

Геометричний зміст похідної

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 28 (частина друга)

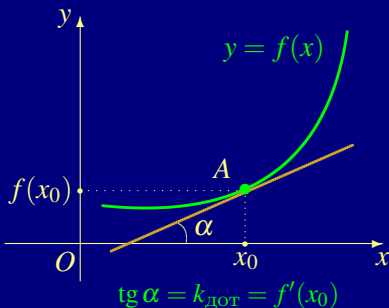


Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Геометричний зміст похідної

Геометричний зміст похідної можна виразити у такий спосіб: якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0 , то графік цієї функції у відповідній точці $(x_0, f(x_0))$ має дотичну.

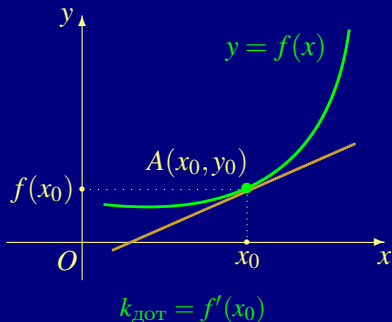


При цьому похідна функції $f(x)$ в точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0, f(x_0))$, тобто кутовий коефіцієнт цієї дотичної: $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$.

Іншими словами, значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута α між додатнім напрямком осі Ox і дотичною до графіка функції $f(x)$ в точці з абсцисою x_0 .

Рівняння дотичної

Підставляючи в рівняння прямої (див. Урок 23)
 $y - y_0 = k(x - x_0)$ з кутовим коефіцієнтом k , яка
проходить через точку $A(x_0, y_0)$, значення $k = f'(x_0)$ і
 $y_0 = f(x_0)$, отримуємо рівняння дотичної до графіка
функції $y = f(x)$ в точці A .

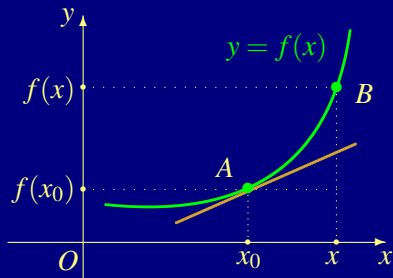


В результаті **рівняння дотичної**
до графіка функції $y = f(x)$ має
вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

де x_0 – абсциса точки дотику.

Наближення функції дотичною до її графіка



Відзначимо, що в основі численних застосувань математичного аналізу до розв'язання різноманітних практичних задач лежить ідея наближення нелінійних функціональних залежностей лінійними, яка виражається заміною приросту функції приростом дотичної до графіка цієї функції.

Природньо, що таке наближення тим точніше, чим менший відповідний приріст незалежної змінної.

Приклади

Приклад 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ і тому

$f(x_0) = f(1) = \frac{3+1}{2-3} = -4$. Маємо також

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Тому $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Підставляючи $x_0 = 1$ і знайдені значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ в рівняння дотичної, отримуємо шукане рівняння:

$$y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7.$$

Відповідь: $y = -11x + 7$.

Приклади

Приклад 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ і тому $f(x_0) = f(1) = \frac{3+1}{2-3} = -4$. Маємо також

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Тому $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Підставляючи $x_0 = 1$ і знайдені значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ в рівняння дотичної, отримуємо шукане рівняння:

$$y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7.$$

Відповідь: $y = -11x + 7$.

Приклади

Приклад 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ і тому

$f(x_0) = f(1) = \frac{3+1}{2-3} = -4$. Маємо також

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Тому $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Підставляючи $x_0 = 1$ і знайдені значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ в рівняння дотичної, отримуємо шукане рівняння:

$$y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7.$$

Відповідь: $y = -11x + 7$.

Приклади

Приклад 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ і тому

$f(x_0) = f(1) = \frac{3+1}{2-3} = -4$. Маємо також

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Тому $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Підставляючи $x_0 = 1$ і знайдені значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ в рівняння дотичної, отримуємо шукане рівняння:

$$y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7.$$

Відповідь: $y = -11x + 7$.

Приклади

Приклад 1. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = \frac{3x+1}{2x-3}$ і тому

$f(x_0) = f(1) = \frac{3+1}{2-3} = -4$. Маємо також

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Тому $f'(x_0) = f'(1) = -\frac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Підставляючи $x_0 = 1$ і знайдені значення $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ в рівняння дотичної, отримуємо шукане рівняння:

$$y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7.$$

Відповідь: $y = -11x + 7$.

Приклади

Приклад 2. Знайти площу трикутника, обмеженого віссю Oy , прямою $y = -15$ і дотичною до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотичною до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ є пряма $y = -11x + 7$ (див. попередній приклад), яка перетинає вісь Oy в точці $A(0;7)$.

Позначимо через $B(x_B, y_B)$ точку перетину дотичної $y = -11x + 7$ і прямої $y = -15$. Тоді $y_B = -15$, а координату x_B знаходимо, розв'язуючи рівняння $y_B = -11x_B + 7 \implies x_B = (y_B - 7) : (-11) = (-15 - 7) : (-11) = 2$. Отже, $B(2, -15)$.

Очевидно також, що пряма $y = -15$ перетинає вісь Oy в точці $C(0; -15)$.

Приклади

Приклад 2. Знайти площу трикутника, обмеженого віссю Oy , прямою $y = -15$ і дотичною до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотичною до графіка функції

$y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ є пряма

$y = -11x + 7$ (див. попередній приклад), яка перетинає вісь Oy в точці $A(0;7)$.

Позначимо через $B(x_B, y_B)$ точку перетину дотичної $y = -11x + 7$ і прямої $y = -15$. Тоді $y_B = -15$, а координату x_B знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\begin{aligned} y_B = -11x_B + 7 &\implies x_B = (y_B - 7) : (-11) = \\ &= (-15 - 7) : (-11) = 2. \quad \text{Отже, } B(2, -15). \end{aligned}$$

Очевидно також, що пряма $y = -15$ перетинає вісь Oy в точці $C(0; -15)$.

Приклади

Приклад 2. Знайти площу трикутника, обмеженого віссю Oy , прямою $y = -15$ і дотичною до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотичною до графіка функції

$y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ є пряма

$y = -11x + 7$ (див. попередній приклад), яка перетинає вісь Oy в точці $A(0;7)$.

Позначимо через $B(x_B, y_B)$ точку перетину дотичної $y = -11x + 7$ і прямої $y = -15$. Тоді $y_B = -15$, а координату x_B знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\begin{aligned} y_B = -11x_B + 7 &\implies x_B = (y_B - 7) : (-11) = \\ &= (-15 - 7) : (-11) = 2. \text{ Отже, } B(2, -15). \end{aligned}$$

Очевидно також, що пряма $y = -15$ перетинає вісь Oy в точці $C(0; -15)$.

Приклади

Приклад 2. Знайти площу трикутника, обмеженого віссю Oy , прямою $y = -15$ і дотичною до графіка функції $y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотичною до графіка функції

$y = \frac{3x+1}{2x-3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ є пряма

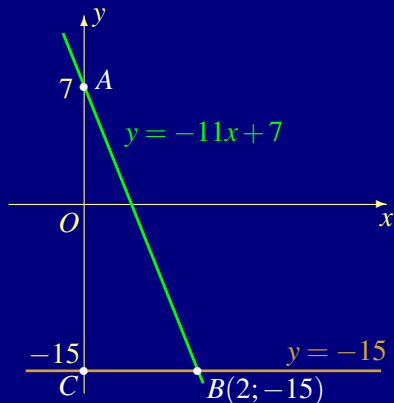
$y = -11x + 7$ (див. попередній приклад), яка перетинає вісь Oy в точці $A(0;7)$.

Позначимо через $B(x_B, y_B)$ точку перетину дотичної $y = -11x + 7$ і прямої $y = -15$. Тоді $y_B = -15$, а координату x_B знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\begin{aligned} y_B = -11x_B + 7 &\implies x_B = (y_B - 7) : (-11) = \\ &= (-15 - 7) : (-11) = 2. \text{ Отже, } B(2, -15). \end{aligned}$$

Очевидно також, що пряма $y = -15$ перетинає вісь Oy в точці $C(0; -15)$.

Приклади

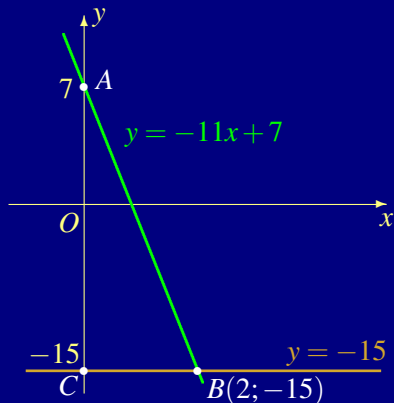


Отже, прямі
 $y = -11x + 7$, $y = -15$ і вісь
 Oy обмежують прямокутний
трикутник з вершинами $A(0; 7)$,
 $B(2; -15)$ і $C(0; -15)$ (див. мал.).

Його площа $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2(7 + 15) = 22$ (кв. од.).

Відповідь: 22 кв. од.

Приклади

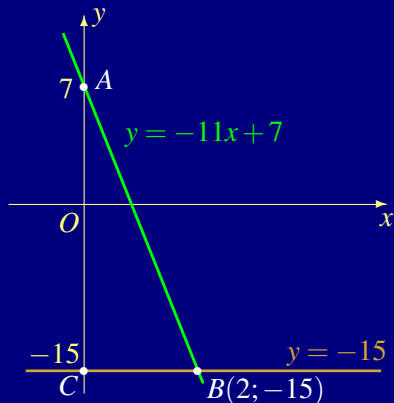


Отже, прямі
 $y = -11x + 7$, $y = -15$ і вісь
 Oy обмежують прямокутний
трикутник з вершинами $A(0; 7)$,
 $B(2; -15)$ і $C(0; -15)$ (див. мал.).

Його площа $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2(7 + 15) = 22$ (кв. од.).

Відповідь: 22 кв. од.

Приклади



Отже, прямі
 $y = -11x + 7$, $y = -15$ і вісь
 Oy обмежують прямокутний
трикутник з вершинами $A(0; 7)$,
 $B(2; -15)$ і $C(0; -15)$ (див. мал.).

Його площа $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2(7 + 15) = 22$ (кв. од.).

Відповідь: 22 кв. од.

Приклади

Приклад 3. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$, проведеної перпендикулярно до прямої $l : 5y - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Використаємо умову перпендикулярності дотичної $l_{\text{дот}}$ і прямої l (лив. Урок 23) для знаходження кутового коефіцієнта дотичної $k_{\text{дот}}$.

Маємо

$$l_{\text{дот}} \perp l \iff k_{\text{дот}} k_l = -1,$$

де кутовий коефіцієнт k_l прямої l відомий, оскільки

$$l : 5y - x - 6 = 0 \iff 5y = x + 6 \iff y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5},$$

тобто $k_l = \frac{1}{5}$.

$$\text{Отже, } k_{\text{дот}} \cdot \frac{1}{5} = -1 \iff k_{\text{дот}} = -5.$$

Приклади

Приклад 3. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$, проведеної перпендикулярно до прямої $l : 5y - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Використаємо умову перпендикулярності дотичної $l_{\text{дот}}$ і прямої l (лив. Урок 23) для знаходження кутового коефіцієнта дотичної $k_{\text{дот}}$.

Маємо

$$l_{\text{дот}} \perp l \iff k_{\text{дот}} k_l = -1,$$

де кутовий коефіцієнт k_l прямої l відомий, оскільки

$$l : 5y - x - 6 = 0 \iff 5y = x + 6 \iff y = \frac{1}{5}x + \frac{6}{5},$$

тобто $k_l = \frac{1}{5}$.

$$\text{Отже, } k_{\text{дот}} \cdot \frac{1}{5} = -1 \iff k_{\text{дот}} = -5.$$

Приклади

Далі використаємо рівність

$$k_{\text{дот}} = f'(x_0) \quad (1)$$

для знаходження абсциси точки дотику x_0 . Маємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5(2x-1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2}(2x-1)^{-3/2}(2x-1)' = \\ &= -5(2x-1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (1) породжує рівняння $-5 = -\frac{5}{\sqrt{(2x_0-1)^3}}$

з невідомою x_0 , розв'язуючи яке, отримуємо

$$\sqrt{(2x_0-1)^3} = 1 \iff 2x_0-1 = 1 \iff x_0 = 1.$$

Тепер рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$$
 має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \text{де } f'(x_0) = k_{\text{дот}} = -5,$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{5}{\sqrt{2-1}} = 5, \quad \text{тобто дотичною є}$$

$$\text{пряма } y = -5(x-1) + 5 = 10 - 5x.$$

Відповідь: $y = 10 - 5x$.

Приклади

Далі використаємо рівність

$$k_{\text{дот}} = f'(x_0) \quad (1)$$

для знаходження абсциси точки дотику x_0 . Маємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5(2x-1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2}(2x-1)^{-3/2}(2x-1)' = \\ &= -5(2x-1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (1) породжує рівняння $-5 = -\frac{5}{\sqrt{(2x_0-1)^3}}$

з невідомою x_0 , розв'язуючи яке, отримуємо

$$\sqrt{(2x_0-1)^3} = 1 \iff 2x_0-1 = 1 \iff x_0 = 1.$$

Тепер рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}} \text{ має вигляд}$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \text{ де } f'(x_0) = k_{\text{дот}} = -5,$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{5}{\sqrt{2-1}} = 5, \text{ тобто дотичною є}$$

$$\text{пряма } y = -5(x-1) + 5 = 10 - 5x.$$

Відповідь: $y = 10 - 5x$.

Приклади

Далі використаємо рівність

$$k_{\text{дот}} = f'(x_0) \quad (1)$$

для знаходження абсциси точки дотику x_0 . Маємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5(2x-1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2}(2x-1)^{-3/2}(2x-1)' = \\ &= -5(2x-1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (1) породжує рівняння $-5 = -\frac{5}{\sqrt{(2x_0-1)^3}}$

з невідомою x_0 , розв'язуючи яке, отримуємо

$$\sqrt{(2x_0-1)^3} = 1 \iff 2x_0-1 = 1 \iff x_0 = 1.$$

Тепер рівняння дотичної до графіка функції

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}} \text{ має вигляд}$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \text{ де } f'(x_0) = k_{\text{дот}} = -5,$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{5}{\sqrt{2-1}} = 5, \text{ тобто дотичною є}$$

$$\text{пряма } y = -5(x-1) + 5 = 10 - 5x.$$

Відповідь: $y = 10 - 5x$.

Приклади

Приклад 4. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, проведених з точки $M(1, -1)$, і знайти точки дотику.

Розв'язання. Зазначимо, що точка M не лежить на параболі $y = x^2$, оскільки $1^2 \neq -1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_0 — абсциса точки дотику шуканої дотичної з параболою $y = x^2$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad \text{де } f(x) = x^2 \quad \text{і} \quad f'(x) = 2x,$$

$$\text{а тому } f(x_0) = x_0^2 \quad \text{і} \quad f'(x_0) = 2x_0.$$

Отже, маємо рівняння дотичної $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, яке після спрощення набуває вигляду:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Приклади

Приклад 4. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, проведених з точки $M(1, -1)$, і знайти точки дотику.

Розв'язання. Зазначимо, що точка M не лежить на параболі $y = x^2$, оскільки $1^2 \neq -1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_0 — абсциса точки дотику шуканої дотичної з параболою $y = x^2$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = x^2$ і $f'(x) = 2x$, а тому $f(x_0) = x_0^2$ і $f'(x_0) = 2x_0$.

Отже, маємо рівняння дотичної $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, яке після спрощення набуває вигляду:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Приклади

Приклад 4. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, проведених з точки $M(1, -1)$, і знайти точки дотику.

Розв'язання. Зазначимо, що точка M не лежить на параболі $y = x^2$, оскільки $1^2 \neq -1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_0 — абсциса точки дотику шуканої дотичної з параболою $y = x^2$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f(x) = x^2$ і $f'(x) = 2x$, а тому $f(x_0) = x_0^2$ і $f'(x_0) = 2x_0$.

Отже, маємо рівняння дотичної $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, яке після спрощення набуває вигляду:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Приклади

Приклад 4. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, проведених з точки $M(1, -1)$, і знайти точки дотику.

Розв'язання. Зазначимо, що точка M не лежить на параболі $y = x^2$, оскільки $1^2 \neq -1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_0 — абсциса точки дотику шуканої дотичної з параболою $y = x^2$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \text{ де } f(x) = x^2 \text{ і } f'(x) = 2x,$$

$$\text{а тому } f(x_0) = x_0^2 \text{ і } f'(x_0) = 2x_0.$$

Отже, маємо рівняння дотичної $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, яке після спрощення набуває вигляду:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Приклади

Приклад 4. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, проведених з точки $M(1, -1)$, і знайти точки дотику.

Розв'язання. Зазначимо, що точка M не лежить на параболі $y = x^2$, оскільки $1^2 \neq -1$.

Далі розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_0 — абсциса точки дотику шуканої дотичної з параболою $y = x^2$. Тоді рівняння дотичної має вигляд:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \text{ де } f(x) = x^2 \text{ і } f'(x) = 2x,$$

$$\text{а тому } f(x_0) = x_0^2 \text{ і } f'(x_0) = 2x_0.$$

Отже, маємо рівняння дотичної $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$, яке після спрощення набуває вигляду:

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

Приклади

Оскільки дотична

$$y = 2x_0x - x_0^2 \quad (2)$$

проходить через точку $M(1, -1)$, то

$$-1 = 2x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{2}, \\ x_0 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$. При кожному x_0 обчислюємо ординату точки дотику $y_0 = x_0^2$ і, підставляючи знайдені значення x_0 і x_0^2 в рівність (2), отримуємо рівняння шуканих дотичних, а саме:

1) при $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ отримуємо $y_0 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2};$$

2) при $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ маємо $y_0 = (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Приклади

Оскільки дотична

$$y = 2x_0x - x_0^2 \quad (2)$$

проходить через точку $M(1, -1)$, то

$$-1 = 2x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{2}, \\ x_0 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$. При кожному x_0 обчислюємо ординату точки дотику $y_0 = x_0^2$ і, підставляючи знайдені значення x_0 і x_0^2 в рівність (2), отримуємо рівняння шуканих дотичних, а саме:

1) при $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ отримуємо $y_0 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2};$$

2) при $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ маємо $y_0 = (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Приклади

Оскільки дотична

$$y = 2x_0x - x_0^2 \quad (2)$$

проходить через точку $M(1, -1)$, то

$$-1 = 2x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{2}, \\ x_0 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$. При кожному x_0 обчислюємо ординату точки дотику $y_0 = x_0^2$ і, підставляючи знайдені значення x_0 і x_0^2 в рівність (2), отримуємо рівняння шуканих дотичних, а саме:

1) при $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ отримуємо $y_0 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2};$$

2) при $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ маємо $y_0 = (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Приклади

Оскільки дотична

$$y = 2x_0x - x_0^2 \quad (2)$$

проходить через точку $M(1, -1)$, то

$$-1 = 2x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \begin{cases} x_0 = 1 + \sqrt{2}, \\ x_0 = 1 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$. При кожному x_0 обчислюємо ординату точки дотику $y_0 = x_0^2$ і, підставляючи знайдені значення x_0 і x_0^2 в рівність (2), отримуємо рівняння шуканих дотичних, а саме:

1) при $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ отримуємо $y_0 = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2};$$

2) при $x_0 = 1 - \sqrt{2}$ маємо $y_0 = (1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ і рівняння дотичної

$$y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Приклади

2-й спосіб. Позначимо через k кутовий коефіцієнт шуканої дотичної до заданої параболи.

Запишемо рівняння прямої (див. Урок 23)

$y - y_M = k(x - x_M)$ з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $M(1; -1)$, де, очевидно, $x_M = 1$ і $y_M = -1$: $y + 1 = k(x - 1)$.

Після спрощення отримаємо рівняння

$$y = kx - k - 1. \quad (3)$$

Пряма (3) дотикається до параболи $y = x^2$, якщо вони мають єдину спільну точку, тобто квадратне рівняння

$$x^2 = kx - k - 1 \iff x^2 - kx + k + 1 = 0$$

має єдиний корінь. В цьому випадку дискримінант $D = k^2 - 4k - 4$ квадратного рівняння дорівнює нулю:

$$k^2 - 4k - 4 = 0 \iff \begin{cases} k = 2 + 2\sqrt{2}, \\ k = 2 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Приклади

2-й спосіб. Позначимо через k кутовий коефіцієнт шуканої дотичної до заданої параболи.

Запишемо рівняння прямої (див. Урок 23)

$y - y_M = k(x - x_M)$ з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $M(1; -1)$, де, очевидно, $x_M = 1$ і $y_M = -1$: $y + 1 = k(x - 1)$.

Після спрощення отримаємо рівняння

$$y = kx - k - 1. \quad (3)$$

Пряма (3) дотикається до параболи $y = x^2$, якщо вони мають єдину спільну точку, тобто квадратне рівняння

$$x^2 = kx - k - 1 \iff x^2 - kx + k + 1 = 0$$

має єдиний корінь. В цьому випадку дискримінант

$D = k^2 - 4k - 4$ квадратного рівняння дорівнює нулю:

$$k^2 - 4k - 4 = 0 \iff \begin{cases} k = 2 + 2\sqrt{2}, \\ k = 2 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Приклади

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$, рівняння яких отримаємо після підстановки знайдених значень $k_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $k_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ замість k в рівняння $y = kx - k - 1$, а саме: $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$.

Абсциси їх точок дотику з параболою — це корені рівнянь

$$x^2 - k_1x + k_1 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_1}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ і}$$

$$x^2 - k_2x + k_2 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_2}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ (кожне з цих рівнянь має єдиний корінь, оскільки при } k_1 \text{ і } k_2 \text{ розглянутий раніше дискримінант } D = 0).$$

Ординати точок дотику обчислені при розв'язанні прикладу першим способом.

Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

Приклади

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$, рівняння яких отримаємо після підстановки знайдених значень $k_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $k_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ замість k в рівняння $y = kx - k - 1$, а саме: $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$.

Абсциси їх точок дотику з параболою — це корені рівнянь

$$x^2 - k_1x + k_1 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_1}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ і}$$

$$x^2 - k_2x + k_2 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_2}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ (кожне з цих рівнянь має єдиний корінь, оскільки при } k_1 \text{ і } k_2 \text{ розглянутий раніше дискримінант } D = 0).$$

Ординати точок дотику обчислені при розв'язанні прикладу першим способом.

Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

Приклади

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$, рівняння яких отримаємо після підстановки знайдених значень $k_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $k_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ замість k в рівняння $y = kx - k - 1$, а саме: $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$.

Абсциси їх точок дотику з параболою — це корені рівнянь

$$x^2 - k_1x + k_1 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_1}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ і}$$

$$x^2 - k_2x + k_2 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_2}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ (кожне з цих рівнянь має єдиний корінь, оскільки при } k_1 \text{ і } k_2 \text{ розглянутий раніше дискримінант } D = 0).$$

Ординати точок дотику обчислені при розв'язанні прикладу першим способом.

Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

Приклади

Отже, через точку M проходять дві дотичні до параболи $y = x^2$, рівняння яких отримаємо після підстановки знайдених значень $k_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $k_2 = 2 - 2\sqrt{2}$ замість k в рівняння $y = kx - k - 1$, а саме: $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$.

Абсциси їх точок дотику з параболою — це корені рівнянь

$$x^2 - k_1x + k_1 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_1}{2} = 1 + \sqrt{2} \text{ і}$$

$$x^2 - k_2x + k_2 + 1 = 0 \iff x = \frac{k_2}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ (кожне з цих рівнянь має єдиний корінь, оскільки при } k_1 \text{ і } k_2 \text{ розглянутий раніше дискримінант } D = 0 \text{).}$$

Ординати точок дотику обчислені при розв'язанні прикладу першим способом.

Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

Приклади

Приклад 5. Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок дотику шуканої спільної дотичної відповідно до парабол $y = f(x) = x^2$ і $y = g(x) = -4 - x^2$.

Тоді рівняння дотичної до параболи $y = f(x)$ має вигляд: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, де $f(x_1) = x_1^2$ і $f'(x_1) = 2x_1$, тобто

$$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2.$$

Рівняння дотичної до параболи $y = g(x)$ має вигляд: $y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$, де $g(x_2) = -4 - x_2^2$ і $g'(x_2) = -2x_2$, тобто

$$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2x + x_2^2 - 4.$$

Приклади

Приклад 5. Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок дотику шуканої спільної дотичної відповідно до парабол $y = f(x) = x^2$ і $y = g(x) = -4 - x^2$.

Тоді рівняння дотичної до параболи $y = f(x)$ має вигляд: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, де $f(x_1) = x_1^2$ і $f'(x_1) = 2x_1$, тобто

$$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2.$$

Рівняння дотичної до параболи $y = g(x)$ має вигляд: $y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$, де $g(x_2) = -4 - x_2^2$ і $g'(x_2) = -2x_2$, тобто

$$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2x + x_2^2 - 4.$$

Приклади

Приклад 5. Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок дотику шуканої спільної дотичної відповідно до парабол $y = f(x) = x^2$ і $y = g(x) = -4 - x^2$.

Тоді рівняння дотичної до параболи $y = f(x)$ має вигляд: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, де $f(x_1) = x_1^2$ і $f'(x_1) = 2x_1$, тобто

$$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2.$$

Рівняння дотичної до параболи $y = g(x)$ має вигляд: $y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$, де $g(x_2) = -4 - x_2^2$ і $g'(x_2) = -2x_2$, тобто

$$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2x + x_2^2 - 4.$$

Приклади

Приклад 5. Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок дотику шуканої спільної дотичної відповідно до парабол $y = f(x) = x^2$ і $y = g(x) = -4 - x^2$.

Тоді рівняння дотичної до параболи $y = f(x)$ має вигляд: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, де $f(x_1) = x_1^2$ і $f'(x_1) = 2x_1$, тобто

$$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2.$$

Рівняння дотичної до параболи $y = g(x)$ має вигляд: $y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$, де $g(x_2) = -4 - x_2^2$ і $g'(x_2) = -2x_2$, тобто

$$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2x + x_2^2 - 4.$$

Приклади

Приклад 5. Записати рівняння спільних дотичних до парабол $y = x^2$ і $y = -4 - x^2$.

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (із застосуванням похідної та без її застосування).

1-й спосіб. Нехай x_1 і x_2 — абсциси точок дотику шуканої спільної дотичної відповідно до парабол $y = f(x) = x^2$ і $y = g(x) = -4 - x^2$.

Тоді рівняння дотичної до параболи $y = f(x)$ має вигляд: $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$, де $f(x_1) = x_1^2$ і $f'(x_1) = 2x_1$, тобто

$$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1x - x_1^2.$$

Рівняння дотичної до параболи $y = g(x)$ має вигляд:

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2), \text{ де } g(x_2) = -4 - x_2^2 \text{ і } g'(x_2) = -2x_2, \text{ тобто}$$

$$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2x + x_2^2 - 4.$$

Приклади

Оскільки шукана пряма є спільною дотичною до парабол $y = f(x)$ і $y = g(x)$, то отримані рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$ і $y = -2x_2x + x_2^2 - 4$ є рівняннями однієї і тієї ж прямої.

Звідси отримуємо систему рівнянь для знаходження x_1 і x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 = -2x_2, \\ -x_1^2 = x_2^2 - 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ 2x_2^2 = 4, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}, \\ x_2 = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, існують дві спільні дотичні до заданих парабол. Їх рівняння отримуємо, підставляючи знайдені значення $x_1 = \pm\sqrt{2}$ в рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$, а саме: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

Оскільки шукана пряма є спільною дотичною до парабол $y = f(x)$ і $y = g(x)$, то отримані рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$ і $y = -2x_2x + x_2^2 - 4$ є рівняннями однієї і тієї ж прямої.

Звідси отримуємо систему рівнянь для знаходження x_1 і x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 = -2x_2, \\ -x_1^2 = x_2^2 - 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ 2x_2^2 = 4, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}, \\ x_2 = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, існують дві спільні дотичні до заданих парабол. Їх рівняння отримуємо, підставляючи знайдені значення $x_1 = \pm\sqrt{2}$ в рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$, а саме: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

Оскільки шукана пряма є спільною дотичною до парабол $y = f(x)$ і $y = g(x)$, то отримані рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$ і $y = -2x_2x + x_2^2 - 4$ є рівняннями однієї і тієї ж прямої.

Звідси отримуємо систему рівнянь для знаходження x_1 і x_2 :

$$\begin{cases} 2x_1 = -2x_2, \\ -x_1^2 = x_2^2 - 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ 2x_2^2 = 4, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ \begin{cases} x_2 = \sqrt{2}, \\ x_2 = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Отже, існують дві спільні дотичні до заданих парабол. Їх рівняння отримуємо, підставляючи знайдені значення $x_1 = \pm\sqrt{2}$ в рівняння $y = 2x_1x - x_1^2$, а саме: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

2-й спосіб. Нехай пряма $y = kx + b$ є дотичною до параболи $y = x^2$. Тоді вони мають єдину спільну точку і рівняння $x^2 = kx + b \iff x^2 - kx - b = 0$ має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант дорівнює нулю:

$$D_1 = k^2 + 4b = 0.$$

Якщо пряма $y = kx + b$ дотикається також до параболи $y = -4 - x^2$, то рівняння $-4 - x^2 = kx + b \iff x^2 + kx + b + 4 = 0$ також має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант також дорівнює нулю: $D_2 = k^2 - 4b - 16 = 0$.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ k^2 - 4b - 16 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 8b + 16 = 0, \\ k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

знаходимо k і b , так що $b = -2$, $k = \pm 2\sqrt{2}$.

Відповідь: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

2-й спосіб. Нехай пряма $y = kx + b$ є дотичною до параболи $y = x^2$. Тоді вони мають єдину спільну точку і рівняння $x^2 = kx + b \iff x^2 - kx - b = 0$ має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант дорівнює нулю:

$$D_1 = k^2 + 4b = 0.$$

Якщо пряма $y = kx + b$ дотикається також до параболи $y = -4 - x^2$, то рівняння $-4 - x^2 = kx + b \iff x^2 + kx + b + 4 = 0$ також має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант також дорівнює нулю: $D_2 = k^2 - 4b - 16 = 0$.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ k^2 - 4b - 16 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 8b + 16 = 0, \\ k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

знаходимо k і b , так що $b = -2$, $k = \pm 2\sqrt{2}$.

Відповідь: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

2-й спосіб. Нехай пряма $y = kx + b$ є дотичною до параболи $y = x^2$. Тоді вони мають єдину спільну точку і рівняння $x^2 = kx + b \iff x^2 - kx - b = 0$ має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант дорівнює нулю:

$$D_1 = k^2 + 4b = 0.$$

Якщо пряма $y = kx + b$ дотикається також до параболи $y = -4 - x^2$, то рівняння $-4 - x^2 = kx + b \iff x^2 + kx + b + 4 = 0$ також має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант також дорівнює нулю: $D_2 = k^2 - 4b - 16 = 0$.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ k^2 - 4b - 16 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 8b + 16 = 0, \\ k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

знаходимо k і b , так що $b = -2$, $k = \pm 2\sqrt{2}$.

Відповідь: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Приклади

2-й спосіб. Нехай пряма $y = kx + b$ є дотичною до параболи $y = x^2$. Тоді вони мають єдину спільну точку і рівняння $x^2 = kx + b \iff x^2 - kx - b = 0$ має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант дорівнює нулю:

$$D_1 = k^2 + 4b = 0.$$

Якщо пряма $y = kx + b$ дотикається також до параболи $y = -4 - x^2$, то рівняння $-4 - x^2 = kx + b \iff x^2 + kx + b + 4 = 0$ також має єдиний розв'язок, тобто його дискримінант також дорівнює нулю: $D_2 = k^2 - 4b - 16 = 0$.

Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} D_1 = 0, \\ D_2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ k^2 - 4b - 16 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 8b + 16 = 0, \\ k^2 + 4b = 0, \end{cases}$$

знаходимо k і b , так що $b = -2$, $k = \pm 2\sqrt{2}$.

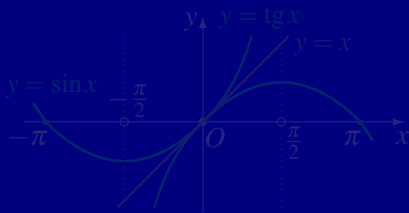
Відповідь: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ і $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Дотик графіків

Кажуть, що **графіки** функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ **дотикаються** в точці (x_0, y_0) , якщо в цій точці вони мають спільну дотичну.

З цього означення випливає, що графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ дотикаються в точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$



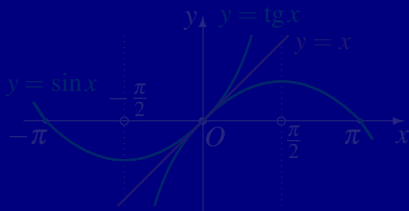
Наприклад, в точці $(0;0)$ дотикаються графіки функцій $y = \sin x$, $y = x$ і $y = \operatorname{tg} x$ (див. мал.).

Дотик графіків

Кажуть, що **графіки** функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ **дотикаються** в точці (x_0, y_0) , якщо в цій точці вони мають спільну дотичну.

З цього означення випливає, що **графіки** функцій $y = f(x)$ и $y = g(x)$ **дотикаються** в точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$



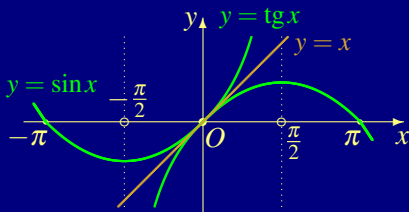
Наприклад, в точці $(0;0)$ дотикаються графіки функцій $y = \sin x$, $y = x$ і $y = \operatorname{tg} x$ (див. мал.).

Дотик графіків

Кажуть, що **графіки** функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ **дотикаються** в точці (x_0, y_0) , якщо в цій точці вони мають спільну дотичну.

З цього означення випливає, що **графіки** функцій $y = f(x)$ и $y = g(x)$ **дотикаються в точці (x_0, y_0)** тоді і тільки тоді, коли виконуються співвідношення

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$



Наприклад, в точці $(0;0)$ дотикаються графіки функцій $y = \sin x$, $y = x$ і $y = \operatorname{tg} x$ (див. мал.).

Приклади

Приклад 6. Знайти точки дотику графіків функцій $y = \cos x$ і $y = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$.

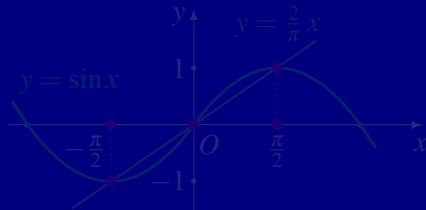
Розв'язання. Координати точки дотику (x_0, y_0) задовольняють систему

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0), \end{cases}$$

де $f(x) = \cos x$ і $g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$, тобто систему

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\frac{1}{\pi}x_0^2 + \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\frac{2}{\pi}x_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння $\sin x = \frac{2}{\pi}x$ графічним методом (див. мал.), знаходимо його корені: $x_0 = 0; \pm \frac{\pi}{2}$.



Приклади

Приклад 6. Знайти точки дотику графіків функцій $y = \cos x$ і $y = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$.

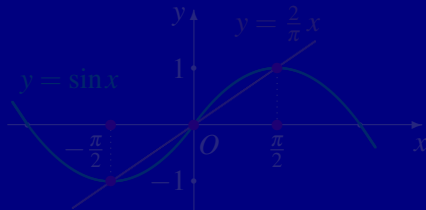
Розв'язання. Координати точки дотику (x_0, y_0) задовольняють систему

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0), \end{cases}$$

де $f(x) = \cos x$ і $g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$, тобто систему

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\frac{1}{\pi}x_0^2 + \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\frac{2}{\pi}x_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння $\sin x = \frac{2}{\pi}x$ графічним методом (див. мал.), знаходимо його корені: $x_0 = 0; \pm \frac{\pi}{2}$.



Приклади

Приклад 6. Знайти точки дотику графіків функцій
 $y = \cos x$ і $y = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$.

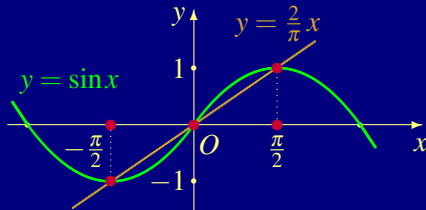
Розв'язання. Координати точки дотику (x_0, y_0) задовольняють систему

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0), \end{cases}$$

де $f(x) = \cos x$ і $g(x) = -\frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\pi}{4}$, тобто систему

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\frac{1}{\pi}x_0^2 + \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\frac{2}{\pi}x_0. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння
 $\sin x = \frac{2}{\pi}x$ графічним
методом (див. мал.),
знаходимо його корені:
 $x_0 = 0; \pm \frac{\pi}{2}$.



Приклади

Підставляючи значення $x_0 = 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ в рівняння $\cos x_0 = -\frac{1}{\pi} x_0^2 + \frac{\pi}{4}$, переконуємося в тому, що систему

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\frac{1}{\pi} x_0^2 + \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\frac{2}{\pi} x_0 \end{cases}$$

задовольняють тільки два значення: $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

При цьому $y_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Приклади

Підставляючи значення $x_0 = 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ в рівняння $\cos x_0 = -\frac{1}{\pi} x_0^2 + \frac{\pi}{4}$, переконуємося в тому, що систему

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\frac{1}{\pi} x_0^2 + \frac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\frac{2}{\pi} x_0 \end{cases}$$

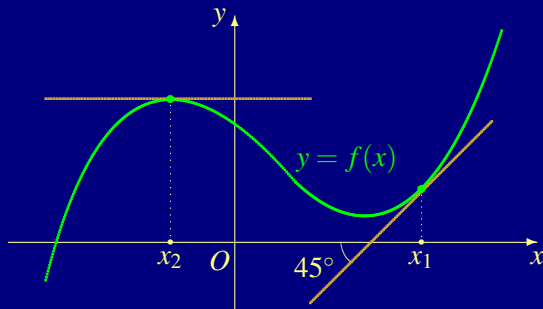
задовольняють тільки два значення: $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

При цьому $y_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

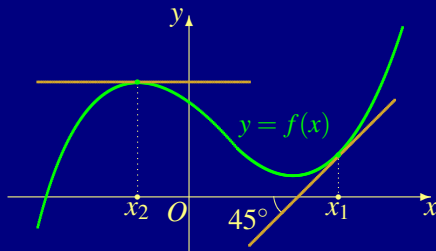
Відповідь: $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2007 р.). На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках x_1 та x_2 . Користуючись геометричним змістом похідної, знайдіть $f'(x_1) + f'(x_2)$.



Приклади із ЗНО



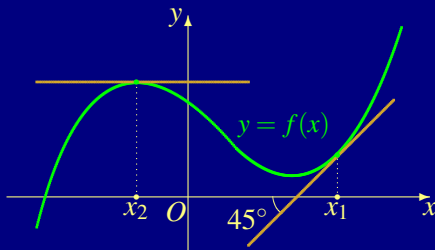
Розв'язання. Значення $f'(x_1)$ дорівнює тангенсу кута 45° між додатнім напрямком осі Ox і дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_1 , тобто $f'(x_1) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Оскільки дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_2 є паралельною осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт дорівнює $f'(x_2)$ і дорівнює нулю.

Отже, $f'(x_1) + f'(x_2) = 1 + 0 = 1$.

Відповідь: 1.

Приклади із ЗНО



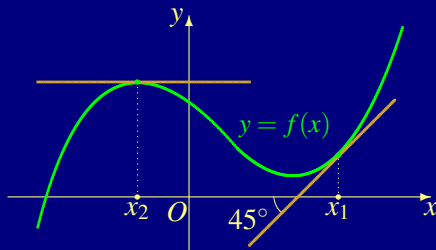
Розв'язання. Значення $f'(x_1)$ дорівнює тангенсу кута 45° між додатнім напрямком осі Ox і дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_1 , тобто $f'(x_1) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Оскільки дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_2 є паралельною осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт дорівнює $f'(x_2)$ і дорівнює нулю.

Отже, $f'(x_1) + f'(x_2) = 1 + 0 = 1$.

Відповідь: 1.

Приклади із ЗНО



Розв'язання. Значення $f'(x_1)$ дорівнює тангенсу кута 45° між додатнім напрямком осі Ox і дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_1 , тобто $f'(x_1) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Оскільки дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_2 є паралельною осі абсцис, то її кутовий коефіцієнт дорівнює $f'(x_2)$ і дорівнює нулю.

Отже, $f'(x_1) + f'(x_2) = 1 + 0 = 1$.

Відповідь: 1.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).
Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $M(5; -9)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то $f(5) = -9$. З того, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці M паралельна осі абсцис, випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{дот}} = f'(5)$ дорівнює нулю.

Отже, $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5) = 3 \cdot 0 + 10 \cdot (-9) = -90$.

Відповідь: -90 .

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).
Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $M(5; -9)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то $f(5) = -9$. З того, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці M паралельна осі абсцис, випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{дот}} = f'(5)$ дорівнює нулю.
Отже, $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5) = 3 \cdot 0 + 10 \cdot (-9) = -90$.

Відповідь: -90 .

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).
Дотична, проведена до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(5; -9)$, паралельна осі абсцис. Обчисліть значення виразу $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $M(5; -9)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то $f(5) = -9$. З того, що дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці M паралельна осі абсцис, випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{дот}} = f'(5)$ дорівнює нулю.

Отже, $3 \cdot f'(5) + 10 \cdot f(5) = 3 \cdot 0 + 10 \cdot (-9) = -90$.

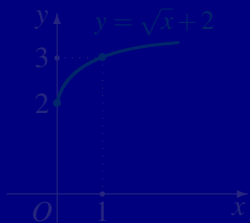
Відповідь: -90 .

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2019 р.). Задано функцію $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

1. Побудуйте графік функції f .
2. Знайдіть координати x_0 і y_0 точки перетину графіка функції f з прямою $y = 3$.
3. Обчисліть значення похідної функції f в точці $x = x_0$.
4. Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 .

Розв'язання.



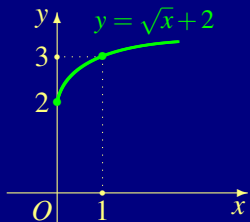
Графік функції $y = f(x) = \sqrt{x} + 2$ можна отримати зсувом графіка елементарної функції $y = \sqrt{x}$ на 2 одиниці вгору.

Приклади із ЗНО

Приклад 9 (Пробне тестування ЗНО, 2019 р.). Задано функцію $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

1. Побудуйте графік функції f .
2. Знайдіть координати x_0 і y_0 точки перетину графіка функції f з прямою $y = 3$.
3. Обчисліть значення похідної функції f в точці $x = x_0$.
4. Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 .

Розв'язання.



Графік функції $y = f(x) = \sqrt{x} + 2$ можна отримати зсувом графіка елементарної функції $y = \sqrt{x}$ на 2 одиниці вгору.

Приклади із ЗНО

Точка перетину графіка функції f і прямої $y = 3$ має ординату $y_0 = 3$. Абсцису x_0 цієї точки знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt{x_0} + 2 = 3 \iff \sqrt{x_0} = 1 \iff x_0 = 1.$$

Знаходимо похідну функції f ; $f'(x) = (\sqrt{x} + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і обчислюємо значення похідної $f'(x_0)$ в точці $x_0 = 1$:
 $f'(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції f в точці з абсцисою $x_0 = 1$ у вигляді

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f'(x_0) = 0,5$ і $f(x_0) = y_0 = 3$. Отже, отримуємо $y = 0,5(x - 1) + 3$, тобто рівняння дотичної має вигляд $y = 0,5x + 2,5$.

Відповідь: $x_0 = 1$ і $y_0 = 3$; $f'(x_0) = 0,5$; рівняння дотичної: $y = 0,5x + 2,5$.

Приклади із ЗНО

Точка перетину графіка функції f і прямої $y = 3$ має ординату $y_0 = 3$. Абсцису x_0 цієї точки знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt{x_0} + 2 = 3 \iff \sqrt{x_0} = 1 \iff x_0 = 1.$$

Знаходимо похідну функції f ; $f'(x) = (\sqrt{x} + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і обчислюємо значення похідної $f'(x_0)$ в точці $x_0 = 1$: $f'(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції f в точці з абсцисою $x_0 = 1$ у вигляді

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f'(x_0) = 0,5$ і

$f(x_0) = y_0 = 3$. Отже, отримуємо $y = 0,5(x - 1) + 3$, тобто рівняння дотичної має вигляд $y = 0,5x + 2,5$.

Відповідь: $x_0 = 1$ і $y_0 = 3$; $f'(x_0) = 0,5$; рівняння дотичної: $y = 0,5x + 2,5$.

Приклади із ЗНО

Точка перетину графіка функції f і прямої $y = 3$ має ординату $y_0 = 3$. Абсцису x_0 цієї точки знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt{x_0} + 2 = 3 \iff \sqrt{x_0} = 1 \iff x_0 = 1.$$

Знаходимо похідну функції f ; $f'(x) = (\sqrt{x} + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і обчислюємо значення похідної $f'(x_0)$ в точці $x_0 = 1$:
 $f'(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції f в точці з абсцисою $x_0 = 1$ у вигляді

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f'(x_0) = 0,5$ і $f(x_0) = y_0 = 3$. Отже, отримуємо $y = 0,5(x - 1) + 3$, тобто рівняння дотичної має вигляд $y = 0,5x + 2,5$.

Відповідь: $x_0 = 1$ і $y_0 = 3$; $f'(x_0) = 0,5$; рівняння дотичної: $y = 0,5x + 2,5$.

Приклади із ЗНО

Точка перетину графіка функції f і прямої $y = 3$ має ординату $y_0 = 3$. Абсцису x_0 цієї точки знаходимо, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt{x_0} + 2 = 3 \iff \sqrt{x_0} = 1 \iff x_0 = 1.$$

Знаходимо похідну функції f ; $f'(x) = (\sqrt{x} + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ і обчислюємо значення похідної $f'(x_0)$ в точці $x_0 = 1$:
 $f'(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції f в точці з абсцисою $x_0 = 1$ у вигляді

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, де $f'(x_0) = 0,5$ і $f(x_0) = y_0 = 3$. Отже, отримуємо $y = 0,5(x - 1) + 3$, тобто рівняння дотичної має вигляд $y = 0,5x + 2,5$.

Відповідь: $x_0 = 1$ і $y_0 = 3$; $f'(x_0) = 0,5$; рівняння дотичної: $y = 0,5x + 2,5$.

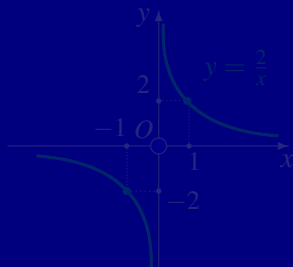
Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2019 р.).

Задано функції $f(x) = \frac{2}{x}$ і $g(x) = 5 - 8x$.

1. Побудуйте графік функції f .
2. Побудуйте графік функції g .
3. Знайдіть похідну функції f .
4. До графіка функції f проведено дотичні, паралельні графіку функції g . Визначте абсциси точок дотику.

Розв'язання.



Графіком функції
 $y = f(x) = \frac{2}{x}$ є гіпербола.

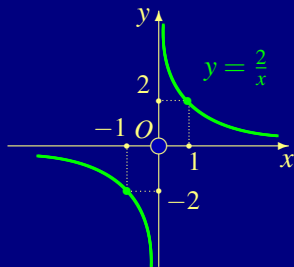
Приклади із ЗНО

Приклад 10 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2019 р.).

Задано функції $f(x) = \frac{2}{x}$ і $g(x) = 5 - 8x$.

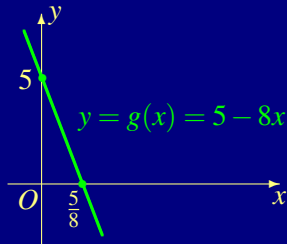
1. Побудуйте графік функції f .
2. Побудуйте графік функції g .
3. Знайдіть похідну функції f .
4. До графіка функції f проведено дотичні, паралельні графіку функції g . Визначте абсциси точок дотику.

Розв'язання.



Графіком функції
 $y = f(x) = \frac{2}{x}$ є гіпербола.

Приклади із ЗНО



Графіком функції $y = g(x) = 5 - 8x$ є пряма, яка перетинає осі координат в точках $(0; 5)$ і $(\frac{5}{8}; 0)$.

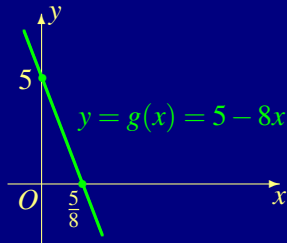
Знаходимо похідну функції f : $f'(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$.

Оскільки дотичні до графіка функції f паралельні прямій $y = g(x) = 5 - 8x$, то кутовий коефіцієнт дотичних $k_{\text{дот}}$ дорівнює кутовому коефіцієнту прямої $y = g(x)$, тобто $k_{\text{дот}} = -8$.

Далі використовуємо рівність $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$ для знаходження абсцис x_0 точок дотику. В результаті отримуємо рівняння $-\frac{2}{x_0^2} = -8 \iff x_0^2 = \frac{1}{4} \iff x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

Відповідь: $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; абсциси точок дотику $x_0 = \pm 0,5$.

Приклади із ЗНО



Графіком функції $y = g(x) = 5 - 8x$ є пряма, яка перетинає осі координат в точках $(0; 5)$ і $(\frac{5}{8}; 0)$.

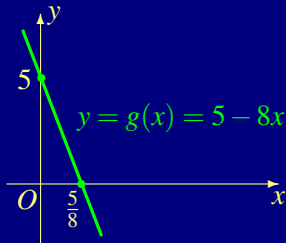
Знаходимо похідну функції f : $f'(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$.

Оскільки дотичні до графіка функції f паралельні прямій $y = g(x) = 5 - 8x$, то кутовий коефіцієнт дотичних $k_{\text{дот}}$ дорівнює кутовому коефіцієнту прямої $y = g(x)$, тобто $k_{\text{дот}} = -8$.

Далі використовуємо рівність $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$ для знаходження абсцис x_0 точок дотику. В результаті отримуємо рівняння $-\frac{2}{x_0^2} = -8 \iff x_0^2 = \frac{1}{4} \iff x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

Відповідь: $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; абсциси точок дотику $x_0 = \pm 0,5$.

Приклади із ЗНО



Графіком функції $y = g(x) = 5 - 8x$ є пряма, яка перетинає осі координат в точках $(0; 5)$ і $(\frac{5}{8}; 0)$.

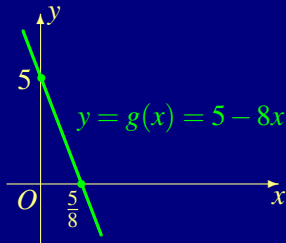
Знаходимо похідну функції f : $f'(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$.

Оскільки дотичні до графіка функції f паралельні прямій $y = g(x) = 5 - 8x$, то кутовий коефіцієнт дотичних $k_{\text{дот}}$ дорівнює кутовому коефіцієнту прямої $y = g(x)$, тобто $k_{\text{дот}} = -8$.

Далі використовуємо рівність $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$ для знаходження абсцис x_0 точок дотику. В результаті отримуємо рівняння $-\frac{2}{x_0^2} = -8 \iff x_0^2 = \frac{1}{4} \iff x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

Відповідь: $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; абсциси точок дотику $x_0 = \pm 0,5$.

Приклади із ЗНО



Графіком функції $y = g(x) = 5 - 8x$ є пряма, яка перетинає осі координат в точках $(0; 5)$ і $(\frac{5}{8}; 0)$.

Знаходимо похідну функції f : $f'(x) = (\frac{2}{x})' = -\frac{2}{x^2}$.

Оскільки дотичні до графіка функції f паралельні прямій $y = g(x) = 5 - 8x$, то кутовий коефіцієнт дотичних $k_{\text{дот}}$ дорівнює кутовому коефіцієнту прямої $y = g(x)$, тобто $k_{\text{дот}} = -8$.

Далі використовуємо рівність $k_{\text{дот}} = f'(x_0)$ для знаходження абсцис x_0 точок дотику. В результаті отримуємо рівняння $-\frac{2}{x_0^2} = -8 \iff x_0^2 = \frac{1}{4} \iff x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

Відповідь: $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$; абсциси точок дотику $x_0 = \pm 0,5$.