

Тригонометрія: формули тотожних перетворень

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 20 (частина друга)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Попередні зауваження

В цій частині уроку зробимо ряд зауважень стосовно перетворень тригонометричних виразів.

- Перш за все, зазначимо, що формули перетворень тригонометричних виразів природньо групуються у відповідності з призначенням цих формул.
- Серед формул тотожних перетворень корисно розрізняти **абсолютні тотожності** (в них області визначення лівої і правої частин рівностей співпадають) і **умовні тотожності** (в них області визначення лівої і правої частин рівностей різні).

Попередні зауваження

В цій частині уроку зробимо ряд зауважень стосовно перетворень тригонометричних виразів.

- Перш за все, зазначимо, що формули перетворень тригонометричних виразів природньо групуються у відповідності з призначенням цих формул.
- Серед формул тотожних перетворень корисно розрізняти абсолютні тотожності (в них області визначення лівої і правої частин рівностей співпадають) і умовні тотожності (в них області визначення лівої і правої частин рівностей різні).

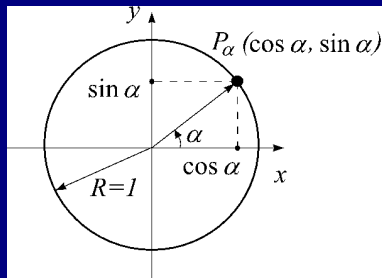
Попередні зауваження

В цій частині уроку зробимо ряд зауважень стосовно перетворень тригонометричних виразів.

- Перш за все, зазначимо, що формули перетворень тригонометричних виразів природньо групуються у відповідності з призначенням цих формул.
- Серед формул тотожних перетворень корисно розрізняти **абсолютні тотожності** (в них області визначення лівої і правої частин рівностей співпадають) і **умовні тотожності** (в них області визначення лівої і правої частин рівностей різні).

Співвідношення між тригонометричними функціями одного кута

Такі співвідношення дозволяють знаходити значення однієї з тригонометричних функцій, якщо відомі значення іншої функції того ж кута.



Основна тригонометрична тотожність

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

є наслідком теореми Піфагора для прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 1, а катети дорівнюють $|\sin \alpha|$ і $|\cos \alpha|$.

Наприклад, $\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ = 1$, $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$,
 $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1$ і т.п.

Співвідношення між функціями одного кута

Враховуючи означення тангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і основну тригонометричну тотожність, отримуємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Зазначимо, що в отриманій рівності

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

області визначення лівої і правої його частин однакові, оскільки визначаються нерівністю $\cos \alpha \neq 0$. Отже, встановлена рівність є абсолютною тотожністю.

З урахуванням означення котангенса $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ аналогічно доводиться абсолютна тотожність:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Співвідношення між функціями одного кута

Враховуючи означення тангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і основну тригонометричну тотожність, отримуємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Зазначимо, що в отриманій рівності

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

області визначення лівої і правої його частин однакові, оскільки визначаються нерівністю $\cos \alpha \neq 0$. Отже, встановлена рівність є **абсолютною тотожністю**.

З урахуванням означення котангенса $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ аналогічно доводиться абсолютна тотожність:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Співвідношення між функціями одного кута

Враховуючи означення тангенса $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і основну тригонометричну тотожність, отримуємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Зазначимо, що в отриманій рівності

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

області визначення лівої і правої його частин однакові, оскільки визначаються нерівністю $\cos \alpha \neq 0$. Отже, встановлена рівність є **абсолютною тотожністю**.

З урахуванням означення котангенса $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

аналогічно доводиться **абсолютна тотожність**:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Співвідношення між функціями одного кута

Враховуючи означення тангенса і котангенса, отримуємо

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

за умови, що $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$.

Необхідно відзначити, що області визначення (ОДЗ) лівої і правої частин рівності

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

різні. Очевидно, що права частина цієї рівності визначена на всій множині $\mathbf{R}$. У той же час, ліва частина цієї рівності не визначена, якщо не визначений $\operatorname{tg} \alpha$ або $\operatorname{ctg} \alpha$, тобто вона визначена за додаткових умов $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$.

Такі тотожності, які виконуються за додаткових умов, називаються умовними.

Співвідношення між функціями одного кута

Враховуючи означення тангенса і котангенса, отримуємо

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

за умови, що $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$.

Необхідно відзначити, що **області визначення** (ОДЗ) **лівої і правої частин рівності**

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

різні. Очевидно, що права частина цієї рівності визначена на всій множині $\mathbf{R}$. У той же час, ліва частина цієї рівності не визначена, якщо не визначений $\operatorname{tg} \alpha$ або $\operatorname{ctg} \alpha$, тобто вона визначена за додаткових умов $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$.

Такі тотожності, які виконуються за додаткових умов, називаються **умовними**.

Співвідношення між функціями одного кута

Отже, наведемо ще раз абсолютні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

і умовну тотожність

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

яка виконується при $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$ (див. мал.):



Співвідношення між функціями одного кута

Отже, наведемо ще раз абсолютні тотожності

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

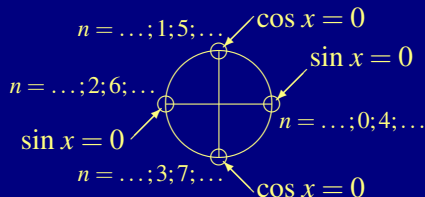
$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

і умовну тотожність

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

яка виконується при $\cos \alpha \neq 0$ і $\sin \alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}$ (див. мал.):



Приклади

Приклад 1. Знайти $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Зазначимо, що серед наведених вище формул відсутнє співвідношення між $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$. Тому, використовуючи основну тригонометричну тотожність, обчислимо спочатку $\cos \alpha$, а потім скористаємося означенням тангенса.

$$\cos \alpha < 0$$



З основної тригонометричної тотожності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Оскільки $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{15}/4.$$

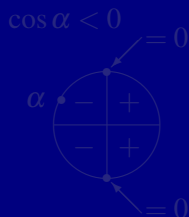
$$\text{Нарешті, знаходимо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Зазначимо, що серед наведених вище формул відсутнє співвідношення між $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$. Тому, використовуючи основну тригонометричну тотожність, обчислимо спочатку $\cos \alpha$, а потім скористаємося означенням тангенса.



З основної тригонометричної тотожності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Оскільки $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{15}/4.$$

$$\text{Нарешті, знаходимо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

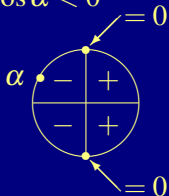
$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Зазначимо, що серед наведених вище формул відсутнє співвідношення між $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$. Тому, використовуючи основну тригонометричну тотожність, обчислимо спочатку $\cos \alpha$, а потім скористаємося означенням тангенса.

$$\cos \alpha < 0$$



З основної тригонометричної тотожності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Оскільки $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{15}/4.$$

$$\text{Нарешті, знаходимо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

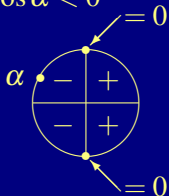
$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Зазначимо, що серед наведених вище формул відсутнє співвідношення між $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$. Тому, використовуючи основну тригонометричну тотожність, обчислимо спочатку $\cos \alpha$, а потім скористаємося означенням тангенса.

$$\cos \alpha < 0$$



З основної тригонометричної тотожності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Оскільки $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{15}/4.$$

$$\text{Нарешті, знаходимо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

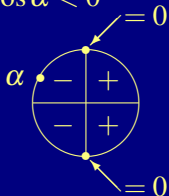
Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}$.

Приклади

Приклад 1. Знайти $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Зазначимо, що серед наведених вище формул відсутнє співвідношення між $\operatorname{tg} \alpha$ і $\sin \alpha$. Тому, використовуючи основну тригонометричну тотожність, обчислимо спочатку $\cos \alpha$, а потім скористаємося означенням тангенса.

$$\cos \alpha < 0$$



З основної тригонометричної тотожності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Оскільки $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{15}/4.$$

$$\text{Нарешті, знаходимо } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{4} : \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

$$\text{Відповідь: } \operatorname{tg} \alpha = -1/\sqrt{15}.$$

Приклади

Приклад 2. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Тепер, використовуючи тотожність $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, отримуємо

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

звідки знаходимо $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\sin \alpha < 0$$



Оскільки $\pi < \alpha < 3\pi/2$, то $\sin \alpha < 0$,
тобто $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Відповідь: $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Приклади

Приклад 2. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $\operatorname{ctg} \alpha$:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Тепер, використовуючи тотожність $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, отримуємо

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{звідки знаходимо } \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\sin \alpha < 0$$



Оскільки $\pi < \alpha < 3\pi/2$, то $\sin \alpha < 0$,
тобто $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Відповідь: $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Приклади

Приклад 2. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $\operatorname{ctg} \alpha$:

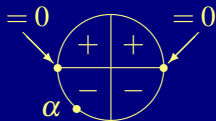
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Тепер, використовуючи тотожність $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, отримуємо

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

звідки знаходимо $\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$.

$$\sin \alpha < 0$$



Оскільки $\pi < \alpha < 3\pi/2$, то $\sin \alpha < 0$,
тобто $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Відповідь: $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Приклади

Приклад 2. Знайти $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $\operatorname{ctg} \alpha$:

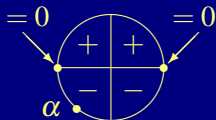
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2}.$$

Тепер, використовуючи тотожність $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, отримуємо

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$\text{звідки знаходимо } \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\sin \alpha < 0$$



Оскільки $\pi < \alpha < 3\pi/2$, то $\sin \alpha < 0$,
тобто $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Відповідь: $\sin \alpha = -2/\sqrt{5}$.

Тригонометричні функції суми (різниці) кутів

Наступна група формул дозволяє виразити тригонометричні функції суми (або різниці) кутів α і β через функції цих кутів:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .\end{aligned}$$

- При використанні формул для тригонометричних функцій суми і різниці кутів слід звернути увагу на те, що $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ і т.п. В цьому випадку не можна використовувати властивість $a(b + c) = ab + ac$, оскільки $\sin$ – не множник, а функція суми кутів.

Тригонометричні функції суми (різниці) кутів

Наступна група формул дозволяє виразити тригонометричні функції суми (або різниці) кутів α і β через функції цих кутів:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

- При використанні формул для тригонометричних функцій суми і різниці кутів слід звернути увагу на те, що $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ і т.п.

В цьому випадку не можна використовувати властивість $a(b + c) = ab + ac$, оскільки $\sin$ – не множник, а функція суми кутів.

Приклади

Приклад 3. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Подамо $\cos 15^\circ$ у вигляді косинуса різниці:

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ.$$

Тепер значення усіх отриманих виразів можна знайти в таблиці значень тригонометричних функцій. Таким чином,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Приклад 4. Знайти $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 3/4$, $\cos \beta = 4/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi/2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для синуса суми, отримуємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta.$

Приклади

Приклад 3. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Подамо $\cos 15^\circ$ у вигляді косинуса різниці:

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ.$$

Тепер значення усіх отриманих виразів можна знайти в таблиці значень тригонометричних функцій. Таким чином,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Приклад 4. Знайти $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 3/4$, $\cos \beta = 4/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi/2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для синуса суми, отримуємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta.$

Приклади

Приклад 3. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Подамо $\cos 15^\circ$ у вигляді косинуса різниці:

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ .$$

Тепер значення усіх отриманих виразів можна знайти в таблиці значень тригонометричних функцій. Таким чином,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} .$$

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} .$

Приклад 4. Знайти $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 3/4$, $\cos \beta = 4/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi/2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для синуса суми, отримуємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta .$

Приклади

Приклад 3. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Подамо $\cos 15^\circ$ у вигляді косинуса різниці:

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ.$$

Тепер значення усіх отриманих виразів можна знайти в таблиці значень тригонометричних функцій. Таким чином,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Приклад 4. Знайти $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 3/4$, $\cos \beta = 4/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi/2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для синуса суми, отримуємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta.$

Приклади

Приклад 3. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Подамо $\cos 15^\circ$ у вигляді косинуса різниці:

$$\cos 15^\circ = \cos (45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ.$$

Тепер значення усіх отриманих виразів можна знайти в таблиці значень тригонометричних функцій. Таким чином,

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

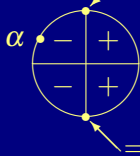
Приклад 4. Знайти $\sin(\alpha + \beta)$, якщо $\sin \alpha = 3/4$, $\cos \beta = 4/5$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi/2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для синуса суми, отримуємо $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta =$
 $= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta.$

Приклади

Обчислимо $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

$$\cos \alpha < 0$$



Маємо

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{7}/4.$$

Обчислимо тепер $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{4}{5}$ і $0 < \beta < \pi/2$.

$$\sin \beta > 0$$



Аналогічно маємо

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Оскільки $0 < \beta < \pi/2$, то $\sin \beta > 0$.

$$\text{Отже, } \sin \beta = 3/5.$$

Таким чином,

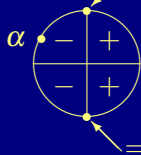
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

Приклади

Обчислимо $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

$$\cos \alpha < 0$$



Маємо

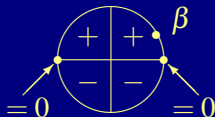
$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{7}/4.$$

Обчислимо тепер $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{4}{5}$ і $0 < \beta < \pi/2$.

$$\sin \beta > 0$$



Аналогічно маємо

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Оскільки $0 < \beta < \pi/2$, то $\sin \beta > 0$.

$$\text{Отже, } \sin \beta = 3/5.$$

Таким чином,

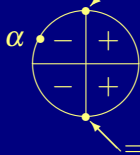
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

Приклади

Обчислимо $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

$$\cos \alpha < 0$$



Маємо

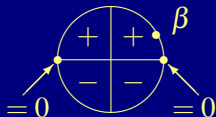
$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{7}/4.$$

Обчислимо тепер $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{4}{5}$ і $0 < \beta < \pi/2$.

$$\sin \beta > 0$$



Аналогічно маємо

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Оскільки $0 < \beta < \pi/2$, то $\sin \beta > 0$.

$$\text{Отже, } \sin \beta = 3/5.$$

Таким чином,

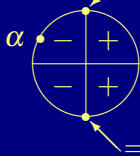
$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

Приклади

Обчислимо $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

$$\cos \alpha < 0$$



Маємо

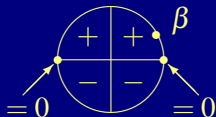
$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Отже, } \cos \alpha = -\sqrt{7}/4.$$

Обчислимо тепер $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{4}{5}$ і $0 < \beta < \pi/2$.

$$\sin \beta > 0$$



Аналогічно маємо

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Оскільки $0 < \beta < \pi/2$, то $\sin \beta > 0$.

$$\text{Отже, } \sin \beta = 3/5.$$

Таким чином,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{12-3\sqrt{7}}{20}.$$

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).\end{aligned}$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклади

Приклад 5. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо спочатку вирази $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ і $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ за формулами косинуса різниці і косинуса суми кутів:

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha).\end{aligned}$$

Таким чином, справедливі рівності

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} (\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{4} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} = 0,25.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Формули подвійного кута

Встановимо формули **косинуса подвійного кута**.

Використовуючи формулу для косинуса суми, отримуємо:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Часто необхідно виразити косинус подвійного кута через одну тригонометричну функцію.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, виражаємо $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Виразимо також $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Аналогічно, використовуючи формулу для синуса суми, виражаємо **синус подвійного кута**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Формули подвійного кута

Встановимо формули **косинуса подвійного кута**.

Використовуючи формулу для косинуса суми, отримуємо:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Часто необхідно виразити косинус подвійного кута через одну тригонометричну функцію.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, виражаємо $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Виразимо також $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Аналогічно, використовуючи формулу для синуса суми, виражаємо **синус подвійного кута**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Формули подвійного кута

Встановимо формули **косинуса подвійного кута**.

Використовуючи формулу для косинуса суми, отримуємо:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Часто необхідно виразити косинус подвійного кута через одну тригонометричну функцію.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, виражаємо $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Виразимо також $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Аналогічно, використовуючи формулу для синуса суми, виражаємо **синус подвійного кута**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Формули подвійного кута

Встановимо формули **косинуса подвійного кута**.

Використовуючи формулу для косинуса суми, отримуємо:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.\end{aligned}$$

Часто необхідно виразити косинус подвійного кута через одну тригонометричну функцію.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, виражаємо $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \\ &= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.\end{aligned}$$

Виразимо також $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

Аналогічно, використовуючи формулу для синуса суми, виражаємо **синус подвійного кута**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Формули подвійного кута

Таким чином, **формули подвійного кута** дозволяють переходити до тригонометричних функцій **у два рази меншого кута**:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha ; \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha .\end{aligned}$$

- Відзначимо, що формулами подвійного кута можна користуватися не тільки для кута 2α , але і для будь-яких інших кутів. При цьому, слід звернути увагу на те, що, наприклад,
 $\sin 4\alpha \neq 4\sin \alpha \cos \alpha$ (!) або
 $\cos 4\alpha \neq \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ (!) і т.п.

Так, перетворюючи $\sin 4\alpha$ за формулою синуса подвійного кута, отримуємо
 $\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot (2\alpha)) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$.

Аналогічно отримуємо

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 2\alpha .$$

Формули подвійного кута

Таким чином, **формули подвійного кута** дозволяють переходити до тригонометричних функцій **у два рази меншого** кута:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha ; \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha .\end{aligned}$$

- Відзначимо, що формулами подвійного кута можна користуватися не тільки для кута 2α , але і для будь-яких інших кутів. При цьому, слід звернути увагу на те, що, наприклад,
 $\sin 4\alpha \neq 4\sin \alpha \cos \alpha$ (!) або
 $\cos 4\alpha \neq \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ (!) і т.п.

Так, перетворюючи $\sin 4\alpha$ за формулою синуса подвійного кута, отримуємо
 $\sin 4\alpha = \sin(2 \cdot (2\alpha)) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha$.

Аналогічно отримуємо

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 2\alpha .$$

Формули половинного кута (пониження степеня)

Виразимо $\cos \alpha$ за формулами косинуса подвійного кута. Оскільки за допомогою формул **подвійного кута** перехід здійснюється до тригонометричних функцій **у два рази меншого** кута, то, зокрема, маємо

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{або} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Виражаючи з цих рівностей $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ і $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, отримуємо відповідно тотожності

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

з яких також випливають тотожності

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Отримані тотожності називають формулами половинного кута. Їх називають також формулами пониження степеня, оскільки при заміні виразів з лівих частин формул виразами, що містяться в правих частинах, степені зменшуються.

Формули половинного кута (пониження степеня)

Виразимо $\cos \alpha$ за формулами косинуса подвійного кута. Оскільки за допомогою формул **подвійного кута** перехід здійснюється до тригонометричних функцій **у два рази меншого** кута, то, зокрема, маємо

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{або} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Виражаючи з цих рівностей $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ і $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, отримуємо відповідно тотожності

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

з яких також випливають тотожності

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Отримані тотожності називають формулами половинного кута. Їх називають також формулами пониження степеня, оскільки при заміні виразів з лівих частин формул виразами, що містяться в правих частинах, степені зменшуються.

Формули половинного кута (пониження степеня)

Виразимо $\cos \alpha$ за формулами косинуса подвійного кута. Оскільки за допомогою формул **подвійного кута** перехід здійснюється до тригонометричних функцій **у два рази меншого** кута, то, зокрема, маємо

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{або} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Виражаючи з цих рівностей $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ і $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, отримуємо відповідно тотожності

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

з яких також випливають тотожності

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Отримані тотожності називають формулами **половинного кута**. Їх називають також формулами **пониження степеня**, оскільки при заміні виразів з лівих частин формул виразами, що містяться в правих частинах, степені зменшуються.

Формули половинного кута

Таким чином, **формули половинного кута**, які впливають з формул для косинуса подвійного кута, дозволяють переходити до тригонометричних функцій більшого кута з пониженням степеня виразу (при цьому усі тригонометричні функції виражаються через одну функцію – косинус кута, який **вдвічі більший** від заданого):

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}; & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; & \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Відзначимо також формули, які безпосередньо виражають тангенс і котангенс половинного кута $\alpha/2$ (а не квадрати цих функцій) через функції кута α :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Формули половинного кута

Таким чином, **формули половинного кута**, які впливають з формул для косинуса подвійного кута, дозволяють переходити до тригонометричних функцій більшого кута з пониженням степеня виразу (при цьому усі тригонометричні функції виражаються через одну функцію – косинус кута, який **вдвічі більший** від заданого):

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2}; & \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \\ \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; & \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.\end{aligned}$$

Відзначимо також формули, які безпосередньо виражають тангенс і котангенс половинного кута $\alpha/2$ (а не квадрати цих функцій) через функції кута α :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Приклади

Приклад 6. Знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса половинного кута $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ і значення $\cos \alpha = -\sqrt{15}/4$, обчислене при розв'язанні приклада 1, отримуємо $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}$.

Щоб визначити знак виразу $\sin \frac{\alpha}{2}$, скористаємося



умовою $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Ділячи усі частини цієї подвійної нерівності на 2, отримуємо $5\pi/4 < \alpha/2 < 3\pi/2$, тобто кут $\alpha/2$ належить третій чверті одиничного кола. Тому $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$.

Отже, $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 6. Знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса половинного кута $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ і значення $\cos \alpha = -\sqrt{15}/4$, обчислене при розв'язанні приклада 1, отримуємо $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}$.

Щоб визначити знак виразу $\sin \frac{\alpha}{2}$, скористаємося



умовою $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Ділячи усі частини цієї подвійної нерівності на 2, отримуємо $5\pi/4 < \alpha/2 < 3\pi/2$, тобто кут $\alpha/2$ належить третій чверті одиничного кола. Тому $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$.

Отже, $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

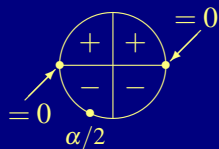
Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 6. Знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса половинного кута $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ і значення $\cos \alpha = -\sqrt{15}/4$, обчислене при розв'язанні приклада 1, отримуємо $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}$.

Щоб визначити знак виразу $\sin \frac{\alpha}{2}$, скористаємося



умовою $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Ділячи усі частини цієї подвійної нерівності на 2, отримуємо $5\pi/4 < \alpha/2 < 3\pi/2$, тобто кут $\alpha/2$ належить третій чверті одиничного кола. Тому $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$.

Отже, $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

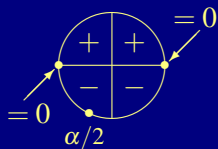
Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 6. Знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса половинного кута $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ і значення $\cos \alpha = -\sqrt{15}/4$, обчислене при розв'язанні прикладу 1, отримуємо $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}$.

Щоб визначити знак виразу $\sin \frac{\alpha}{2}$, скористаємося



умовою $5\pi/2 < \alpha < 3\pi$. Ділячи усі частини цієї подвійної нерівності на 2, отримуємо $5\pi/4 < \alpha/2 < 3\pi/2$, тобто кут $\alpha/2$ належить третій чверті одиничного кола. Тому $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$.

Отже, $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Відповідь: $\sin \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

В прикладі 3 обчислено $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса різниці. Обчислимо також $\cos 15^\circ$ за допомогою формули косинуса половинного кута.

Приклад 7. Обчислити $\cos 15^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса половинного кута $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos \alpha}{2}$, отримуємо

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Оскільки $\cos 15^\circ > 0$, то $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Зазначимо, що значення $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ дорівнює значенню $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$, отриманому в прикладі 3, оскільки дорівнюють квадрати цих додатніх чисел:

$$\left(\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2.$$

Приклади

Приклад 8. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Знайти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\text{а) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 - 1.$$

$$\text{б) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2.$$

Тепер, використовуючи отриману у попередньому пункті розв'язання рівність $2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 - 1$, остаточно отримуємо

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2.$$

Відповідь: а) $a^2 - 1$; б) $1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2$.

Приклади

Приклад 8. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Знайти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\text{а) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 - 1.$$

$$\text{б) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2.$$

Тепер, використовуючи отриману у попередньому пункті розв'язання рівність $2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 - 1$, остаточно отримуємо

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2.$$

Відповідь: а) $a^2 - 1$; б) $1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2$.

Приклади

Приклад 8. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Знайти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\text{а) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 - 1.$$

$$\text{б) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2.$$

Тепер, використовуючи отриману у попередньому пункті розв'язання рівність $2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 - 1$, остаточно отримуємо

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2.$$

Відповідь: а) $a^2 - 1$; б) $1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2$.

Приклади

Приклад 8. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = a$.

Знайти: а) $\sin 2\alpha$; б) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\text{а) } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = a^2 - 1.$$

$$\text{б) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2.$$

Тепер, використовуючи отриману у попередньому пункті розв'язання рівність $2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 - 1$, остаточно отримуємо

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2.$$

Відповідь: а) $a^2 - 1$; б) $1 - \frac{1}{2}(a^2 - 1)^2$.

Формули потрійного кута

Подібно до формул подвійного кута встановлюються формули для тригонометричних функцій **потрійного кута**.

Використовуючи формулу для синуса суми, а також формули подвійного кута, отримуємо вираз синуса **потрійного кута**:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\&= (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\&= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha .\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюється формула для косинуса **потрійного кута**:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .$$

Формули потрійного кута

Подібно до формул подвійного кута встановлюються формули для тригонометричних функцій **потрійного кута**.

Використовуючи формулу для синуса суми, а також формули подвійного кута, отримуємо вираз **синуса потрійного кута**:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\&= (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\&= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \mathbf{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} .\end{aligned}$$

Аналогічно встановлюється формула для косинуса потрійного кута:

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha .$$

Формули потрійного кута

Подібно до формул подвійного кута встановлюються формули для тригонометричних функцій **потрійного кута**.

Використовуючи формулу для синуса суми, а також формули подвійного кута, отримуємо вираз **синуса потрійного кута**:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = \\&= (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = \\&= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \\&= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = \mathbf{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha} .\end{aligned}$$

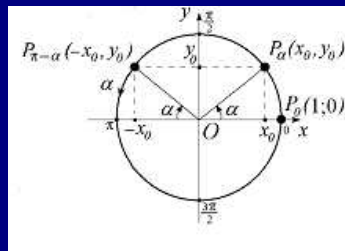
Аналогічно встановлюється формула для **косинуса потрійного кута**:

$$\cos 3\alpha = \mathbf{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} .$$

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для



якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кут $\pi - \alpha$.

Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.

Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha$,

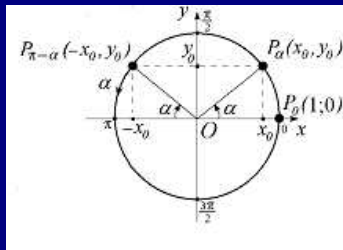
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$,

$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для



якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут $\pi - \alpha$.

Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.

Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha$,

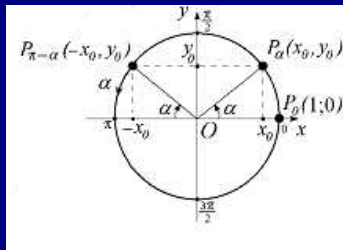
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$,

$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для



якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут $\pi - \alpha$.

Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.

Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha,$$

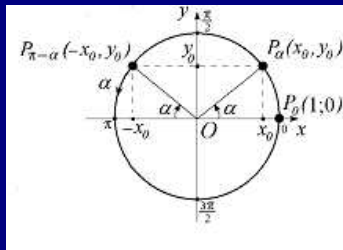
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кут $\pi - \alpha$. Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.



Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha$,

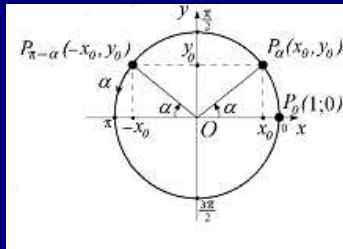
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кут $\pi - \alpha$. Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.



Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha$,

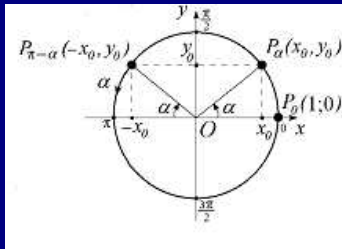
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$,

$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Формули зведення

Формули зведення дозволяють виразити тригонометричні функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ і т.п. через тригонометричні функції кута α .

Відмітимо на одиничному колі точку $P_\alpha(x_0, y_0)$, для якої кут $\alpha \in (0; \pi/2)$, а також точку $P_{\pi-\alpha}$, отриману в результаті повороту точки $P_0(1;0)$ на кут $\pi - \alpha$. Оскільки точки P_α і $P_{\pi-\alpha}$ симетричні відносно осі Oy , то точка $P_{\pi-\alpha}$ має координати $(-x_0, y_0)$.



Тоді за означенням $\sin(\pi - \alpha) = y_0 = \sin \alpha$,

$$\cos(\pi - \alpha) = -x_0 = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Формули зведення

Аналогічно встановлюються інші **формули зведення**, які виражають тригонометричні функції деяких спеціальних "складних" кутів через тригонометричні функції відповідних гострих кутів. Нижче в таблиці містяться основні **формули зведення** (зазначимо, що ці формули справедливі не тільки для гострого кута α , але і для довільного $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$).

Функція	Кут β						
	Функція не змінюється			Функція змінюється			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \beta$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Наприклад, перетворимо вираз $\cos(\pi + \alpha)$. На перетині рядка " $\cos \beta$ " і стовпчика " $\pi + \alpha$ " знаходимо результат: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

Формули зведення

Аналогічно встановлюються інші **формули зведення**, які виражають тригонометричні функції деяких спеціальних "складних" кутів через тригонометричні функції відповідних гострих кутів. Нижче в таблиці містяться основні **формули зведення** (зазначимо, що ці формули справедливі не тільки для гострого кута α , але і для довільного $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$).

Функція	Кут β						
	Функція не змінюється			Функція змінюється			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin \beta$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Наприклад, перетворимо вираз $\cos(\pi + \alpha)$. На перетині рядка " $\cos \beta$ " і стовпчика " $\pi + \alpha$ " знаходимо результат: $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

Формули зведення

Сформулюємо правила запам'ятовування **формул зведення**:

- при перетворенні тригонометричної функції кутів $\pi \pm \alpha$ в функцію кута α сама функція не змінюється. Навпаки, при перетворенні тригонометричної функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ в функцію кута α початкова функція змінюється (синус змінюється на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс);
- **знак** в правій частині кожної формули зведення співпадає зі знаком **початкової функції**, що міститься в лівій частині формули, в тій чверті одиничного кола, в якій знаходиться початковий кут $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ при гострому куті α .



На мал. вказано функції, що приймають **додатні** значення у відповідних чвертях одиничного кола.

Формули зведення

Сформулюємо правила запам'ятовування **формул зведення**:

- при перетворенні тригонометричної функції кутів $\pi \pm \alpha$ в функцію кута α сама **функція не змінюється**. Навпаки, при перетворенні тригонометричної функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ в функцію кута α початкова **функція змінюється** (синус змінюється на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс);
- **знак** в правій частині кожної формули зведення співпадає зі знаком **початкової функції**, що міститься в лівій частині формули, в тій чверті одиничного кола, в якій знаходиться початковий кут $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ при гострому куті α .



На мал. вказано функції, що приймають **додатні** значення у відповідних чвертях одиничного кола.

Формули зведення

Сформулюємо правила запам'ятовування **формул зведення**:

- при перетворенні тригонометричної функції кутів $\pi \pm \alpha$ в функцію кута α сама **функція не змінюється**. Навпаки, при перетворенні тригонометричної функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ в функцію кута α початкова **функція змінюється** (синус змінюється на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс);
- **знак** в правій частині кожної формули зведення співпадає зі знаком **початкової функції**, що міститься в лівій частині формули, в тій чверті одиничного кола, в якій знаходиться початковий кут $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ при гострому куті α .

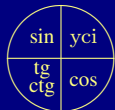


На мал. вказано функції, що приймають **додатні** значення у відповідних чвертях одиничного кола.

Формули зведення

Сформулюємо правила запам'ятовування **формул зведення**:

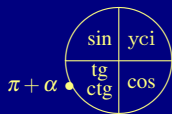
- при перетворенні тригонометричної функції кутів $\pi \pm \alpha$ в функцію кута α сама **функція не змінюється**. Навпаки, при перетворенні тригонометричної функції кутів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ в функцію кута α початкова **функція змінюється** (синус змінюється на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс);
- **знак** в правій частині кожної формули зведення співпадає зі знаком **початкової функції**, що міститься в лівій частині формули, в тій чверті одиничного кола, в якій знаходиться початковий кут $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ при гострому куті α .



На мал. вказано функції, що приймають **додатні** значення у відповідних чвертях одиничного кола.

Формули зведення

Наприклад, випишемо такі **формули зведення**:



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha,$$

$$\text{ctg}(\pi + \alpha) = \text{ctg} \alpha;$$

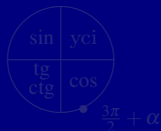


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ctg} \alpha,$$

$$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg} \alpha;$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{ctg} \alpha,$$

$$\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg} \alpha.$$

Формули зведення

Наприклад, випишемо такі **формули зведення**:

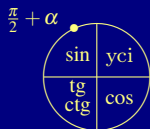


$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$$

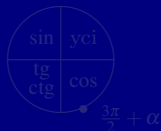


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha;$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

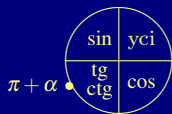
$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Формули зведення

Наприклад, випишемо такі **формули зведення**:

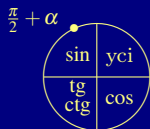


$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$$

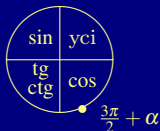


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha;$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$\sin (5\pi + \alpha) + \cos (270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin (5\pi + \alpha) = \sin (4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin (4\pi + \pi + \alpha) = \sin (\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos (270^\circ + \alpha) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$\sin (5\pi + \alpha) + \cos (270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) =$
 $= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо
 $\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$
$$= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Приклади

Приклад 9. Обчислити: $\cos 120^\circ$.

Розв'язання. Маємо $\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) =$
 $= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\cos 120^\circ = -0,5$.

Приклад 10. Спростити:

$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Розв'язання. Подамо перший доданок у вигляді:
 $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(4\pi + \pi + \alpha)$. Далі, враховуючи, що
число 4π є періодом функції $y = \sin x$, отримуємо
рівність $\sin(4\pi + \pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha)$. Тепер за
формулами зведення маємо: $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$,
 $\cos(270^\circ + \alpha) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Отже, остаточно отримуємо

$\sin(5\pi + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$
 $= -\sin \alpha + \sin \alpha - (-\operatorname{tg} \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$.

Відповідь: $\operatorname{tg} \alpha$.

Формули перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій в добуток

Перетворенню суми (або різниці) тригонометричних функцій в добуток слугує відповідна група формул:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

- Нагадаємо, що $\sin \alpha + \sin \beta \neq \sin(\alpha + \beta)$, $\sin \alpha - \sin \beta \neq \sin(\alpha - \beta)$ і т.п. В цих формулах $\sin$ не можна винести за дужки, оскільки $\sin$ є не спільним множником, а функцією від відповідних кутів.

Формули перетворення суми (різниці) тригонометричних функцій в добуток

Перетворенню суми (або різниці) тригонометричних функцій в добуток слугує відповідна група формул:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

- Нагадаємо, що $\sin \alpha + \sin \beta \neq \sin(\alpha + \beta)$,
 $\sin \alpha - \sin \beta \neq \sin(\alpha - \beta)$ і т.п. В цих формулах $\sin$ не можна винести за дужки, оскільки $\sin$ є не спільним множником, а функцією від відповідних кутів.

Приклад

Приклад 11. Спростити: $\frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

Розв'язання. Групуємо в чисельнику і знаменнику перший доданок з третім, а потім перетворюючи записані в дужках суми в добуток, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{(\sin 3\alpha + \sin \alpha) + 3 \sin 2\alpha}{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + 3 \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

Тепер, виносячи в чисельнику за дужки спільний множник $\sin 2\alpha$, а в знаменнику – $\cos 2\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)}{\cos 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Приклад

Приклад 11. Спростити: $\frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

Розв'язання. Групуємо в чисельнику і знаменнику перший доданок з третім, а потім перетворюючи записані в дужках суми в добуток, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{(\sin 3\alpha + \sin \alpha) + 3 \sin 2\alpha}{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + 3 \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Тепер, виносячи в чисельнику за дужки спільний множник $\sin 2\alpha$, а в знаменнику — $\cos 2\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)}{\cos 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Приклад

Приклад 11. Спростити: $\frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

Розв'язання. Групуємо в чисельнику і знаменнику перший доданок з третім, а потім перетворюючи записані в дужках суми в добуток, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{(\sin 3\alpha + \sin \alpha) + 3 \sin 2\alpha}{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + 3 \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Тепер, виносячи в чисельнику за дужки спільний множник $\sin 2\alpha$, а в знаменнику – $\cos 2\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)}{\cos 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Приклад

Приклад 11. Спростити: $\frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

Розв'язання. Групуємо в чисельнику і знаменнику перший доданок з третім, а потім перетворюючи записані в дужках суми в добуток, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + 3 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 3 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{(\sin 3\alpha + \sin \alpha) + 3 \sin 2\alpha}{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + 3 \cos 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha - \alpha}{2} + 3 \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha + 3 \sin 2\alpha}{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 3 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Тепер, виносячи в чисельнику за дужки спільний множник $\sin 2\alpha$, а в знаменнику – $\cos 2\alpha$, отримуємо:

$$\frac{\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)}{\cos 2\alpha (2 \cos \alpha + 3)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Відповідь: $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

З формул перетворення суми (різниць) тригонометричних функцій в добуток впливають формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)) ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)) ,$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)) .$$

В наступному прикладі розглядається вираз, значення якого обчислене раніше в прикладі 5.

Тут ми розглянемо більш швидкий спосіб розв'язання, який використовує формулу перетворення добутку косинусів в суму.

Формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

З формул перетворення суми (різниць) тригонометричних функцій в добуток впливають формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)) ,$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)) ,$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)) .$$

В наступному прикладі розглядається вираз, значення якого обчислене раніше в прикладі 5.

Тут ми розглянемо більш швидкий спосіб розв'язання, який використовує формулу перетворення добутку косинусів в суму.

Приклад

Приклад 12. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо добуток косинусів за формулою $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$,

а саме: $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos(-2\alpha) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right)$$

(ми скористались також властивістю парності косинуса і тим, що $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$).

Повертаючись тепер до початкового виразу і використовуючи також формулу косинуса подвійного кута $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, отримуємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \left(1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 \alpha \right) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклад

Приклад 12. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо добуток косинусів за формулою $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$,

а саме: $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \frac{2\pi}{3} + \cos(-2\alpha)) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2})$$

(ми скористались також властивістю парності косинуса і тим, що $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$).

Повертаючись тепер до початкового виразу і використовуючи також формулу косинуса подвійного кута $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, отримуємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2}) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклад

Приклад 12. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо добуток косинусів за формулою $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$,

а саме: $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \frac{2\pi}{3} + \cos(-2\alpha)) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2})$$

(ми скористались також властивістю парності косинуса і тим, що $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$).

Повертаючись тепер до початкового виразу і використовуючи також формулу косинуса подвійного кута $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, отримуємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2}) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Приклад

Приклад 12. Спростити: $\sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.

Розв'язання. Перетворимо добуток косинусів за формулою $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$,

а саме: $\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) =$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos \frac{2\pi}{3} + \cos(-2\alpha)) = \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2})$$

(ми скористались також властивістю парності косинуса і тим, що $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$).

Повертаючись тепер до початкового виразу і використовуючи також формулу косинуса подвійного кута $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, отримуємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \frac{1}{2}) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,25.

Вирази тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

Відзначимо ще ряд важливих формул, що є умовними тотожностями (в них області визначення лівої і правої частин рівностей різні).

Такими, зокрема, є вирази тригонометричних функцій через тангенс половинного кута:

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, що в наведених формулах $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ визначені при всіх $\alpha \in \mathbf{R}$ в той час, як праві частини цих формул містять тангенс, який визначений не при всіх α . Умови, при яких виконуються ці рівності, вказані поруч із самими формулами.

Вирази тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

З наведених виразів $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ випливає наступна умовна тотожність:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

в якій область визначення лівої частини рівності ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$) ширша, ніж область визначення його правої частини (тут є додаткова умова $\alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$).

А ось формула, яка виражає котангенс через тангенс половинного кута:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)},$$

навпаки, є абсолютною тотожністю. Дійсно, обидві частини цієї рівності визначені при $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$, тобто їх області визначення співпадають.

Вирази тригонометричних функцій через тангенс половинного кута

З наведених виразів $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ випливає наступна умовна тотожність:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

в якій область визначення лівої частини рівності ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$) ширша, ніж область визначення його правої частини (тут є додаткова умова $\alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$).

А ось формула, яка виражає котангенс через тангенс половинного кута:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2\operatorname{tg}(\alpha/2)},$$

навпаки, є **абсолютною тотожністю**. Дійсно, обидві частини цієї рівності визначені при $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbf{Z}$, тобто їх області визначення співпадають.

Приклад

Приклад 13. Обчислити: $\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Розв'язання. Відзначимо, що для кута 2α половинним кутом є α . Тому

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Підставляючи тепер числові значення $\sin 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ в початковий вираз, отримуємо:

$$\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 : \frac{4}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{5}{4} + 4 = 5 + 4 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад

Приклад 13. Обчислити: $\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Розв'язання. Відзначимо, що для кута 2α половинним кутом є α . Тому

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Підставляючи тепер числові значення $\sin 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ в початковий вираз, отримуємо:

$$\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 : \frac{4}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{5}{4} + 4 = 5 + 4 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад

Приклад 13. Обчислити: $\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Розв'язання. Відзначимо, що для кута 2α половинним кутом є α . Тому

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Підставляючи тепер числові значення $\sin 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ в початковий вираз, отримуємо:

$$\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 : \frac{4}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{5}{4} + 4 = 5 + 4 = 9.$$

Відповідь: 9.

Приклад

Приклад 13. Обчислити: $\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Розв'язання. Відзначимо, що для кута 2α половинним кутом є α . Тому

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Підставляючи тепер числові значення $\sin 2\alpha$ і $\operatorname{tg} 2\alpha$ в початковий вираз, отримуємо:

$$\frac{4}{\sin 2\alpha} - 3 \operatorname{tg} 2\alpha = 4 : \frac{4}{5} - 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \cdot \frac{5}{4} + 4 = 5 + 4 = 9.$$

Відповідь: 9.

Формула тангенса суми (різниці) кутів

Також не є абсолютними тотожностями **формули тангенса суми або різниці кутів**:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, що праві частини наведених формул, які містять $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta$, потребують додаткових (у порівнянні з лівими частинами) обмежень на їх область визначення: $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

- Підкреслимо, що безграмотне використання при розв'язанні рівнянь і нерівностей формул, які не є абсолютними тотожностями, веде до нерівносильних перетворень, тобто або до втрати розв'язків, або до появи сторонніх розв'язків.

Формула тангенса суми (різниці) кутів

Також не є абсолютними тотожностями **формули тангенса суми або різниці кутів**:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Очевидно, що праві частини наведених формул, які містять $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta$, потребують додаткових (у порівнянні з лівими частинами) обмежень на їх область визначення: $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

- Підкреслимо, що **безграмотне використання при розв'язанні рівнянь і нерівностей формул, які не є абсолютними тотожностями, веде до нерівносілних перетворень, тобто або до втрати розв'язків, або до появи сторонніх розв'язків.**