# Тригонометрія: способи розв'язання тригонометричних рівнянь

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 21

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Розглянемо деякі типи тригонометричних рівнянь і способи їх розв'язання, а саме:

- рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій, що розв'язуються за допомогою найпростіших замін змінних;
- однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних;
- рівняння, що розв'язуються шляхом розкладу на множники відповідних тригонометричних виразів;
- рівняння $a\sin t + b\cos t = c$, яке розв'язується введенням допоміжного кута.

Розглянемо деякі типи тригонометричних рівнянь і способи їх розв'язання, а саме:

- рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій, що розв'язуються за допомогою найпростіших замін змінних;
- однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних;
- рівняння, що розв'язуються шляхом розкладу на множники відповідних тригонометричних виразів;
- рівняння $a\sin t + b\cos t = c$, яке розв'язується введенням допоміжного кута.

Розглянемо деякі типи тригонометричних рівнянь і способи їх розв'язання, а саме:

- рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій, що розв'язуються за допомогою найпростіших замін змінних;
- однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних;
- рівняння, що розв'язуються шляхом розкладу на множники відповідних тригонометричних виразів;
- рівняння $a \sin t + b \cos t = c$, яке розв'язується введенням допоміжного кута.

Розглянемо деякі типи тригонометричних рівнянь і способи їх розв'язання, а саме:

- рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій, що розв'язуються за допомогою найпростіших замін змінних;
- однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних;
- рівняння, що розв'язуються шляхом розкладу на множники відповідних тригонометричних виразів;
- рівняння $a \sin t + b \cos t = c$, яке розв'язується введенням допоміжного кута.

Розглянемо деякі типи тригонометричних рівнянь і способи їх розв'язання, а саме:

- рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій, що розв'язуються за допомогою найпростіших замін змінних;
- однорідні рівняння і рівняння, що зводяться до однорідних;
- рівняння, що розв'язуються шляхом розкладу на множники відповідних тригонометричних виразів;
- рівняння $a\sin t + b\cos t = c$, яке розв'язується введенням допоміжного кута.

# Рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій (найпростіші заміни змінних)

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

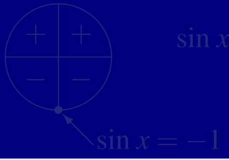
Розв'язання. В результаті очевидної заміни $t = \sin x$ отримуємо квадратне рівняння

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left[ \begin{array}{l} t = -1, \\ t = -1/2. \end{array} \right.$$

Далі після зворотньої заміни $t = \sin x$ маємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array} \right.$$

Випишемо розв'язки цих рівнянь:




$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

# Рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій (найпростіші заміни змінних)

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

Розв'язання. В результаті очевидної заміни $t = \sin x$ отримуємо квадратне рівняння

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -1/2. \end{array}\right.$$

Далі після зворотньої заміни $t = \sin x$ маємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array}\right.$$

Випишемо розв'язки цих рівнянь:


$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

$\sin x = -1$

# Рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій (найпростіші заміни змінних)

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

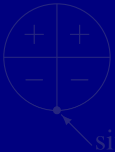
Розв'язання. В результаті очевидної заміни $t = \sin x$ отримуємо квадратне рівняння

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left[ \begin{array}{l} t = -1, \\ t = -1/2. \end{array} \right.$$

Далі після зворотньої заміни $t = \sin x$ маємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[ \begin{array}{l} \sin x = -1\,, \\ \sin x = -1/2\,. \end{array} \right.$$

Випишемо розв'язки цих рівнянь:




$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$$

$\sin x = -1$

# Рівняння, раціональні відносно основних тригонометричних функцій (найпростіші заміни змінних)

П р и к л а д 1. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

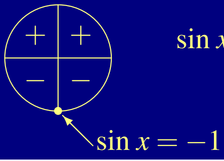
Р о з в' я з а н н я. В результаті очевидної заміни $t = \sin x$ отримуємо квадратне рівняння

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -1/2. \end{array}\right.$$

Далі після зворотньої заміни $t = \sin x$ маємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array}\right.$$

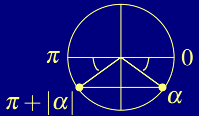
Випишемо розв'язки цих рівнянь:




$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

$$\sin x = -1/2 \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$




$$\alpha = \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\arcsin\tfrac{1}{2} = -\tfrac{\pi}{6},$$

$$\pi + |\alpha| = \pi + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{7\pi}{6}$$

(ми записали розв'язки рівняння $\sin x = -1/2$ у вигляді двох періодичних серій).

Отже,

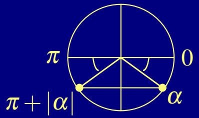
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

$$\sin x = -1/2 \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$




$$\alpha = \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\arcsin\tfrac{1}{2} = -\tfrac{\pi}{6},$$

$$\pi + |\alpha| = \pi + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{7\pi}{6}$$

(ми записали розв'язки рівняння $\sin x = -1/2$ у вигляді двох періодичних серій).

Отже,

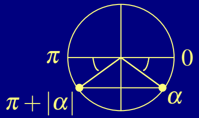
$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

$$\sin x = -1/2 \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$




$$\alpha = \arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\arcsin\tfrac{1}{2} = -\tfrac{\pi}{6},$$

$$\pi + |\alpha| = \pi + \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{7\pi}{6}$$

(ми записали розв'язки рівняння $\sin x = -1/2$ у вигляді двох періодичних серій).

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = -1/2. \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

Інші рівняння такого типу містять квадрат косинуса і синус одного кута (наприклад, $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$) або квадрат синуса і косинус одного кута (наприклад, $2\sin^2 4x = 3 + 3\cos 4x$), або косинус чи синус кута і косинус подвійного кута (наприклад, $\cos 2x = 2 + 3\cos x$ або $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуємо рівність $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (наслідок основної тригонометричної тотожності):
$2\cos^2 x = 3 + 3\sin x \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) = 3 + 3\sin x$.
Очевидно, що отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Крім того, зазначимо, що після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$, яке розглянуто в попередньому прикладі.

# Найпростіші заміни змінних

Інші рівняння такого типу містять квадрат косинуса і синус одного кута (наприклад, $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$) або квадрат синуса і косинус одного кута (наприклад, $2\sin^2 4x = 3 + 3\cos 4x$), або косинус чи синус кута і косинус подвійного кута (наприклад, $\cos 2x = 2 + 3\cos x$ або $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$).

П р и к л а д 2. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуємо рівність $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (наслідок основної тригонометричної тотожності):
$2\cos^2 x = 3 + 3\sin x \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) = 3 + 3\sin x$.
Очевидно, що отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Крім того, зазначимо, що після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$, яке розглянуто в попередньому прикладі.

# Найпростіші заміни змінних

Інші рівняння такого типу містять квадрат косинуса і синус одного кута (наприклад, $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$) або квадрат синуса і косинус одного кута (наприклад, $2\sin^2 4x = 3 + 3\cos 4x$), або косинус чи синус кута і косинус подвійного кута (наприклад, $\cos 2x = 2 + 3\cos x$ або $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуємо рівність $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (наслідок основної тригонометричної тотожності):
$2\cos^2 x = 3 + 3\sin x \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) = 3 + 3\sin x$.
Очевидно, що отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Крім того, зазначимо, що після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$, яке розглянуто в попередньому прикладі.

# Найпростіші заміни змінних

Інші рівняння такого типу містять квадрат косинуса і синус одного кута (наприклад, $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$) або квадрат синуса і косинус одного кута (наприклад, $2\sin^2 4x = 3 + 3\cos 4x$), або косинус чи синус кута і косинус подвійного кута (наприклад, $\cos 2x = 2 + 3\cos x$ або $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2\cos^2 x = 3 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуємо рівність $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (наслідок основної тригонометричної тотожності):
$2\cos^2 x = 3 + 3\sin x \Longleftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) = 3 + 3\sin x$.
Очевидно, що отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Крім того, зазначимо, що після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$, яке розглянуто в попередньому прикладі.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.

Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.

Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Розв'язання. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.
Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Розв'язання. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

П р и к л а д 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.
Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Р о з в' я з а н н я. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.
Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Розв'язання. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.
Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Розв'язання. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\cos 2x = 2 + 3\sin x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, отримуємо $\cos 2x = 2 + 3\sin x \Longleftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 2 + 3\sin x$.
Отримане рівняння розв'язується за допомогою заміни змінних $t = \sin x$.
Кроме того, після зведення подібних доданків отримаємо рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ з прикладу 1.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 8x = 2 + 3\sin 4x$.

Розв'язання. Після заміни $\alpha = 4x$ отримуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2 + 3\sin\alpha$, яке відрізняється від рівняння з попереднього прикладу лише позначенням невідомої. Тому воно зводиться до вигляду $2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 1 = 0$. Далі в результаті заміни $t = \sin\alpha$, як і в прикладі 1, отримаємо квадратне рівняння $2t^2 + 3t + 1 = 0$ з коренями $t = -1$ і $t = -1/2$.

# Найпростіші заміни змінних

Тепер, виконуючи зворотню заміну $t = \sin\alpha$, отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -1, \\ \sin\alpha = -1/2, \end{array}\right.$$

розв'язану в прикладі 1. Таким чином, знаходимо $\alpha$ і виконуючи зворотню заміну $\alpha = 4x$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{ll} 4x = \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 4x = \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 4x = \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$;

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \mathbf{Z};\quad x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

Тепер, виконуючи зворотню заміну $t = \sin\alpha$, отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = -1, \\ \sin\alpha = -1/2, \end{array}\right.$$

розв'язану в прикладі 1. Таким чином, знаходимо $\alpha$ і виконуючи зворотню заміну $\alpha = 4x$, отримуємо

$$\left[\begin{array}{ll} 4x = \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 4x = \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 4x = \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

# Найпростіші заміни змінних

Розглянемо ще приклади рівнянь, раціональних відносно тангенса чи котангенса.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи очевидну заміну $t = \operatorname{ctg} x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{ctg} x = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи властивість арккотангенса $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, котангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Таким чином, отримуємо остаточну відповідь.

Відповідь: $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

# Найпростіші заміни змінних

Розглянемо ще приклади рівнянь, раціональних відносно тангенса чи котангенса.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи очевидну заміну $t = \operatorname{ctg} x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{ctg} x = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи властивість арккотангенса $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, котангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Таким чином, отримуємо остаточну відповідь.

Відповідь: $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

# Найпростіші заміни змінних

Розглянемо ще приклади рівнянь, раціональних відносно тангенса чи котангенса.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x - 5 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи очевидну заміну $t = \operatorname{ctg} x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{ctg} x = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи властивість арккотангенса $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, котангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Таким чином, отримуємо остаточну відповідь.

В і д п о в і д ь: $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

# Найпростіші заміни змінних

Розглянемо ще приклади рівнянь, раціональних відносно тангенса чи котангенса.

П р и к л а д 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x - 5 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Використовуючи очевидну заміну $t = \operatorname{ctg} x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{ctg} x = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи властивість арккотангенса $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, котангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arcctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Таким чином, отримуємо остаточну відповідь.

В і д п о в і д ь: $x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$\operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $t = \operatorname{tg} 3x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5. \end{array}\right.$$

Далі, використовуючи ще одну заміну змінних: $\alpha = 3x$, отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1, \\ \operatorname{tg}\alpha = 5. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = \operatorname{arctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи непарність арктангенса: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює 1, а саме: $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$\operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $t = \operatorname{tg} 3x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5. \end{array}\right.$$

Далі, використовуючи ще одну заміну змінних: $\alpha = 3x$,
отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1, \\ \operatorname{tg}\alpha = 5. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = \operatorname{arctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи непарність арктангенса: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$
і знаходячи в таблиці значень тригонометричних
функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $1$, а саме:
$\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.
Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$\operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $t = \operatorname{tg} 3x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5. \end{array}\right.$$

Далі, використовуючи ще одну заміну змінних: $\alpha = 3x$, отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = -1, \\ \operatorname{tg} \alpha = 5. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = \operatorname{arctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи непарність арктангенса: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

# Найпростіші заміни змінних

Приклад 6. Розв'язати рівняння
$\operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0$.

Розв'язання. Використовуючи заміну $t = \operatorname{tg} 3x$, отримуємо

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5. \end{array}\right.$$

Далі, використовуючи ще одну заміну змінних: $\alpha = 3x$, отримуємо сукупність найпростіших рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = -1, \\ \operatorname{tg} \alpha = 5. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = \operatorname{arctg}(-1) + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Враховуючи непарність арктангенса: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1$ і знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $1$, а саме: $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, отримуємо $\operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$.

Отже, маємо

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

# Найпростіші заміни змінних

Нарешті, виконуючи зворотню заміну $\alpha = 3x$, знаходимо $x$:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x = \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$.

Розв'язання. Хоча співвідношення $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$ не є абсолютною тотожністю (оскільки в тих точках, де $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, права частина цієї рівності не визначена), але у випадку, коли рівняння містить одночасно тангенс і котангенс одного кута $\alpha$, вказане співвідношення виконується всюди на області визначення (ОДЗ) рівняння.

# Найпростіші заміни змінних

Нарешті, виконуючи зворотню заміну $\alpha = 3x$, знаходимо $x$:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x = \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$.

Розв'язання. Хоча співвідношення $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$ не є абсолютною тотожністю (оскільки в тих точках, де $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, права частина цієї рівності не визначена), але у випадку, коли рівняння містить одночасно тангенс і котангенс одного кута $\alpha$, вказане співвідношення виконується всюди на області визначення (ОДЗ) рівняння.

# Найпростіші заміни змінних

Нарешті, виконуючи зворотню заміну $\alpha = 3x$, знаходимо $x$:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x = \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$.

Розв'язання. Хоча співвідношення $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$ не є абсолютною тотожністю (оскільки в тих точках, де $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, права частина цієї рівності не визначена), але у випадку, коли рівняння містить одночасно тангенс і котангенс одного кута $\alpha$, вказане співвідношення виконується всюди на області визначення (ОДЗ) рівняння.

# Найпростіші заміни змінних

Нарешті, виконуючи зворотню заміну $\alpha = 3x$, знаходимо $x$:

$$\left[\begin{array}{ll} 3x = \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ 3x = \alpha = \operatorname{arctg} 5 + \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}, & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}$, $m \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$.

Розв'язання. Хоча співвідношення $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha$ не є абсолютною тотожністю (оскільки в тих точках, де $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, права частина цієї рівності не визначена), але у випадку, коли рівняння містить одночасно тангенс і котангенс одного кута $\alpha$, вказане співвідношення виконується всюди на області визначення (ОДЗ) рівняння.

# Найпростіші заміни змінних

Тому рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5\operatorname{ctg} 3x = 4$ рівносильне рівнянню

$$\operatorname{tg} 3x - \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} - 4 = 0\,,$$

яке заміною $t = \operatorname{tg} 3x$ зводиться до рівняння

$$t - \frac{5}{t} - 4 = 0 \iff \frac{t^2 - 4t - 5}{t} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 4t - 5 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff \left[ \begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5. \end{array} \right.$$

Таким чином, ми отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5, \end{array} \right.$$

розв'язану в попередньому прикладі.

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}\,,\ m \in \mathbf{Z};\ \ x = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$

# Найпростіші заміни змінних

Тому рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$ рівносильне рівнянню

$$\operatorname{tg} 3x - \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} - 4 = 0\,,$$

яке заміною $t = \operatorname{tg} 3x$ зводиться до рівняння

$$t - \frac{5}{t} - 4 = 0 \iff \frac{t^2 - 4t - 5}{t} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 4t - 5 = 0\,, \\ t \neq 0\,, \end{cases} \iff \left[ \begin{array}{l} t = -1\,, \\ t = 5\,. \end{array} \right.$$

Таким чином, ми отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1\,, \\ \operatorname{tg} 3x = 5\,, \end{array} \right.$$

розв’язану в попередньому прикладі.

В і д п о в і д ь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}\,,\ m \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$

# Найпростіші заміни змінних

Тому рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} 3x = 4$ рівносильне рівнянню

$$\operatorname{tg} 3x - \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} - 4 = 0\,,$$

яке заміною $t = \operatorname{tg} 3x$ зводиться до рівняння

$$t - \frac{5}{t} - 4 = 0 \iff \frac{t^2 - 4t - 5}{t} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 4t - 5 = 0\,, \\ t \neq 0\,, \end{cases} \iff \left[ \begin{array}{l} t = -1\,, \\ t = 5\,. \end{array} \right.$$

Таким чином, ми отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[ \begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1\,, \\ \operatorname{tg} 3x = 5\,, \end{array} \right.$$

розв'язану в попередньому прикладі.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{3}\,,\ m \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$

# Найпростіші заміни змінних

Тому рівняння $\operatorname{tg} 3x - 5\operatorname{ctg} 3x = 4$ рівносильне рівнянню

$$\operatorname{tg} 3x - \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} - 4 = 0\,,$$

яке заміною $t = \operatorname{tg} 3x$ зводиться до рівняння

$$t - \frac{5}{t} - 4 = 0 \iff \frac{t^2 - 4t - 5}{t} = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^2 - 4t - 5 = 0, \\ t \neq 0, \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 5. \end{array}\right.$$

Таким чином, ми отримуємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 3x = -1, \\ \operatorname{tg} 3x = 5, \end{array}\right.$$

розв'язану в попередньому прикладі.

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi m}{3}\,,\ m \in \mathbf{Z};\ \ x = \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \dfrac{\pi k}{3}\,,\ k \in \mathbf{Z}\,.$

# Однорідні рівняння і рівняння, які зводяться до однорідних

Рівняння, однорідні відносно синуса і косинуса одного кута, мають вигляд

$$a_n \sin^n bx + a_{n-1} \sin^{n-1} bx \cos bx + a_{n-2} \sin^{n-2} bx \cos^2 bx + \ldots$$
$$\cdots + a_1 \sin bx \cos^{n-1} bx + a_0 \cos^n bx = 0, \qquad (1)$$

де $b, a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні числа.

- Якщо в однорідному рівнянні (1) $a_n \neq 0$, то в цьому рівнянні також $\cos bx \neq 0$, і рівняння (1) може бути розв'язано діленням обох його частин на $\cos^n bx$.
- Якщо ж в рівнянні (1) $a_n = 0$, то в цьому рівнянні $\cos bx$ також може дорівнювати нулю, і тому ділення обох частин рівняння на $\cos^n bx$ є неприпустимим, оскільки таке перетворення призведе до втрати розв'язків!

# Однорідні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos x$ не може (!) дорівнювати нулю. Дійсно, при $\cos x = 0$ з рівняння також випливала б рівність $\sin x = 0$, а отже, і рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, яка є неможливою, оскільки суперечить основній тригонометричній тотожності.
Отже, $\cos x \neq 0$. Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \iff \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$, а саме: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$, отримуємо $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

# Однорідні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos x$ не може (!) дорівнювати нулю. Дійсно, при $\cos x = 0$ з рівняння також випливала б рівність $\sin x = 0$, а отже, і рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, яка є неможливою, оскільки суперечить основній тригонометричній тотожності.
Отже, $\cos x \neq 0$. Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \iff \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$, а саме: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$, отримуємо $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

# Однорідні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos x$ не може (!) дорівнювати нулю. Дійсно, при $\cos x = 0$ з рівняння також випливала б рівність $\sin x = 0$, а отже, і рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, яка є неможливою, оскільки суперечить основній тригонометричній тотожності. Отже, $\cos x \neq 0$. Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \iff \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$, а саме: $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi/3$, отримуємо $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

# Однорідні рівняння

Приклад 8. Розв'язати рівняння
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos x$ не може (!) дорівнювати нулю. Дійсно, при $\cos x = 0$ з рівняння також випливала б рівність $\sin x = 0$, а отже, і рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 0$, яка є неможливою, оскільки суперечить основній тригонометричній тотожності. Отже, $\cos x \neq 0$. Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \iff \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Знаходячи в таблиці значень тригонометричних функцій гострий кут, тангенс якого дорівнює $\sqrt{3}$, а саме: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \pi/3$, отримуємо $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

# Однорідні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння
$\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0$ .

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos 3x$ не може (!) дорівнювати нулю (це обґрунтовується шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі). Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos^2 3x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4\frac{\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} - 5\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0\,,$$

яке розглянуто в прикладі 6.

В наступному прикладі рівняння не є однорідним, проте легко зводиться до однорідного рівняння.

# Однорідні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння
$\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos 3x$ не може (!) дорівнювати нулю (це обґрунтовується шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі). Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos^2 3x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4\frac{\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} - 5\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0,$$

яке розглянуто в прикладі 6.

В наступному прикладі рівняння не є однорідним, проте легко зводиться до однорідного рівняння.

# Однорідні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння
$\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos 3x$ не може (!) дорівнювати нулю (це обґрунтовується шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі). Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos^2 3x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4\frac{\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} - 5\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0 \iff$$
$$\iff \operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0,$$

яке розглянуто в прикладі 6.

В наступному прикладі рівняння не є однорідним, проте легко зводиться до однорідного рівняння.

# Однорідні рівняння

Приклад 9. Розв'язати рівняння
$\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що в цьому рівнянні $\cos 3x$ не може (!) дорівнювати нулю (це обґрунтовується шляхом таких же міркувань, як і в попередньому прикладі). Тому при діленні обох частин рівняння на $\cos^2 3x$ в данному випадку отримуємо рівносильне рівняння

$$\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - 4\frac{\sin 3x\cos 3x}{\cos^2 3x} - 5\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 3x} = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}^2 3x - 4\operatorname{tg} 3x - 5 = 0,$$

яке розглянуто в прикладі 6.

В наступному прикладі рівняння не є однорідним, проте легко зводиться до однорідного рівняння.

# Рівняння, які зводяться до однорідних

Приклад 10. Розв'язати рівняння
$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 2$.

Розв'язання. Зазначимо, що кут $6x$ є подвійним кутом для кута $3x$ (тобто при $\alpha = 3x$ маємо $2\alpha = 6x$). Тому $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$ і в лівій частині рівняння маємо вираз, однорідний відносно $\sin 3x$ і $\cos 3x$. Тепер, щоб отримати однорідне рівняння, рівносильне данному рівнянню, залишається домножити праву частину данного рівняння на вираз $\sin^2 3x + \cos^2 3x$, який тотожно дорівнює одиниці, і звести подібні доданки.
У такий спосіб отримуємо

$$3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$

$$\iff \sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0 .$$

Отримане однорідне рівняння розглянуто в прикладі 9.

# Рівняння, які зводяться до однорідних

Приклад 10. Розв'язати рівняння
$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 2$.

Розв'язання. Зазначимо, що кут $6x$ є подвійним кутом для кута $3x$ (тобто при $\alpha = 3x$ маємо $2\alpha = 6x$). Тому $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$ і в лівій частині рівняння маємо вираз, однорідний відносно $\sin 3x$ і $\cos 3x$. Тепер, щоб отримати однорідне рівняння, рівносильне данному рівнянню, залишається домножити праву частину данного рівняння на вираз $\sin^2 3x + \cos^2 3x$, який тотожно дорівнює одиниці, і звести подібні доданки.
У такий спосіб отримуємо

$$3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$

$$\iff \sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 5\cos^2 3x = 0.$$

Отримане однорідне рівняння розглянуто в прикладі 9.

# Розв'язання рівнянь розкладом на множники відповідних тригонометричних виразів

Найбільш розповсюдженим прийомом розв'язання різноманітних за своїм виглядом тригонометричних рівнянь є розклад відповідних виразів на множники з наступним застосуванням теореми про рівність нулю добутку функцій $f(x)g(x)$, розглянутої в уроці 17.

Приклад 11. Розв'язати рівняння
$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3$ .

Розв'язання. Виконуючи такі ж перетворення, як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3 \iff$$
$$\iff 3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$
$$\iff -4\sin 3x\cos 3x - 6\cos^2 3x = 0 \iff$$
$$\iff 2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 .$$

# Розв'язання рівнянь розкладом на множники відповідних тригонометричних виразів

Найбільш розповсюдженим прийомом розв'язання різноманітних за своїм виглядом тригонометричних рівнянь є розклад відповідних виразів на множники з наступним застосуванням теореми про рівність нулю добутку функцій $f(x)g(x)$, розглянутої в уроці 17.

Приклад 11. Розв'язати рівняння
$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3$.

Розв'язання. Виконуючи такі ж перетворення, як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3 \iff$$
$$\iff 3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$
$$\iff -4\sin 3x\cos 3x - 6\cos^2 3x = 0 \iff$$
$$\iff 2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0\,.$$

# Розв'язання рівнянь розкладом на множники відповідних тригонометричних виразів

Найбільш розповсюдженим прийомом розв'язання різноманітних за своїм виглядом тригонометричних рівнянь є розклад відповідних виразів на множники з наступним застосуванням теореми про рівність нулю добутку функцій $f(x)g(x)$, розглянутої в уроці 17.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3$ .

Розв'язання. Виконуючи такі ж перетворення, як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3 \iff$$

$$\iff 3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$

$$\iff -4\sin 3x\cos 3x - 6\cos^2 3x = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 .$$

# Розв'язання рівнянь розкладом на множники відповідних тригонометричних виразів

Найбільш розповсюдженим прийомом розв'язання різноманітних за своїм виглядом тригонометричних рівнянь є розклад відповідних виразів на множники з наступним застосуванням теореми про рівність нулю добутку функцій $f(x)g(x)$, розглянутої в уроці 17.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3$ .

Розв'язання. Виконуючи такі ж перетворення, як і в попередньому прикладі, отримуємо

$$3\sin^2 3x - 2\sin 6x - 3\cos^2 3x = 3 \iff$$

$$\iff 3\sin^2 3x - 4\sin 3x\cos 3x - 3\cos^2 3x = 3(\sin^2 3x + \cos^2 3x) \iff$$

$$\iff -4\sin 3x\cos 3x - 6\cos^2 3x = 0 \iff$$

$$\iff 2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 .$$

# Розклад на множники

Зазначимо, що в отриманому однорідному рівнянні

$2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$

$\cos 3x$ може (!) дорівнювати нулю. Тому ділення обох частин цього рівняння на $\cos^2 3x$ є неприпустимим, оскільки призведе до втрати розв'язків.

Виносячи спільний множник $\cos 3x$ за дужки і враховуючи, що областю визначення (ОДЗ) рівняння є множина $\mathbf{R}$, отримуємо

$$\cos 3x(2\sin 3x + 3\cos 3x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0\,, \\ 2\sin 3x + 3\cos 3x = 0\,. \end{array}\right.$$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки першого рівняння сукупності: $\cos 3x = 0 \iff$ $\iff 3x = t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\,, n \in \mathbf{Z}\,.$

В другому рівнянні сукупності $\cos 3x$ вже не може (!) дорівнювати нулю. Тому це рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\cos 3x$.

# Розклад на множники

Зазначимо, що в отриманому однорідному рівнянні

$2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$

$\cos 3x$ може (!) дорівнювати нулю. Тому ділення обох частин цього рівняння на $\cos^2 3x$ є неприпустимим, оскільки призведе до втрати розв'язків.

Виносячи спільний множник $\cos 3x$ за дужки і враховуючи, що областю визначення (ОДЗ) рівняння є множина **R**, отримуємо

$$\cos 3x(2\sin 3x + 3\cos 3x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0\,, \\ 2\sin 3x + 3\cos 3x = 0\,. \end{array}\right.$$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки першого рівняння сукупності: $\cos 3x = 0 \iff$
$\iff 3x = t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\,, n \in \mathbf{Z}\,.$

В другому рівнянні сукупності $\cos 3x$ вже не може (!) дорівнювати нулю. Тому це рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\cos 3x$.

# Розклад на множники

Зазначимо, що в отриманому однорідному рівнянні
$2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$

$\cos 3x$ може (!) дорівнювати нулю. Тому ділення обох частин цього рівняння на $\cos^2 3x$ є неприпустимим, оскільки призведе до втрати розв'язків.
Виносячи спільний множник $\cos 3x$ за дужки і враховуючи, що областю визначення (ОДЗ) рівняння є множина $\mathbf{R}$, отримуємо

$$\cos 3x(2\sin 3x + 3\cos 3x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0\,, \\ 2\sin 3x + 3\cos 3x = 0\,. \end{array}\right.$$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки першого рівняння сукупності: $\cos 3x = 0 \iff$
$\iff 3x = t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

В другому рівнянні сукупності $\cos 3x$ вже не може (!) дорівнювати нулю. Тому це рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\cos 3x$.

# Розклад на множники

Зазначимо, що в отриманому однорідному рівнянні $2\sin 3x\cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$

$\cos 3x$ може (!) дорівнювати нулю. Тому ділення обох частин цього рівняння на $\cos^2 3x$ є неприпустимим, оскільки призведе до втрати розв'язків.

Виносячи спільний множник $\cos 3x$ за дужки і враховуючи, що областю визначення (ОДЗ) рівняння є множина **R**, отримуємо

$$\cos 3x(2\sin 3x + 3\cos 3x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0\,, \\ 2\sin 3x + 3\cos 3x = 0\,. \end{array}\right.$$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки першого рівняння сукупності: $\cos 3x = 0 \iff$ $\iff 3x = t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

В другому рівнянні сукупності $\cos 3x$ вже не може (!) дорівнювати нулю. Тому це рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\cos 3x$.

# Розклад на множники

При цьому отримуємо

$2\sin 3x + 3\cos 3x = 0 \iff 2\,\frac{\sin 3x}{\cos 3x} + 3\,\frac{\cos 3x}{\cos 3x} = 0 \iff$

$\iff 2\,\mathrm{tg}\,3x + 3 = 0 \iff \mathrm{tg}\,3x = -3/2 \iff$

$\iff 3x = t = -\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = -\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

Зауваження. Повернемося до однорідного рівняння $2\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$, отриманого в ході розв'язання попереднього прикладу.
В цьому рівнянні $\sin 3x$ не може (!) дорівнювати нулю, і тому рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\sin^2 3x$. При цьому отримуємо

$2\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 \iff 2\,\frac{\sin 3x \cos 3x}{\sin^2 3x} + 3\,\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} = 0 \iff$

$\iff 2\,\mathrm{ctg}\,3x + 3\,\mathrm{ctg}^2\,3x = 0$. Далі розв'яжіть рівняння самостійно за допомогою заміни змінних $t = \mathrm{ctg}\,3x$.

# Розклад на множники

При цьому отримуємо

$2\sin 3x + 3\cos 3x = 0 \iff 2\frac{\sin 3x}{\cos 3x} + 3\frac{\cos 3x}{\cos 3x} = 0 \iff$

$\iff 2\operatorname{tg} 3x + 3 = 0 \iff \operatorname{tg} 3x = -3/2 \iff$

$\iff 3x = t = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi m, m \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = -\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}$.

Зауваження. Повернемося до однорідного рівняння $2\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0$,
отриманого в ході розв'язання попереднього прикладу.
В цьому рівнянні $\sin 3x$ не може (!) дорівнювати нулю,
і тому рівняння може бути розв'язано діленням обох
його частин на $\sin^2 3x$. При цьому отримуємо

$2\sin 3x \cos 3x + 3\cos^2 3x = 0 \iff 2\frac{\sin 3x \cos 3x}{\sin^2 3x} + 3\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x} = 0 \iff$

$\iff 2\operatorname{ctg} 3x + 3\operatorname{ctg}^2 3x = 0$. Далі розв'яжіть рівняння
самостійно за допомогою заміни змінних $t = \operatorname{ctg} 3x$.

# Розклад на множники

При цьому отримуємо

$2\sin 3x+3\cos 3x=0 \iff 2\frac{\sin 3x}{\cos 3x}+3\frac{\cos 3x}{\cos 3x}=0 \iff$

$\iff 2\,\mathrm{tg}\,3x+3=0 \iff \mathrm{tg}\,3x=-3/2 \iff$

$\iff 3x=t=-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}+\pi m, m\in\mathbf{Z} \iff x=-\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2}+\frac{\pi m}{3}, m\in\mathbf{Z}$.

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}$; $x=-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{2}+\dfrac{\pi m}{3}, m\in\mathbf{Z}$.

Зауваження. Повернемося до однорідного рівняння $2\sin 3x\cos 3x+3\cos^2 3x=0$, отриманого в ході розв'язання попереднього прикладу.

В цьому рівнянні $\sin 3x$ не може (!) дорівнювати нулю, і тому рівняння може бути розв'язано діленням обох його частин на $\sin^2 3x$. При цьому отримуємо

$2\sin 3x\cos 3x+3\cos^2 3x=0 \iff 2\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin^2 3x}+3\frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}=0 \iff$

$\iff 2\,\mathrm{ctg}\,3x+3\,\mathrm{ctg}^2\,3x=0$. Далі розв'яжіть рівняння самостійно за допомогою заміни змінних $t=\mathrm{ctg}\,3x$.

# Розклад на множники

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 2x = 0,\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n\in\mathbf{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m\in\mathbf{Z},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

Приклад 13. Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Розв'язання. В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

# Розклад на множники

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

Приклад 13. Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Розв'язання. В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

# Розклад на множники

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 2x = 0,\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbf{Z},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

Приклад 13. Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Розв'язання. В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

# Розклад на множники

**Приклад 12.** Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

**Розв'язання.** Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z};\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

**Приклад 13.** Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

**Розв'язання.** В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

# Розклад на множники

**Приклад 12.** Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

**Розв'язання.** Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 2x = 0,\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbf{Z},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

**Відповідь:** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

**Приклад 13.** Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

**Розв'язання.** В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

# Розклад на множники

**Приклад 12.** Розв'язати рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$.

**Розв'язання.** Використовуючи формулу перетворення суми косинусів в добуток: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, отримуємо

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff 2\cos\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos 3x\cos 2x = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos 3x = 0,\\ \cos 2x = 0,\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z},\\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, & m \in \mathbf{Z},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z},\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

**Відповідь:** $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z}$.

**Приклад 13.** Знайти корені рівняння $\cos 5x + \cos x = 0$, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

**Розв'язання.** В попередньому прикладі знайдено усі корені рівняння, а саме:

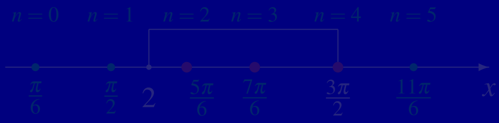
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ :




$n=0: x = \frac{\pi}{6}$

$n=1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n=2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n=3: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n=4: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n=5: x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

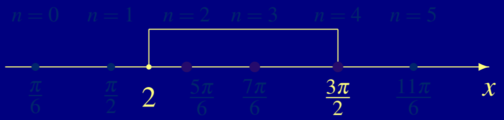
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$:




$n=0:\ x = \frac{\pi}{6}$

$n=1:\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n=2:\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n=3:\ x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n=4:\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n=5:\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

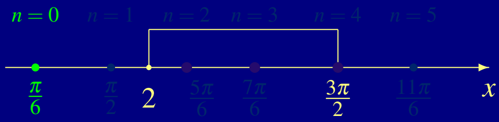
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$:




$n=0: x = \frac{\pi}{6}$

$n=1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n=2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n=3: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n=4: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n=5: x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

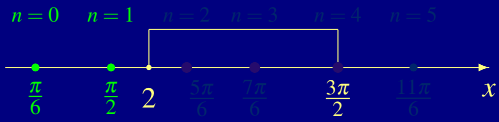
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ :




$n = 0: x = \frac{\pi}{6}$

$n = 1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n = 2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n = 3: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n = 4: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n = 5: x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

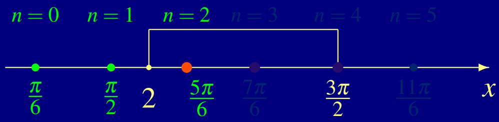
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[ \begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array} \right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$ .

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ :




$n = 0 : x = \frac{\pi}{6}$

$n = 1 : x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n = 2 : x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n = 3 : x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n = 4 : x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n = 5 : x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

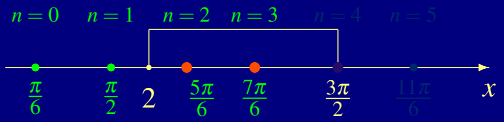
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ :




$n=0: \ x = \frac{\pi}{6}$

$n=1: \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n=2: \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n=3: \ x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n=4: \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n=5: \ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

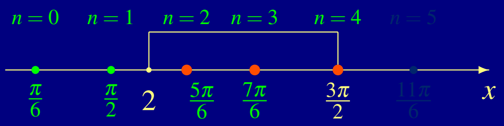
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$ :




$n=0: x = \frac{\pi}{6}$

$n=1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n=2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$n=3: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n=4: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n=5: x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

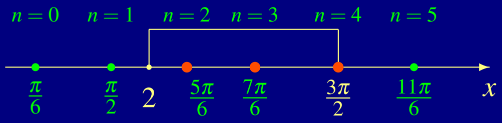
# Розклад на множники

$$\cos 5x + \cos x = 0 \iff \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Знайдемо тепер корені рівняння, які належать проміжку $[2; 3\pi/2]$.

Вибір коренів тригонометричного рівняння, які належать заданому відрізку, зручно зробити на числовій прямій, оскільки нанесення неперіодичної множини (відрізка) на коло, що є періодичною множиною, як правило, призводить до численних помилок.

Вибираємо корені серії $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$:




$n = 0: x = \frac{\pi}{6}$

$n = 1: x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$n = 2: x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

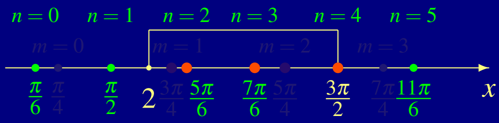
$n = 3: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$

$n = 4: x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$n = 5: x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

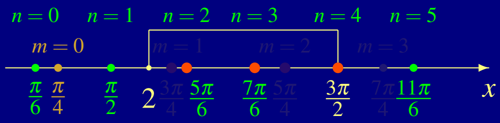
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$ , $m \in \mathbf{Z}$ , що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$ :




$m = 0 : \ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1 : \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2 : \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3 : \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$ , $\frac{5\pi}{6}$ , $\frac{7\pi}{6}$ , $\frac{5\pi}{4}$ , $\frac{3\pi}{2}$ .

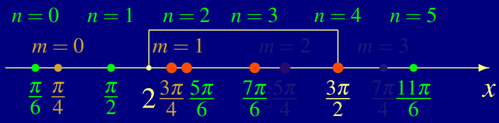
Відповідь: $\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}$ .

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$ .

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$ . В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$ .

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

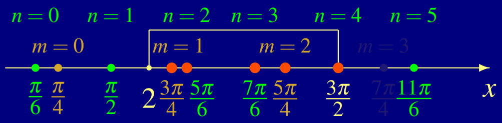
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0:\ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1:\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2:\ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3:\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

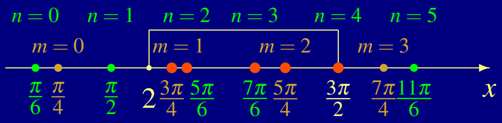
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

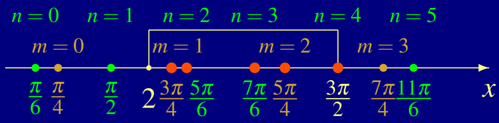
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m=0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m=1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m=2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m=3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

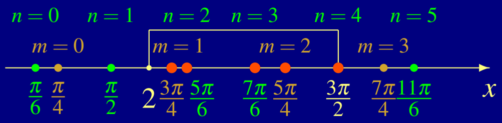
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m=0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m=1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m=2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m=3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

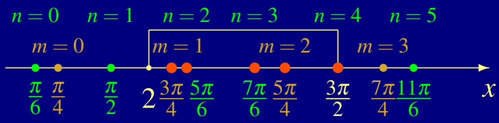
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0: \; x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1: \; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2: \; x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3: \; x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

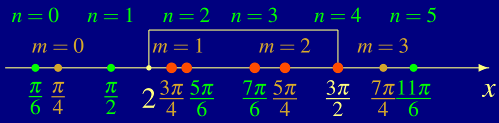
Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Аналогічно вибираємо корені серії $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$, що належать відрізку $[2; 3\pi/2]$:




$m = 0: \ x = \frac{\pi}{4}$

$m = 1: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$m = 2: \ x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$m = 3: \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

Отже, проміжку $[2; 3\pi/2]$ належать п'ять коренів рівняння: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 5x = 0$.

Розв'язання. Згрупуємо перший доданок з третім і перетворимо їх суму в добуток (див. приклад 12): $\cos 5x + \cos x = 2\cos 3x \cos 2x$. В результаті матимемо $(\cos 5x + \cos x) + \cos 2x = 0 \iff 2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0$.

# Розклад на множники

Далі, виносячи спільний множник $\cos 2x$ за дужки, отримуємо

$$2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0 \iff \cos 2x(2\cos 3x + 1) = 0 \iff$$

$$\iff \left[ \begin{array}{l} \cos 2x = 0\,, \\ 2\cos 3x + 1 = 0\,. \end{array} \right.$$

Перше рівняння сукупності розв'язано в прикладі 12, а саме: $\cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\,,\ m \in \mathbf{Z}\,.$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки другого рівняння:

$$2\cos 3x + 1 = 0 \iff \cos 3x = -1/2 \iff$$

$$\iff 3x = t = \pm \arccos(-\tfrac{1}{2}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x = \pm(\pi - \arccos \tfrac{1}{2}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \pm\tfrac{2\pi}{9} + \tfrac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}\,.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}, m \in \mathbf{Z};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}\,.$

# Розклад на множники

Далі, виносячи спільний множник $\cos 2x$ за дужки, отримуємо

$$2\cos 3x\cos 2x+\cos 2x=0 \iff \cos 2x(2\cos 3x+1)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\,,\\ 2\cos 3x+1=0\,.\end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності розв'язано в прикладі 12, а саме: $\cos 2x=0 \iff x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}\,,\ m\in\mathbf{Z}\,.$

Використовуючи заміну $t=3x$, знаходимо розв'язки другого рівняння:

$$2\cos 3x+1=0 \iff \cos 3x=-1/2 \iff$$

$$\iff 3x=t=\pm\arccos(-\tfrac{1}{2})+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x=\pm(\pi-\arccos\tfrac{1}{2})+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff x=\pm\tfrac{2\pi}{9}+\tfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}\,.$$

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z};\ x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}\,.$

# Розклад на множники

Далі, виносячи спільний множник $\cos 2x$ за дужки, отримуємо

$$2\cos 3x\cos 2x+\cos 2x=0 \iff \cos 2x(2\cos 3x+1)=0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0\,, \\ 2\cos 3x+1=0\,. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності розв'язано в прикладі 12, а саме: $\cos 2x=0 \iff x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}\,,\ m\in\mathbf{Z}\,.$

Використовуючи заміну $t=3x$, знаходимо розв'язки другого рівняння:

$$2\cos 3x+1=0 \iff \cos 3x=-1/2 \iff$$

$$\iff 3x=t=\pm\arccos(-\tfrac{1}{2})+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x=\pm(\pi-\arccos\tfrac{1}{2})+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff$$

$$\iff 3x=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z} \iff x=\pm\tfrac{2\pi}{9}+\tfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}\,.$$

Відповідь: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z};\ x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z}\,.$

# Розклад на множники

Далі, виносячи спільний множник $\cos 2x$ за дужки, отримуємо

$2\cos 3x \cos 2x + \cos 2x = 0 \iff \cos 2x(2\cos 3x + 1) = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0\,, \\ 2\cos 3x + 1 = 0\,. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності розв'язано в прикладі 12, а саме: $\cos 2x = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}\,,\ m \in \mathbf{Z}\,.$

Використовуючи заміну $t = 3x$, знаходимо розв'язки другого рівняння:

$2\cos 3x + 1 = 0 \iff \cos 3x = -1/2 \iff$

$\iff 3x = t = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff 3x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff 3x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z}\,.$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi m}{2}\,, m \in \mathbf{Z};\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3}\,, n \in \mathbf{Z}\,.$

# Розклад на множники

П р и к л а д 15. Розв'язати рівняння
$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}$ .

Р о з в' я з а н н я. Маючи на меті розклад виразу, що міститься в рівнянні, на множники, ми, все ж таки, спочатку скористаємося формулами перетворення добутку тригонометричних функцій в суму (різницю):
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$ ,

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$
і матимемо

$\frac{1}{2}(\cos\frac{3x+5x}{2}+\cos\frac{3x-5x}{2})=\frac{1}{2}(\cos\frac{x-9x}{2}-\cos\frac{x+9x}{2})\iff$
$\iff\cos 4x+\cos(-x)=\cos(-4x)-\cos 5x.$

Тепер, враховуючи парність косинуса, отримуємо
$\cos 4x+\cos x=\cos 4x-\cos 5x\iff\cos 5x+\cos x=0$ .
Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розклад на множники

Приклад 15. Розв'язати рівняння
$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}$ .

Розв'язання. Маючи на меті розклад виразу, що міститься в рівнянні, на множники, ми, все ж таки, спочатку скористаємося формулами перетворення добутку тригонометричних функцій в суму (різницю):

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$ ,

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

і матимемо

$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x+5x}{2}+\cos\frac{3x-5x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x-9x}{2}-\cos\frac{x+9x}{2}\right)\iff$

$\iff\cos 4x+\cos(-x)=\cos(-4x)-\cos 5x.$

Тепер, враховуючи парність косинуса, отримуємо
$\cos 4x+\cos x=\cos 4x-\cos 5x \iff \cos 5x+\cos x=0$ .
Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розклад на множники

П р и к л а д 15. Розв'язати рівняння
$\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{5x}{2}=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}$ .

Р о з в' я з а н н я. Маючи на меті розклад виразу, що міститься в рівнянні, на множники, ми, все ж таки, спочатку скористаємося формулами перетворення добутку тригонометричних функцій в суму (різницю):

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$ ,

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$

і матимемо

$$\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{3x+5x}{2}+\cos\frac{3x-5x}{2}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\cos\frac{x-9x}{2}-\cos\frac{x+9x}{2}\Big)\iff$$
$$\iff \cos 4x+\cos(-x)=\cos(-4x)-\cos 5x.$$

Тепер, враховуючи парність косинуса, отримуємо
$\cos 4x+\cos x=\cos 4x-\cos 5x \iff \cos 5x+\cos x=0$ .
Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розклад на множники

**Приклад 16.** Розв'язати рівняння $\cos 5x = \sin x$.

Розв'язання. За формулою зведення $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ замінимо косинус синусом відповідного кута, а потім скористаємося формулою перетворення різниці синусів в добуток: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

В результаті матимемо

$$\cos 5x = \sin x \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+5x+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+5x-x}{2} = 0 \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4}+3x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{4}+2x = \pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{4}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{4}+\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z};\ x = -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

# Розклад на множники

П р и к л а д 16. Розв’язати рівняння $\cos 5x = \sin x$.

Р о з в’ я з а н н я. За формулою зведення $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ замінимо косинус синусом відповідного кута, а потім скористаємося формулою перетворення різниці синусів в добуток: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

В результаті матимемо

$$\cos 5x = \sin x \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+5x+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+5x-x}{2} = 0 \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0,\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0,\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}\frac{\pi}{4}+3x=\frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z},\\ \frac{\pi}{4}+2x=\pi m, & m\in\mathbf{Z},\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll}3x=\frac{\pi}{4}+\pi n, & n\in\mathbf{Z},\\ 2x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, & m\in\mathbf{Z},\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z},\\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

В і д п о в і д ь: $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z};\ x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

# Розклад на множники

**Приклад 16.** Розв'язати рівняння $\cos 5x = \sin x$.

**Розв'язання.** За формулою зведення $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ замінимо косинус синусом відповідного кута, а потім скористаємося формулою перетворення різниці синусів в добуток: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
В результаті матимемо

$$\cos 5x = \sin x \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+5x+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+5x-x}{2} = 0 \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4}+3x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{4}+2x = \pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{4}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{4}+\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** $x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z};\ x = -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

# Розклад на множники

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\cos 5x = \sin x$.

Розв'язання. За формулою зведення $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ замінимо косинус синусом відповідного кута, а потім скористаємося формулою перетворення різниці синусів в добуток: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

В результаті матимемо

$$\cos 5x = \sin x \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+5x+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+5x-x}{2} = 0 \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4}+3x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{4}+2x = \pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{4}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{4}+\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z};\ x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

# Розклад на множники

**Приклад 16.** Розв'язати рівняння $\cos 5x = \sin x$.

**Розв'язання.** За формулою зведення $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ замінимо косинус синусом відповідного кута, а потім скористаємося формулою перетворення різниці синусів в добуток: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.
В результаті матимемо

$$\cos 5x = \sin x \iff \sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right) - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+5x+x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}+5x-x}{2} = 0 \iff 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4}+3x\right) = 0, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4}+3x = \frac{\pi}{2}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{4}+2x = \pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 3x = \frac{\pi}{4}+\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 2x = -\frac{\pi}{4}+\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

**Відповідь:** $x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in\mathbf{Z};\ x = -\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in\mathbf{Z}$.

# Розклад на множники

**Приклад 17.** Розв'язати рівняння $\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

*Розв'язання.* Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні, то піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням (див. Урок 17, частина перша, теореми про модулі). При цьому маємо

$\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right| \iff \cos^2\frac{5x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$.

Знижуючи степені виразів за допомогою формул половинного кута:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

далі отримуємо

$$\frac{1+\cos 5x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \iff 1+\cos 5x = 1-\cos x \iff$$

$$\iff \cos 5x + \cos x = 0.$$

Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розклад на множники

**Приклад 17.** Розв'язати рівняння $\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

**Розв'язання.** Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні, то піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням (див. Урок 17, частина перша, теореми про модулі). При цьому маємо

$$\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right| \iff \cos^2\frac{5x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}.$$

Знижуючи степені виразів за допомогою формул половинного кута:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

далі отримуємо

$$\frac{1+\cos 5x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \iff 1+\cos 5x = 1-\cos x \iff$$

$$\iff \cos 5x + \cos x = 0.$$

Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розклад на множники

Приклад 17. Розв'язати рівняння $\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

Розв'язання. Оскільки обидві частини рівняння невід'ємні, то піднесення їх до квадрату є рівносильним перетворенням (див. Урок 17, частина перша, теореми про модулі). При цьому маємо

$\left|\cos\frac{5x}{2}\right| = \left|\sin\frac{x}{2}\right| \iff \cos^2\frac{5x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}$.

Знижуючи степені виразів за допомогою формул половинного кута:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2},$$

далі отримуємо

$$\frac{1+\cos 5x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \iff 1+\cos 5x = 1-\cos x \iff$$

$$\iff \cos 5x + \cos x = 0.$$

Отримане рівняння розглянуто в прикладі 12.

# Розв'язання рівняння $a\sin t + b\cos t = c$ введенням допоміжного кута

Такі рівняння за допомогою введення допоміжного кута зводяться до найпростіших рівнянь.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Тут $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ і $t = 5x$. Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, отримаємо рівняння

$\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Зазначимо, що $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ і перепишемо рівняння у вигляді

$\sin t\cos\frac{\pi}{3} + \cos t\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ліва частина отриманого рівняння у відповідності з формулою синуса суми:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ є $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Таким чином, маємо рівняння

$\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

# Розв'язання рівняння $a\sin t + b\cos t = c$ введенням допоміжного кута

Такі рівняння за допомогою введення допоміжного кута зводяться до найпростіших рівнянь.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Тут $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ і $t = 5x$. Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, отримаємо рівняння

$\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Зазначимо, що $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ і перепишемо рівняння у вигляді

$\sin t\cos\frac{\pi}{3} + \cos t\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ліва частина отриманого рівняння у відповідності з формулою синуса суми:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ є $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Таким чином, маємо рівняння

$\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

# Розв'язання рівняння $a\sin t + b\cos t = c$ введенням допоміжного кута

Такі рівняння за допомогою введення допоміжного кута зводяться до найпростіших рівнянь.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Тут $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ і $t = 5x$. Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$, отримаємо рівняння $\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Зазначимо, що $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ і перепишемо рівняння у вигляді

$\sin t \cos\frac{\pi}{3} + \cos t \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ліва частина отриманого рівняння у відповідності з формулою синуса суми:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ є $\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Таким чином, маємо рівняння

$\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

# Розв'язання рівняння $a\sin t + b\cos t = c$ введенням допоміжного кута

Такі рівняння за допомогою введення допоміжного кута зводяться до найпростіших рівнянь.

Приклад 18. Розв'язати рівняння $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = \sqrt{2}$.

Розв'язання. Тут $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ і $t = 5x$. Розділивши обидві частини рівняння на $\sqrt{a^2+b^2} = 2$, отримаємо рівняння
$\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Зазначимо, що $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ і перепишемо рівняння у вигляді
$\sin t\cos\frac{\pi}{3} + \cos t\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ліва частина отриманого рівняння у відповідності з формулою синуса суми:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ є $\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$.

Таким чином, маємо рівняння
$\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

# Рівняння $a \sin t + b \cos t = c$

Розв'язуючи рівняння $\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ за допомогою замін змінних $z = t + \frac{\pi}{3} = 5x + \frac{\pi}{3}$, отримуємо

$$\sin z = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left[\begin{array}{ll} 5x+\frac{\pi}{3} = z = \frac{\pi}{4}+2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 5x+\frac{\pi}{3} = z = \frac{3\pi}{4}+2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 5x = -\frac{\pi}{12}+2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ 5x = \frac{5\pi}{12}+2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{5}, & m \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x = -\dfrac{\pi}{60}+\dfrac{2\pi n}{5},\ n \in \mathbf{Z};\ x = \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi m}{5},\ m \in \mathbf{Z}.$

Зазначимо, що з урахуванням рівностей $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ рівняння $\frac{1}{2}\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ переписується також у вигляді $\cos t \cos\frac{\pi}{6} + \sin t \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тут ліва частина рівняння у відповідності з формулою косинуса різниці:
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ є $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$.
Отже, маємо рівняння $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, яке заміною $y = t - \frac{\pi}{6}$ зводиться до найпростішого рівняння.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Розв'язуючи рівняння $\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ за допомогою замін змінних $z=t+\frac{\pi}{3}=5x+\frac{\pi}{3}$ , отримуємо

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left[\begin{array}{ll} 5x+\frac{\pi}{3}=z=\frac{\pi}{4}+2\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 5x+\frac{\pi}{3}=z=\frac{3\pi}{4}+2\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 5x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 5x=\frac{5\pi}{12}+2\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x=-\frac{\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{5}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x=-\dfrac{\pi}{60}+\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi m}{5}$, $m\in\mathbf{Z}$.

Зазначимо, що з урахуванням рівностей $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ рівняння $\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ переписується також у вигляді $\cos t\cos\frac{\pi}{6}+\sin t\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тут ліва частина рівняння у відповідності з формулою косинуса різниці:
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ є $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$ .
Отже, маємо рівняння $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , яке заміною $y=t-\frac{\pi}{6}$ зводиться до найпростішого рівняння.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Розв'язуючи рівняння $\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ за допомогою замін змінних $z=t+\frac{\pi}{3}=5x+\frac{\pi}{3}$, отримуємо

$$\sin z=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \left[\begin{array}{ll} 5x+\frac{\pi}{3}=z=\frac{\pi}{4}+2\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 5x+\frac{\pi}{3}=z=\frac{3\pi}{4}+2\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ll} 5x=-\frac{\pi}{12}+2\pi n, & n\in\mathbf{Z}, \\ 5x=\frac{5\pi}{12}+2\pi m, & m\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll} x=-\frac{\pi}{60}+\frac{2\pi n}{5}, & n\in\mathbf{Z}, \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi m}{5}, & m\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x=-\dfrac{\pi}{60}+\dfrac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$; $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{2\pi m}{5}$, $m\in\mathbf{Z}$.

Зазначимо, що з урахуванням рівностей $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$ рівняння $\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ переписується також у вигляді $\cos t\cos\frac{\pi}{6}+\sin t\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тут ліва частина рівняння у відповідності з формулою косинуса різниці:
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ є $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)$.
Отже, маємо рівняння $\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, яке заміною $y=t-\frac{\pi}{6}$ зводиться до найпростішого рівняння.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

В загальному випадку для виразу $a\sin t + b\cos t$ шляхом таких же міркувань, як і при розв'язанні попереднього прикладу, встановлюються формули

$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\alpha)$ ,

$b\cos t + a\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(t-\varphi)$ ,

де $\alpha$ і $\varphi$ – деякі допоміжні кути.

В наступних випадках кути $\alpha$ і $\varphi$ визначаються найбільш просто:

- при $a \geq 0$ маємо $\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ;
- при $b \geq 0$ маємо $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

Зазначимо, що з наведених формул випливає нерівність

$|a\sin t + b\cos t| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ ,

яка виконується при всіх $t \in \mathbf{R}$ .

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

В загальному випадку для виразу $a\sin t + b\cos t$ шляхом таких же міркувань, як і при розв'язанні попереднього прикладу, встановлюються формули

$$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\alpha)\,,$$

$$b\cos t + a\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(t-\varphi)\,,$$

де $\alpha$ і $\varphi$ – деякі допоміжні кути.

В наступних випадках кути $\alpha$ і $\varphi$ визначаються найбільш просто:

- при $a \geq 0$ маємо $\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- при $b \geq 0$ маємо $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Зазначимо, що з наведених формул випливає нерівність

$$|a\sin t + b\cos t| \leq \sqrt{a^2+b^2}\,,$$

яка виконується при всіх $t \in \mathbf{R}$.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

В загальному випадку для виразу $a\sin t + b\cos t$ шляхом таких же міркувань, як і при розв'язанні попереднього прикладу, встановлюються формули

$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\alpha)$,

$b\cos t + a\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(t-\varphi)$,

де $\alpha$ і $\varphi$ – деякі допоміжні кути.

В наступних випадках кути $\alpha$ і $\varphi$ визначаються найбільш просто:

- при $a \geq 0$ маємо $\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- при $b \geq 0$ маємо $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Зазначимо, що з наведених формул випливає нерівність

$|a\sin t + b\cos t| \leq \sqrt{a^2+b^2}$,

яка виконується при всіх $t \in \mathbf{R}$.

# Рівняння $a \sin t + b \cos t = c$

В загальному випадку для виразу $a \sin t + b \cos t$ шляхом таких же міркувань, як і при розв'язанні попереднього прикладу, встановлюються формули

$$a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha),$$

$$b \cos t + a \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi),$$

де $\alpha$ і $\varphi$ – деякі допоміжні кути.

В наступних випадках кути $\alpha$ і $\varphi$ визначаються найбільш просто:

- при $a \geq 0$ маємо $\alpha = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- при $b \geq 0$ маємо $\varphi = \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Зазначимо, що з наведених формул випливає нерівність

$$|a \sin t + b \cos t| \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

яка виконується при всіх $t \in \mathbf{R}$.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

В загальному випадку для виразу $a\sin t + b\cos t$ шляхом таких же міркувань, як і при розв'язанні попереднього прикладу, встановлюються формули

$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(t+\alpha)$,

$b\cos t + a\sin t = \sqrt{a^2 + b^2}\,\cos(t-\varphi)$,

де $\alpha$ і $\varphi$ – деякі допоміжні кути.

В наступних випадках кути $\alpha$ і $\varphi$ визначаються найбільш просто:

- при $a \geq 0$ маємо $\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- при $b \geq 0$ маємо $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Зазначимо, що з наведених формул випливає нерівність $|a\sin t + b\cos t| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$,

яка виконується при всіх $t \in \mathbf{R}$.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

**Приклад 19.** Розв'язати рівняння $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$.

Розв'язання. Тут $a = 5$, $b = -12$. У відповідності з формулою $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$ отримуємо $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13\sin(2x+\alpha)$ і зводимо рівняння до вигляду $13\sin(2x+\alpha) = 13$, де $\alpha = \arcsin\frac{-12}{13} = -\arcsin\frac{12}{13}$. Далі після заміни $z = 2x+\alpha$, матимемо

$$\sin z = 1 \iff 2x+\alpha = z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$$
$$\iff 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$$
$$\iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Відзначимо ще спосіб розв'язання рівняння виду $a\sin t + b\cos t = c$ зведенням його до рівняння, однорідного відносно синуса і косинуса половинного кута. Продемонструємо його, розв'язуючи рівняння з попереднього прикладу.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$.

Розв'язання. Тут $a = 5$, $b = -12$. У відповідності з формулою $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$ отримуємо $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13\sin(2x+\alpha)$ і зводимо рівняння до вигляду $13\sin(2x+\alpha) = 13$, де $\alpha = \arcsin\frac{-12}{13} = -\arcsin\frac{12}{13}$.

Далі після заміни $z = 2x+\alpha$, матимемо

$\sin z = 1 \iff 2x+\alpha = z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Відзначимо ще спосіб розв'язання рівняння виду $a\sin t + b\cos t = c$ зведенням його до рівняння, однорідного відносно синуса і косинуса половинного кута. Продемонструємо його, розв'язуючи рівняння з попереднього прикладу.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$.

Розв'язання. Тут $a = 5$, $b = -12$. У відповідності з формулою $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(t+\alpha)$ отримуємо $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13\sin(2x+\alpha)$ і зводимо рівняння до вигляду $13\sin(2x+\alpha) = 13$, де $\alpha = \arcsin\frac{-12}{13} = -\arcsin\frac{12}{13}$.
Далі після заміни $z = 2x+\alpha$, матимемо

$\sin z = 1 \iff 2x+\alpha = z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Відзначимо ще спосіб розв'язання рівняння виду $a\sin t + b\cos t = c$ зведенням його до рівняння, однорідного відносно синуса і косинуса половинного кута. Продемонструємо його, розв'язуючи рівняння з попереднього прикладу.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$.

Розв'язання. Тут $a = 5$, $b = -12$. У відповідності з формулою $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$ отримуємо $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13\sin(2x+\alpha)$ і зводимо рівняння до вигляду $13\sin(2x+\alpha) = 13$, де $\alpha = \arcsin\frac{-12}{13} = -\arcsin\frac{12}{13}$. Далі після заміни $z = 2x+\alpha$, матимемо

$\sin z = 1 \iff 2x+\alpha = z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$

$\iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Відзначимо ще спосіб розв'язання рівняння виду $a\sin t + b\cos t = c$ зведенням його до рівняння, однорідного відносно синуса і косинуса половинного кута. Продемонструємо його, розв'язуючи рівняння з попереднього прикладу.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Приклад 19. Розв'язати рівняння $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$.

Розв'язання. Тут $a = 5$, $b = -12$. У відповідності з формулою $a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\alpha)$ отримуємо $5\sin 2x - 12\cos 2x = 13\sin(2x+\alpha)$ і зводимо рівняння до вигляду $13\sin(2x+\alpha) = 13$, де $\alpha = \arcsin\frac{-12}{13} = -\arcsin\frac{12}{13}$.
Далі після заміни $z = 2x+\alpha$, матимемо

$\sin z = 1 \iff 2x+\alpha = z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$
$\iff 2x = -\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \iff$
$\iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Відповідь: $x = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13} + \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Відзначимо ще спосіб розв'язання рівняння виду $a\sin t + b\cos t = c$ зведенням його до рівняння, однорідного відносно синуса і косинуса половинного кута. Продемонструємо його, розв'язуючи рівняння з попереднього прикладу.

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Розв'язання (2-й спосіб, зведення до однорідного рівняння). Використовуючи формули синуса і косинуса подвійного кута:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,,$$

а також основну тригонометричну тотожність, перепишемо рівняння

$$5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$$

у вигляді

$$10\sin x\cos x - 12(\cos^2 x - \sin^2 x) = 13(\cos^2 x + \sin^2 x) \iff$$

$$\iff \sin^2 x - 10\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 0\,.$$

Отримане однорідне рівняння після ділення обох його частин на $\cos^2 x$ (див. приклад 9) і заміни $t = \operatorname{tg} x$ зводиться до квадратного рівняння $t^2 - 10t + 25 = 0 \iff$

$$\iff (t-5)^2 = 0 \iff \operatorname{tg} x = t = 5 \iff x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$$

Відповідь: $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Розв'язання (2-й спосіб, зведення до однорідного рівняння). Використовуючи формули синуса і косинуса подвійного кута:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,,$

а також основну тригонометричну тотожність, перепишемо рівняння

$5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$

у вигляді

$10\sin x\cos x - 12(\cos^2 x - \sin^2 x) = 13(\cos^2 x + \sin^2 x) \iff$

$\iff \sin^2 x - 10\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 0\,.$

Отримане однорідне рівняння після ділення обох його частин на $\cos^2 x$ (див. приклад 9) і заміни $t = \operatorname{tg} x$ зводиться до квадратного рівняння $t^2 - 10t + 25 = 0 \iff$

$\iff (t-5)^2 = 0 \iff \operatorname{tg} x = t = 5 \iff x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

Відповідь: $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

# Рівняння $a\sin t + b\cos t = c$

Розв'язання (2-й спосіб, зведення до однорідного рівняння). Використовуючи формули синуса і косинуса подвійного кута:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,,$

а також основну тригонометричну тотожність, перепишемо рівняння

$5\sin 2x - 12\cos 2x = 13$

у вигляді

$10\sin x\cos x - 12(\cos^2 x - \sin^2 x) = 13(\cos^2 x + \sin^2 x) \iff$

$\iff \sin^2 x - 10\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 0\,.$

Отримане однорідне рівняння після ділення обох його частин на $\cos^2 x$ (див. приклад 9) і заміни $t = \operatorname{tg} x$ зводиться до квадратного рівняння $t^2 - 10t + 25 = 0 \iff$

$\iff (t-5)^2 = 0 \iff \operatorname{tg} x = t = 5 \iff x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

Відповідь: $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n\,,\ n \in \mathbf{Z}\,.$

# Зауваження

Цілком природньо (хоч це і не очевидно на перший погляд), що серії розв'язків, отримані першим і другим способами розв'язання:

$x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (1-й спосіб),

$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$ (2-й спосіб),

співпадають.

Доведемо рівність $\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 5$, яка рівносильна рівності

$\arcsin \frac{12}{13} = 2 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}$.

За означенням арксинуса $\arcsin \frac{12}{13} \in [-\pi/2; \pi/2]$. Аналогічно, використовуючи означення арктангенса і враховуючи, що $\operatorname{arctg} 5$ додатній, отримуємо ланцюжок співвідношень

$\operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi/2) \iff 2 \operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi) \iff$

$\iff \left(2 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}\right) \in (-\pi/2; \pi/2)$.

# Зауваження

Цілком природньо (хоч це і не очевидно на перший погляд), що серії розв'язків, отримані першим і другим способами розв'язання:

$x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$ (1-й спосіб),

$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}$ (2-й спосіб),

співпадають.

Доведемо рівність $\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 5$, яка рівносильна рівності

$\arcsin \frac{12}{13} = 2 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}$.

За означенням арксинуса $\arcsin \frac{12}{13} \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Аналогічно, використовуючи означення арктангенса і враховуючи, що $\operatorname{arctg} 5$ додатній, отримуємо ланцюжок співвідношень

$\operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi/2) \iff 2 \operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi) \iff$

$\iff \left(2 \operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}\right) \in (-\pi/2; \pi/2)$.

# Зауваження

Цілком природньо (хоч це і не очевидно на перший погляд), що серії розв'язків, отримані першим і другим способами розв'язання:

$x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ (1-й спосіб),

$x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ (2-й спосіб),

співпадають.

Доведемо рівність $\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 5$, яка рівносильна рівності

$\arcsin\frac{12}{13} = 2\operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}$.

За означенням арксинуса $\arcsin\frac{12}{13} \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Аналогічно, використовуючи означення арктангенса і враховуючи, що $\operatorname{arctg} 5$ додатній, отримуємо ланцюжок співвідношень

$\operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi/2) \Longleftrightarrow 2\operatorname{arctg} 5 \in (0; \pi) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(2\operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}\right) \in (-\pi/2; \pi/2)$.

# Зауваження

Таким чином, обидві частини рівності

$$\arcsin\frac{12}{13} = 2\operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

належать проміжку $[-\pi/2;\pi/2]$. Оскільки на цьому проміжку рівняння $\sin x = a$ при $a \in [-1;1]$ має єдиний корінь, то рівність (2) рівносильна рівності синусів від обох частин рівності (2). Це означає, що рівність (2) буде доведено, якщо ми доведемо рівність $\sin\left(2\operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{13}$.

Враховуючи періодичність синуса і відповідну формулу зведення, отримуємо
$\sin\left(2\operatorname{arctg} 5 - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} 5\right) = -\cos\left(2\operatorname{arctg} 5\right)$.

Тепер, використовуючи вираз косинуса через тангенс половинного кута і означення арктангенса, маємо
$-\cos\left(2\operatorname{arctg} 5\right) = -\frac{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 5)}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 5)} = -\frac{1-5^2}{1+5^2} = \frac{12}{13}$.

Тим самим доведення рівності (2) закінчено.

# Зауваження

Таким чином, обидві частини рівності

$$\arcsin\frac{12}{13}=2\operatorname{arctg}5-\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

належать проміжку $[-\pi/2;\pi/2]$. Оскільки на цьому проміжку рівняння $\sin x=a$ при $a\in[-1;1]$ має єдиний корінь, то рівність (2) рівносильна рівності синусів від обох частин рівності (2). Це означає, що рівність (2) буде доведено, якщо ми доведемо рівність
$\sin\left(2\operatorname{arctg}5-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{12}{13}$.
Враховуючи періодичність синуса і відповідну формулу зведення, отримуємо
$\sin\left(2\operatorname{arctg}5-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\operatorname{arctg}5\right)=-\cos\left(2\operatorname{arctg}5\right)$.
Тепер, використовуючи вираз косинуса через тангенс половинного кута і означення арктангенса, маємо
$-\cos\left(2\operatorname{arctg}5\right)=-\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}5\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}5\right)}=-\frac{1-5^2}{1+5^2}=\frac{12}{13}$.
Тим самим доведення рівності (2) закінчено.