки $OB_1 = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$.

За заданим $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$, використовуючи тотожність (див. Урок 20, частина друга) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, знаходимо

$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{2,4^2 + 1} = \sqrt{6,76} = 2,6$.

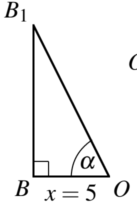
Отже, $OB_1 = 5 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2,6 = 13$ і

$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110,5$ (см^2).

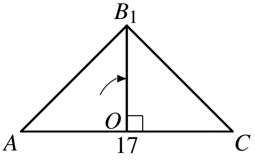
Відповідь: $110,5$ см^2.

Приклади із ЗНО

Тепер, щоб знайти площу перерізу призми – рівнобедреного $\triangle AB_1C$: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1$, необхідно спочатку знайти гіпотенузу OB_1 в прямокутному $\triangle B_1BO$:



OB_1 –?



S_{AB_1C} –?

$\cos\alpha = \frac{OB}{OB_1}$, звідки $OB_1 = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$.

За заданим $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$, використовуючи тотожність (див. Урок 20, частина друга) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, знаходимо

$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{2,4^2 + 1} = \sqrt{6,76} = 2,6$.

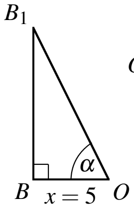
Отже, $OB_1 = 5 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2,6 = 13$ і

$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110,5$ (см^2).

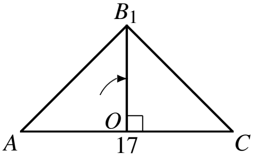
Відповідь: $110,5$ см^2.

Приклади із ЗНО

Тепер, щоб знайти площу перерізу призми – рівнобедреного $\triangle AB_1C$: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1$, необхідно спочатку знайти гіпотенузу OB_1 в прямокутному $\triangle B_1BO$:



OB_1 –?



S_{AB_1C} –?

$\cos\alpha = \frac{OB}{OB_1}$, звідки $OB_1 = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$.

За заданим $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$, використовуючи тотожність (див. Урок 20, частина друга) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, знаходимо

$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{2,4^2 + 1} = \sqrt{6,76} = 2,6$.

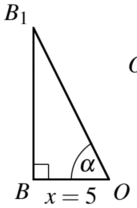
Отже, $OB_1 = 5 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2,6 = 13$ і

$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110,5$ (см^2).

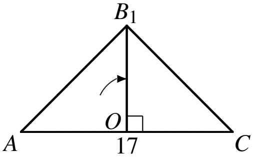
Відповідь: $110,5$ см^2.

Приклади із ЗНО

Тепер, щоб знайти площу перерізу призми – рівнобедреного $\triangle AB_1C$: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1$, необхідно спочатку знайти гіпотенузу OB_1 в прямокутному $\triangle B_1BO$:



OB_1 –?



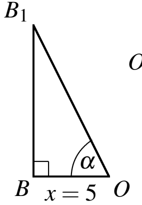
S_{AB_1C} –?

$\cos\alpha = \frac{OB}{OB_1}$, звідки $OB_1 = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$.
За заданим $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$, використовуючи тотожність (див. Урок 20, частина друга) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, знаходимо

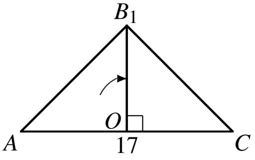
$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{2,4^2 + 1} = \sqrt{6,76} = 2,6$.
Отже, $OB_1 = 5 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2,6 = 13$ і
$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110,5$ (см^2).
Відповідь: $110,5$ см^2.

Приклади із ЗНО

Тепер, щоб знайти площу перерізу призми – рівнобедреного $\triangle AB_1C$: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{2}AC \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1$, необхідно спочатку знайти гіпотенузу OB_1 в прямокутному $\triangle B_1BO$:



OB_1 –?



S_{AB_1C} –?

$\cos\alpha = \frac{OB}{OB_1}$, звідки $OB_1 = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos\alpha}$.

За заданим $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$, використовуючи тотожність (див. Урок 20, частина друга) $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, знаходимо

$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \sqrt{2,4^2 + 1} = \sqrt{6,76} = 2,6$.

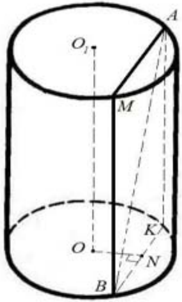
Отже, $OB_1 = 5 \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2,6 = 13$ і

$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot OB_1 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 13 = 110,5$ (см^2).

Відповідь: $110,5$ см^2.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi$ см^2.

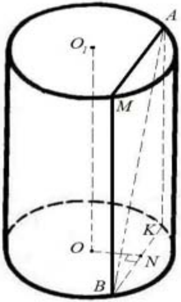


Розв'язання. Перерізом циліндра є прямокутник $AKBM$, сторони якого AK і BM паралельні осі циліндра OO_1. Відрізок $ON = 2$, де N – середина відрізка BK.

Нехай $BN = NK = x$ і $AK = y$. Для знаходження x і y складемо систему рівнянь.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi$ см^2.

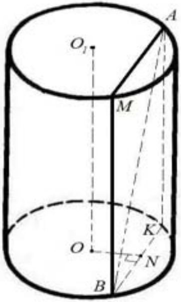


Розв'язання. Перерізом циліндра є прямокутник $AKBM$, сторони якого AK і BM паралельні осі циліндра OO_1. Відрізок $ON = 2$, де N – середина відрізка BK.

Нехай $BN = NK = x$ і $AK = y$. Для знаходження x і y складемо систему рівнянь.

Приклади із ЗНО

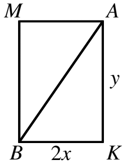
Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.). Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельно осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу — $60\sqrt{2}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює $20\sqrt{30}\pi$ см^2.



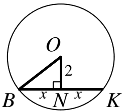
Розв'язання. Перерізом циліндра є прямокутник $AKBM$, сторони якого AK і BM паралельні осі циліндра OO_1. Відрізок $ON = 2$, де N – середина відрізка BK.

Нехай $BN = NK = x$ і $AK = y$. Для знаходження x і y складемо систему рівнянь.

Приклади із ЗНО



$S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$



R –?

З цією метою виразимо через x і y задані площі. Так, виражаючи площу перерізу $S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$, отримуємо рівняння $2xy = 60\sqrt{2} \iff xy = 30\sqrt{2}$.

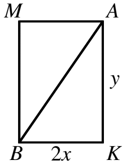
Друге рівняння отримуємо, виражаючи площу бічної поверхні циліндра $S_{\text{бок}} = 20\sqrt{30}\pi$ за формулою $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, де висота циліндра $H = AK = y$, а радіус циліндра $R = OB$ виражаємо в $\triangle ONB$: $R = \sqrt{x^2+4}$.

У такий спосіб отримуємо рівняння
$2\pi y\sqrt{x^2+4} = 20\sqrt{30}\pi \iff y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}$.

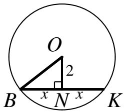
Отже, отримано систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Приклади із ЗНО



$S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$



R –?

З цією метою виразимо через x і y задані площі. Так, виражаючи площу перерізу $S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$, отримуємо рівняння $2xy = 60\sqrt{2} \iff xy = 30\sqrt{2}$.

Друге рівняння отримуємо, виражаючи площу бічної поверхні циліндра $S_{\text{бок}} = 20\sqrt{30}\pi$ за формулою $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, де висота циліндра $H = AK = y$, а радіус циліндра $R = OB$ виражаємо в $\triangle ONB$: $R = \sqrt{x^2+4}$.

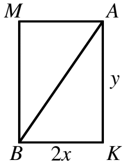
У такий спосіб отримуємо рівняння

$2\pi y\sqrt{x^2+4} = 20\sqrt{30}\pi \iff y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}$.

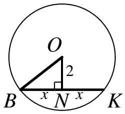
Отже, отримано систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Приклади із ЗНО



$S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$



R –?

З цією метою виразимо через x і y задані площі. Так, виражаючи площу перерізу $S_{AKBM} = 60\sqrt{2}$, отримуємо рівняння $2xy = 60\sqrt{2} \iff xy = 30\sqrt{2}$.

Друге рівняння отримуємо, виражаючи площу бічної поверхні циліндра $S_{бок} = 20\sqrt{30}\pi$ за формулою $S_{бок} = 2\pi RH$, де висота циліндра $H = AK = y$, а радіус циліндра $R = OB$ виражаємо в $\triangle ONB$: $R = \sqrt{x^2+4}$.

У такий спосіб отримуємо рівняння

$2\pi y\sqrt{x^2+4} = 20\sqrt{30}\pi \iff y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}$.

Отже, отримано систему рівнянь

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Приклади із ЗНО

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x}, \\ \dfrac{30\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Враховуючи, що в задачі $x > 0$, перетворимо друге рівняння системи до вигляду $3\sqrt{x^2+4} = \sqrt{15}x$ і далі – до вигляду $9(x^2+4) = 15x^2 \iff 36 = 6x^2 \iff x^2 = 6$, звідки вибираємо додатній корінь $x = \sqrt{6}$.

Знаходимо відповідне значення $y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x} = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3}$.

AB – ?

Нарешті, за теоремою Піфагора в $\triangle AKB$ знаходимо

$$AB = \sqrt{4x^2+y^2} = \sqrt{4(\sqrt{6})^2+(10\sqrt{3})^2} =$$
$$= \sqrt{4\cdot 6+300} = \sqrt{324} = 18 \ \text{(см)}.$$

Відповідь: 18 см.

Приклади із ЗНО

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x}, \\ \dfrac{30\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Враховуючи, що в задачі $x > 0$, перетворимо друге рівняння системи до вигляду $3\sqrt{x^2+4} = \sqrt{15}x$ і далі – до вигляду $9(x^2+4) = 15x^2 \iff 36 = 6x^2 \iff x^2 = 6$, звідки вибираємо додатній корінь $x = \sqrt{6}$.

Знаходимо відповідне значення $y = \frac{30\sqrt{2}}{x} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3}$.

AB – ?

Нарешті, за теоремою Піфагора в $\triangle AKB$ знаходимо

$$AB = \sqrt{4x^2+y^2} = \sqrt{4(\sqrt{6})^2+(10\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 6+300} = \sqrt{324} = 18 \ \text{(см)}.$$

Відповідь: 18 см.

Приклади із ЗНО

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x}, \\ \dfrac{30\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Враховуючи, що в задачі $x > 0$, перетворимо друге рівняння системи до вигляду $3\sqrt{x^2+4} = \sqrt{15}x$ і далі – до вигляду $9(x^2+4) = 15x^2 \iff 36 = 6x^2 \iff x^2 = 6$, звідки вибираємо додатній корінь $x = \sqrt{6}$.

Знаходимо відповідне значення $y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x} = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3}$.

AB – ?

Нарешті, за теоремою Піфагора в $\triangle AKB$ знаходимо

$$AB = \sqrt{4x^2+y^2} = \sqrt{4(\sqrt{6})^2+(10\sqrt{3})^2} = \\ = \sqrt{4\cdot 6+300} = \sqrt{324} = 18 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 18 см.

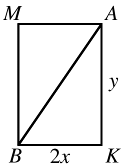
Приклади із ЗНО

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x}, \\ \dfrac{30\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Враховуючи, що в задачі $x > 0$, перетворимо друге рівняння системи до вигляду $3\sqrt{x^2+4} = \sqrt{15}x$ і далі – до вигляду $9(x^2+4) = 15x^2 \iff 36 = 6x^2 \iff x^2 = 6$, звідки вибираємо додатній корінь $x = \sqrt{6}$.

Знаходимо відповідне значення $y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x} = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3}$.



AB – ?

Нарешті, за теоремою Піфагора в $\triangle AKB$ знаходимо

$$AB = \sqrt{4x^2+y^2} = \sqrt{4(\sqrt{6})^2 + (10\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 6 + 300} = \sqrt{324} = 18 \ \text{(см)}.$$

Відповідь: 18 см.

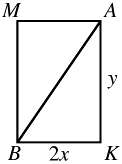
Приклади із ЗНО

Розв'язуємо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 30\sqrt{2}, \\ y\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}, \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x}, \\ \dfrac{30\sqrt{2}}{x}\sqrt{x^2+4} = 10\sqrt{30}. \end{cases}$$

Враховуючи, що в задачі $x > 0$, перетворимо друге рівняння системи до вигляду $3\sqrt{x^2+4} = \sqrt{15}x$ і далі – до вигляду $9(x^2+4) = 15x^2 \iff 36 = 6x^2 \iff x^2 = 6$, звідки вибираємо додатній корінь $x = \sqrt{6}$.

Знаходимо відповідне значення $y = \dfrac{30\sqrt{2}}{x} = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 10\sqrt{3}$.



AB – ?

Нарешті, за теоремою Піфагора в $\triangle AKB$ знаходимо

$$AB = \sqrt{4x^2+y^2} = \sqrt{4(\sqrt{6})^2+(10\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 6+300} = \sqrt{324} = 18 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 18 см.