

Тригонометрія: обернені тригонометричні функції

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 20 (частина третя)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

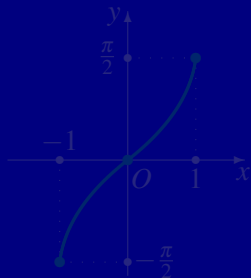
Функція $y = \arcsin x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arcsin a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \sin \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arcsin a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

тобто функція $y = \arcsin x$ є непарною.

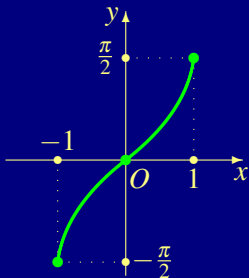
Функція $y = \arcsin x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arcsin a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \sin \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arcsin a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

тобто функція $y = \arcsin x$ є непарною.

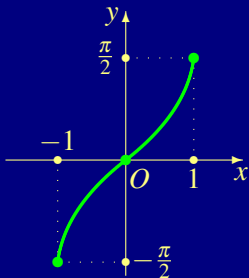
Функція $y = \arcsin x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arcsin a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ \sin \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arcsin a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arcsin x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

тобто функція $y = \arcsin x$ є непарною.

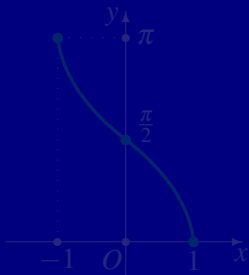
Функція $y = \arccos x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arccos a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arccos a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arccos x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [0; \pi].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

тобто функція $y = \arccos x$ не є ні парною, ні непарною.

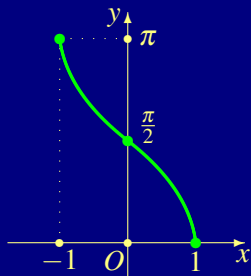
Функція $y = \arccos x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arccos a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arccos a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arccos x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [0; \pi].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

тобто функція $y = \arccos x$ не є ні парною, ні непарною.

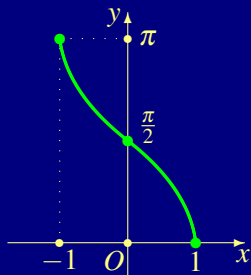
Функція $y = \arccos x$

За означенням при $a \in [-1; 1]$:

$$\arccos a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = a. \end{cases}$$

- $\arccos a$ не визначений при $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$!

Графік функції $y = \arccos x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = [-1; 1];$$

Область значень

$$E(y) = [0; \pi].$$

Справедливе співвідношення:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad \text{при усіх } x \in [-1; 1],$$

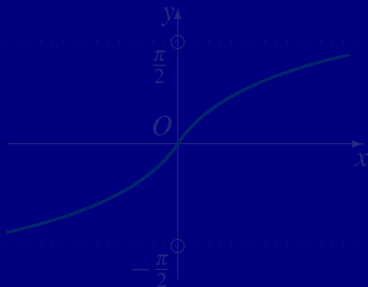
тобто функція $y = \arccos x$ не є ні парною, ні непарною.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

За означенням

$$\operatorname{arctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \operatorname{tg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Справедливе співвідношення:

$$\boxed{\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R}},$$

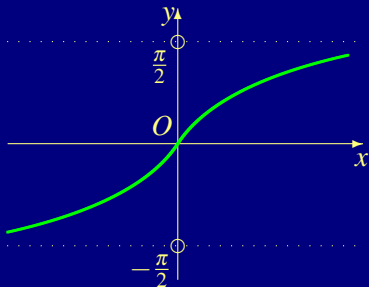
тобто функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

За означенням

$$\operatorname{arctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \operatorname{tg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

Справедливе співвідношення:

$$\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R},$$

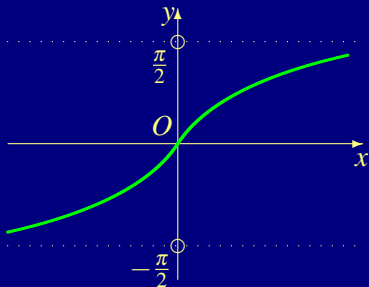
тобто функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$

За означенням

$$\operatorname{arctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \operatorname{tg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

Справедливе співвідношення:

$$\boxed{\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R}},$$

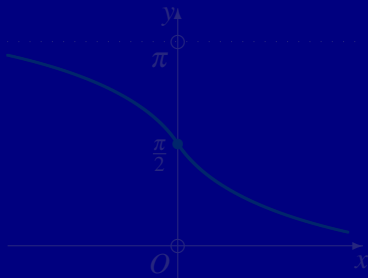
тобто функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною.

Функція $y = \operatorname{arccotg} x$

За означенням

$$\operatorname{arccotg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (0, \pi), \\ \operatorname{ctg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arccotg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (0; \pi).$$

Справедливе співвідношення:

$$\operatorname{arccotg} (-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R},$$

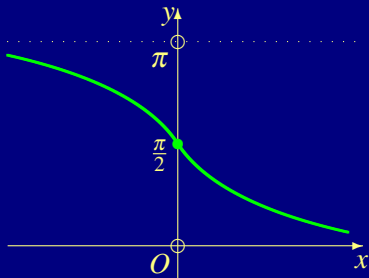
тобто функція $y = \operatorname{arccotg} x$ не є ні парною, ні непарною.

Функція $y = \operatorname{arccctg} x$

За означенням

$$\operatorname{arccctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (0, \pi), \\ \operatorname{ctg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arccctg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (0; \pi).$$

Справедливе співвідношення:

$$\operatorname{arccctg} (-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R},$$

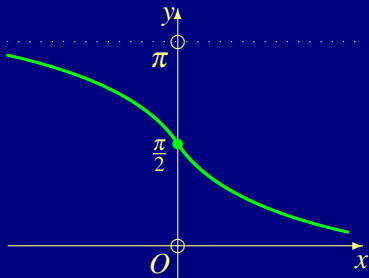
тобто функція $y = \operatorname{arccctg} x$ не є ні парною, ні непарною.

Функція $y = \operatorname{arcctg} x$

За означенням

$$\operatorname{arcctg} a = \alpha \iff \begin{cases} \alpha \in (0, \pi), \\ \operatorname{ctg} \alpha = a. \end{cases}$$

Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ зображено на мал.:



Область визначення

$$D(y) = \mathbf{R};$$

Область значень

$$E(y) = (0; \pi).$$

Справедливе співвідношення:

$$\boxed{\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad \text{при усіх } x \in \mathbf{R}},$$

тобто функція $y = \operatorname{arcctg} x$ не є ні парною, ні непарною.

Деякі властивості обернених тригонометричних функцій

Отже, функції $y = \arcsin x$ і $y = \arctg x$ є непарними, оскільки:

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= -\arcsin x && \text{при усіх } x \in [-1; 1], \\ \arctg(-x) &= -\arctg x && \text{при усіх } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

У той же час, функції $y = \arccos x$ і $y = \operatorname{arccotg} x$ не є ні парними, ні непарними. Для них справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned}\arccos(-x) &= \pi - \arccos x && \text{при усіх } x \in [-1; 1], \\ \operatorname{arccotg}(-x) &= \pi - \operatorname{arccotg} x && \text{при усіх } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Деякі властивості обернених тригонометричних функцій

Отже, функції $y = \arcsin x$ і $y = \arctg x$ є непарними, оскільки:

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= -\arcsin x && \text{при усіх } x \in [-1; 1], \\ \arctg(-x) &= -\arctg x && \text{при усіх } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

У той же час, функції $y = \arccos x$ і $y = \text{arcctg } x$ не є ні парними, ні непарними. Для них справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned}\arccos(-x) &= \pi - \arccos x && \text{при усіх } x \in [-1; 1], \\ \text{arcctg}(-x) &= \pi - \text{arcctg } x && \text{при усіх } x \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Деякі властивості обернених тригонометричних функцій

З означення обернених тригонометричних функцій випливають рівності:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin a) &= a, & \cos(\arccos a) &= a & \text{при усіх } a \in [-1; 1]; \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) &= a, & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) &= a & \text{при усіх } a \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Крім того, для будь-якого $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ справедливі рівності:

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin \alpha) &= \alpha; & \arccos(\cos \alpha) &= \alpha; \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) &= \alpha; & \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) &= \alpha.\end{aligned}$$

- Зазначимо, що останні рівності, як правило, не виконуються у випадку, коли α не є гострим кутом. Так, наприклад, $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) \neq \frac{5\pi}{6}$! Дійсно, $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Тому $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Деякі властивості обернених тригонометричних функцій

З означення обернених тригонометричних функцій випливають рівності:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin a) &= a, & \cos(\arccos a) &= a & \text{при усіх } a \in [-1; 1]; \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) &= a, & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) &= a & \text{при усіх } a \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Крім того, для будь-якого $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ справедливі рівності:

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin \alpha) &= \alpha; & \arccos(\cos \alpha) &= \alpha; \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) &= \alpha; & \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) &= \alpha.\end{aligned}$$

- Зазначимо, що останні рівності, як правило, не виконуються у випадку, коли α не є гострим кутом. Так, наприклад, $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) \neq \frac{5\pi}{6}$! Дійсно, $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Тому $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Деякі властивості обернених тригонометричних функцій

З означення обернених тригонометричних функцій випливають рівності:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin a) &= a, & \cos(\arccos a) &= a & \text{при усіх } a \in [-1; 1]; \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) &= a, & \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) &= a & \text{при усіх } a \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Крім того, для будь-якого $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ справедливі рівності:

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin \alpha) &= \alpha; & \arccos(\cos \alpha) &= \alpha; \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) &= \alpha; & \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} \alpha) &= \alpha.\end{aligned}$$

- Зазначимо, що останні рівності, як правило, не виконуються у випадку, коли α не є гострим кутом. Так, наприклад, $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) \neq \frac{5\pi}{6}$!
Дійсно, $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Тому $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 1. Обчислити: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{arctg} x$ є непарною, то $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Використовуючи відповідну властивість арккосинуса, отримуємо $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Отже, маємо

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{-2\pi + 5\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Обчислити: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}))$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{ctg} x$ є непарною, то $\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тепер, використовуючи відповідну властивість арккотангенса, отримуємо $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{3})) = \operatorname{arcctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

(оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$

(оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 3. Обчислити: $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо $\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи непарність арксинуса, маємо $\arcsin\left(\sin \frac{6\pi}{5}\right) = \arcsin\left(-\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $-\frac{\pi}{5}$.

Приклад 4. Обчислити: $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right)$.

Розв'язання. Використовуючи одну з формул зведення, отримуємо $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \frac{\pi}{5}$.

Далі, враховуючи відповідну властивість арккосинуса, маємо $\arccos\left(\cos \frac{6\pi}{5}\right) = \arccos\left(-\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \arccos\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ (оскільки $\pi/5$ – гострий кут).

Відповідь: $\frac{4\pi}{5}$.

Приклади

Приклад 5. Знайти $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin \frac{1}{4} = \alpha$. За означенням арксинуса маємо $\sin \alpha = 1/4$ і $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Проте зазначимо, що оскільки $\sin \alpha$ додатний і не рівний 1, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином, необхідно знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Оскільки тепер $0 < \alpha/2 < \pi/4$, то $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

В свою чергу, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Отже,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}.$$

Відповідь: $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 5. Знайти $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin \frac{1}{4} = \alpha$. За означенням арксинуса маємо $\sin \alpha = 1/4$ і $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Проте зазначимо, що оскільки $\sin \alpha$ додатний і не рівний 1, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином, необхідно знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Оскільки тепер $0 < \alpha/2 < \pi/4$, то $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

В свою чергу, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Отже,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}.$$

Відповідь: $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 5. Знайти $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin \frac{1}{4} = \alpha$. За означенням арксинуса маємо $\sin \alpha = 1/4$ і $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Проте зазначимо, що оскільки $\sin \alpha$ додатний і не рівний 1, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином, необхідно знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Оскільки тепер $0 < \alpha/2 < \pi/4$, то $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

В свою чергу, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Отже,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}.$$

Відповідь: $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 5. Знайти $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin \frac{1}{4} = \alpha$. За означенням арксинуса маємо $\sin \alpha = 1/4$ і $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Проте зазначимо, що оскільки $\sin \alpha$ додатний і не рівний 1, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином, необхідно знайти $\sin \frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin \alpha = 1/4$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Оскільки тепер $0 < \alpha/2 < \pi/4$, то $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

В свою чергу, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Отже,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}.$$

Відповідь: $\sin\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$.

Приклади

Приклад 5. Знайти $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin\frac{1}{4} = \alpha$. За означенням арксинуса маємо $\sin\alpha = 1/4$ і $\alpha \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Проте зазначимо, що оскільки $\sin\alpha$ додатний і не рівний 1, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином, необхідно знайти $\sin\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha = 1/4$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Оскільки тепер $0 < \alpha/2 < \pi/4$, то $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

В свою чергу, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Отже,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}.$$

Відповідь: $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{15}}{8}}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha \iff$
 $\iff 5\sin \alpha = 3\cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто
 $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

Відповідь: $0,6$.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотожності випливає рівність
 $\cos \alpha < 0$



$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.

Відповідь: $-0,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4 \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4 \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \cos \alpha - \sin \alpha \iff$

$\iff 5 \sin \alpha = 3 \cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

Відповідь: $0,6$.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотож-

$\cos \alpha < 0$

ності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.



Відповідь: $-0,6$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha \iff$

$\iff 5\sin \alpha = 3\cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

Відповідь: 0,6.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотож-

$\cos \alpha < 0$ ності випливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.

Відповідь: -0,6.



Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha \iff$

$\iff 5\sin \alpha = 3\cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

Відповідь: 0,6.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотож-

$\cos \alpha < 0$

ності впливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.



Відповідь: -0,6.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha \iff$

$\iff 5\sin \alpha = 3\cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

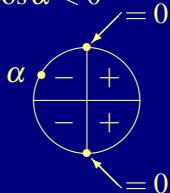
Відповідь: 0,6.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотож-

$\cos \alpha < 0$



ності впливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.

Відповідь: -0,6.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Пробне тестування ЗНО, 2016 р.).

Обчисліть $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha$.

Розв'язання. $4\sin \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha - \sin \alpha \iff$

$\iff 5\sin \alpha = 3\cos \alpha$, звідки маємо $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$.

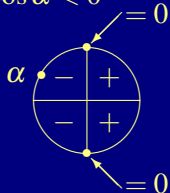
Відповідь: 0,6.

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2009 р.).

Знайти $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,8$ і $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Розв'язання. З основної тригонометричної тотож-

$\cos \alpha < 0$



ності впливає рівність

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Оскільки $\pi/2 < \alpha < \pi$, то $\cos \alpha < 0$.

Отже, $\cos \alpha = -0,6$.

Відповідь: -0,6.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arctg \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса маємо $\tg \alpha = 2/3$ і $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Оскільки $\tg \alpha$ додатній, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Отже, необхідно обчислити $2\sqrt{13} \cos \alpha$, якщо $\tg \alpha = 2/3$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Використовуючи тотожність $1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,

обчислюємо $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, звідки $\cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$ і $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, оскільки $\cos \alpha > 0$ для $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos \alpha = 2\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arctg \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса маємо $\tg \alpha = 2/3$ і $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Оскільки $\tg \alpha$ додатній, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Отже, необхідно обчислити $2\sqrt{13} \cos \alpha$, якщо $\tg \alpha = 2/3$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Використовуючи тотожність $1 + \tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,

обчислюємо $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, звідки $\cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$ і $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, оскільки $\cos \alpha > 0$ для $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos \alpha = 2\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arctg \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса маємо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha$ додатній, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Отже, необхідно обчислити $2\sqrt{13} \cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Використовуючи тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,

обчислюємо $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, звідки $\cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$ і $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, оскільки $\cos \alpha > 0$ для $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos \alpha = 2\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arctg \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса маємо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha$ додатній, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Отже, необхідно обчислити $2\sqrt{13} \cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Використовуючи тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,

обчислюємо $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, звідки $\cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$ і $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, оскільки $\cos \alpha > 0$ для $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos \alpha = 2\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть $2\sqrt{13} \cos\left(\arctg \frac{2}{3}\right)$.

Розв'язання. Позначимо $\arctg \frac{2}{3} = \alpha$. За означенням арктангенса маємо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha$ додатній, то насправді $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Отже, необхідно обчислити $2\sqrt{13} \cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2/3$ і $0 < \alpha < \pi/2$.

Використовуючи тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$,

обчислюємо $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9}$, звідки $\cos^2 \alpha = \frac{9}{13}$ і $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, оскільки $\cos \alpha > 0$ для $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Таким чином,

$$2\sqrt{13} \cos \alpha = 2\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Відповідь: 6.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18$.

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18$.

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто

$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18.$$

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.).

Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18$.

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18$.

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). Знайти значення виразу $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

Розв'язання. З рівності $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 4$ випливає рівність $(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 16$, тобто $\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16$, звідки знаходимо $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 16 + 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 16 + 2 = 18$.

Відповідь: 18.

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2013 р.). Спростіть вираз $\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha)$.

Розв'язання. Спрощення виконуємо при допустимих значеннях α , тобто на області визначення виразу.

Маємо

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Відповідь: $-\cos 2\alpha$.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 11 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Знайдіть значення виразу $\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно формулу різниці квадратів, основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса подвійного кута, отримуємо

$$\begin{aligned}\cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \\ &= \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\sqrt{3}/2$.

Приклад 12 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.).

Обчисліть $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу синуса подвійного кута і рівність $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ = 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ &= \\ &= (2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) (\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ) = (\sin 30^\circ) \cdot 1 = 0,5.\end{aligned}$$

Відповідь: 0,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 13 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2010 р.).
Обчисліть $\sin 210^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи відповідну формулу зведення, отримуємо

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -0,5.$$

Відповідь: $-0,5$.

Приклад 14 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin \alpha + \sin \beta$, якщо $\alpha - \beta = 180^\circ$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми синусів у добуток і враховуючи, що $\alpha - \beta = 180^\circ$, отримуємо

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos 90^\circ = 0.$$

Відповідь: 0 .

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -1$.

Розв'язання. Зауважимо, що $\operatorname{tg} \alpha = 1/\operatorname{ctg} \alpha = -1$.
Тепер, виражаючи синус через тангенс половинного кута і враховуючи, що для кута 2α половинним кутом є α , отримуємо

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot (-1)}{1 + (-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Відповідь: -1 .

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -1$.

Розв'язання. Зауважимо, що $\operatorname{tg} \alpha = 1/\operatorname{ctg} \alpha = -1$.

Тепер, виражаючи синус через тангенс половинного кута і враховуючи, що для кута 2α половинним кутом є α , отримуємо

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot (-1)}{1 + (-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Відповідь: -1 .

Приклади із ЗНО

Приклад 15 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть значення виразу $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -1$.

Розв'язання. Зауважимо, що $\operatorname{tg} \alpha = 1/\operatorname{ctg} \alpha = -1$.

Тепер, виражаючи синус через тангенс половинного кута і враховуючи, що для кута 2α половинним кутом є α , отримуємо

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot (-1)}{1 + (-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Відповідь: -1 .