

Похідна

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 28 (частина перша)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

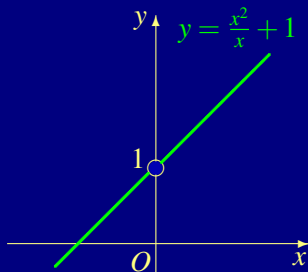
Рене Декарт, "Міркування про метод"

Про границю функції

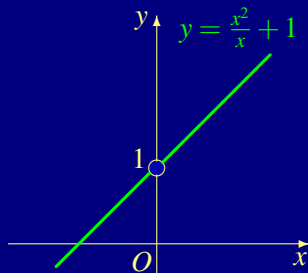
Розглянемо функцію $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1$.

Ця функція не визначена при $x = 0$. У той же час, при $x \neq 0$ виконується рівність $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1 = x + 1$.

Тому графіком функції $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1$ є пряма $y = x + 1$ з "виколотою" з неї точкою $(0; 1)$:



Про границю функції



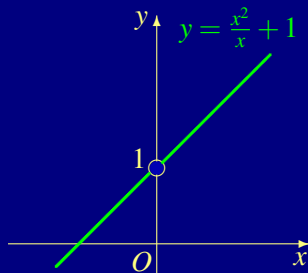
Помітимо, що в цій точці $(0; 1)$ сходяться обидві вітки графіка $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1$: права і ліва. При цьому очевидно, що значення функції наближаються до значення $y = 1$ як завгодно близько, якщо змінна x достатньо близько наближається до точки $x_0 = 0$ осі Ox .

У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ прямує до числа 1, якщо x прямує до числа 0, а символічно записують так: $y(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$.

Іншими словами кажуть також, що функція $y(x)$ має границю в точці $x_0 = 0$, рівну одиниці, і пишуть

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

Про границю функції



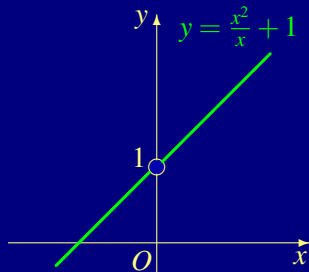
Помітимо, що в цій точці $(0; 1)$ сходяться обидві вітки графіка $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1$: права і ліва. При цьому очевидно, що значення функції наближаються до значення $y = 1$ як завгодно близько, якщо змінна x достатньо близько наближається до точки $x_0 = 0$ осі Ox .

У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ прямує до числа 1 , якщо x прямує до числа 0 , а символічно записують так: $y(x) \longrightarrow 1$ при $x \longrightarrow 0$.

Іншими словами кажуть також, що функція $y(x)$ має границю в точці $x_0 = 0$, рівну одиниці, і пишуть

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1.$$

Про границю функції



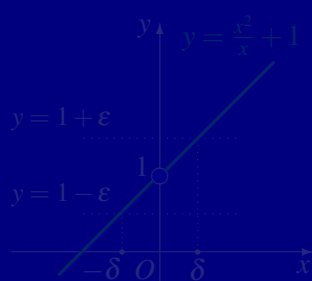
Помітимо, що в цій точці $(0; 1)$ сходяться обидві вітки графіка $y(x) = \frac{x^2}{x} + 1$: права і ліва. При цьому очевидно, що значення функції наближаються до значення $y = 1$ як завгодно близько, якщо змінна x достатньо близько наближається до точки $x_0 = 0$ осі Ox .

У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ прямує до числа 1, якщо x прямує до числа 0, а символічно записують так: $y(x) \longrightarrow 1$ при $x \longrightarrow 0$.

Іншими словами кажуть також, що функція $y(x)$ має границю в точці $x_0 = 0$, рівну одиниці, і пишуть $\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$.

Про границю функції

Уточнимо зміст виділених вище слів "як завгодно близько" і "достатньо близько" в наступному означенні границі функції $y(x)$ в точці x_0 .



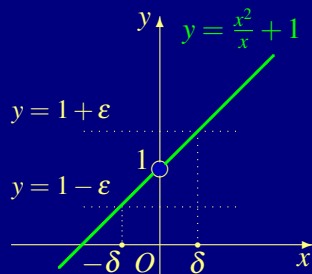
На малюнку $a = 1$ і $x_0 = 0$.

Число a називається **границею** функції $y(x)$ в точці x_0 , якщо множина розв'язків будь-якої нерівності $a - \varepsilon < y(x) < a + \varepsilon$ з додатнім числом ε (це і означає, що $y(x)$ як завгодно близько наближається до значення $y = a$) містить деякий окіл точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , тобто містить множину $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, де δ – деяке додатнє число (а це і означає, що змінна x достатньо близько наближається до точки x_0).

Коротко записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = a$.

Про границю функції

Уточнимо зміст виділених вище слів "як завгодно близько" і "достатньо близько" в наступному означенні границі функції $y(x)$ в точці x_0 .



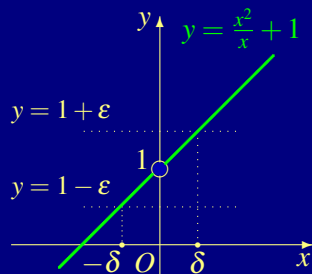
На малюнку $a = 1$ і $x_0 = 0$.

Число a називається **границею** функції $y(x)$ в точці x_0 , якщо множина розв'язків будь-якої нерівності $a - \epsilon < y(x) < a + \epsilon$ з додатнім числом ϵ (це і означає, що $y(x)$ як завгодно близько наближається до значення $y = a$) містить деякий **окіл** точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , тобто містить множину $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, де δ – деяке **додатнє** число (а це і означає, що змінна x достатньо близько наближається до точки x_0).

Коротко записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = a$.

Про границю функції

Уточнимо зміст виділених вище слів "як завгодно близько" і "достатньо близько" в наступному означенні границі функції $y(x)$ в точці x_0 .



На малюнку $a = 1$ і $x_0 = 0$.

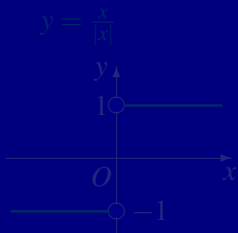
Число a називається **границею** функції $y(x)$ в точці x_0 , якщо множина розв'язків будь-якої нерівності $a - \epsilon < y(x) < a + \epsilon$ з додатнім числом ϵ (це і означає, що $y(x)$ як завгодно близько наближається до значення $y = a$) містить деякий **окіл** точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , тобто містить множину $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, де δ – деяке додатнє число (а це і означає, що змінна x достатньо близько наближається до точки x_0).

Коротко записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = a$.

Про односторонні границі функції

Розглянемо функцію $y(x) = \frac{x}{|x|}$, яка також не визначена в точці $x = 0$. Враховуючи означення модуля, отримуємо

$$y(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$



Права і ліва вітки графіка цієї функції на осі Oy сходяться до різних точок (див. мал.). У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ має границю справа, рівну одиниці, і границю зліва, рівну мінус одиниці. Коротко записують:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} y(x) = 1 \text{ (границя справа) і}$$

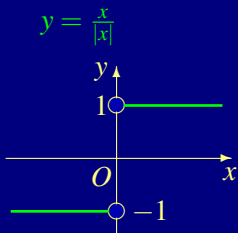
$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} y(x) = -1 \text{ (границя зліва).}$$

У той же час, ця функція не має границі в точці $x_0 = 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0+0} y(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} y(x)$.

Про односторонні границі функції

Розглянемо функцію $y(x) = \frac{x}{|x|}$, яка також не визначена в точці $x = 0$. Враховуючи означення модуля, отримуємо

$$y(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$



Права і ліва вітки графіка цієї функції на осі Oy сходяться до різних точок (див. мал.). У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ має границю справа, рівну одиниці, і границю зліва, рівну мінус одиниці. Коротко записують:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = 1 \text{ (границя справа) і}$$

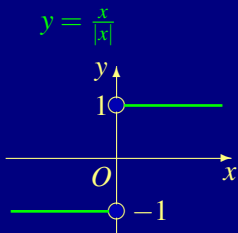
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = -1 \text{ (границя зліва).}$$

У той же час, ця функція не має границі в точці $x_0 = 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x)$.

Про односторонні границі функції

Розглянемо функцію $y(x) = \frac{x}{|x|}$, яка також не визначена в точці $x = 0$. Враховуючи означення модуля, отримуємо

$$y(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$



Права і ліва вітки графіка цієї функції на осі Oy сходяться до різних точок (див. мал.). У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ має границю справа, рівну одиниці, і границю зліва, рівну мінус одиниці. Коротко записують:

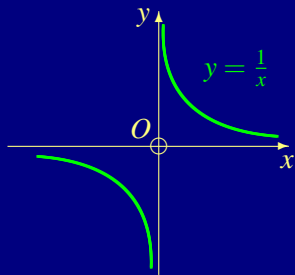
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = 1 \text{ (границя справа) і}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = -1 \text{ (границя зліва).}$$

У той же час, ця функція не має границі в точці $x_0 = 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x)$.

Про границю функції на нескінченності

Розглянемо функцію $y(x) = \frac{1}{x}$ і її графік – гіперболу.

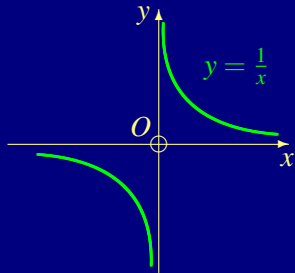


При зростанні змінної x до плюс нескінченності гіпербола наближається до осі Ox , а значення функції $y(x)$ як завгодно близько наближаються до значення $y = 0$. У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ має границю в плюс нескінченності, рівну нулю, і пишуть: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Аналогічний зміст вкладається в поняття границі функції в мінус нескінченності. Так, функція $y(x) = \frac{1}{x}$ має також границю в мінус нескінченності, рівну нулю, тобто $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

Про границю функції на нескінченності

Розглянемо функцію $y(x) = \frac{1}{x}$ і її графік – гіперболу.

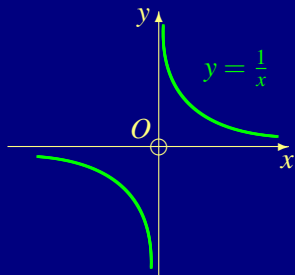


При зростанні змінної x до плюс нескінченності гіпербола наближається до осі Ox , а значення функції $y(x)$ як завгодно близько наближаються до значення $y = 0$. У такому випадку кажуть, що функція $y(x)$ має границю в плюс нескінченності, рівну нулю, і пишуть: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

Аналогічний зміст вкладається в поняття границі функції в мінус нескінченності. Так, функція $y(x) = \frac{1}{x}$ має також границю в мінус нескінченності, рівну нулю, тобто $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.

Про нескінченні границі функції

В точці 0, у якій функція $y(x) = \frac{1}{x}$ не визначена, вона не має границі, а також не має скінченних односторонніх границь справа і зліва від цієї точки.



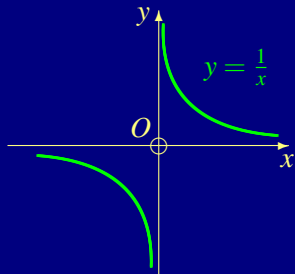
У той же час, якщо x прямує до точки $x_0 = 0$ справа від цієї точки, значення функції $y(x)$ необмежено збільшуються до плюс нескінченності. В такому випадку кажуть, що границя справа функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює плюс нескінченності, і пишуть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = +\infty.$$

Границя зліва цієї ж функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює мінус нескінченності, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = -\infty$.

Про нескінченні границі функції

В точці 0, у якій функція $y(x) = \frac{1}{x}$ не визначена, вона не має границі, а також не має скінченних односторонніх границь справа і зліва від цієї точки.



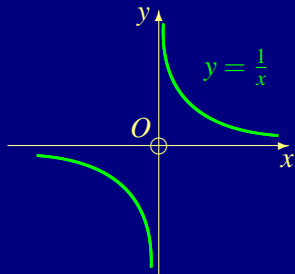
У той же час, якщо x прямує до точки $x_0 = 0$ справа від цієї точки, значення функції $y(x)$ необмежено збільшуються до плюс нескінченності. В такому випадку кажуть, що **границя справа** функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює **плюс нескінченності**, і пишуть:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = +\infty.$$

Границя зліва цієї ж функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює **мінус нескінченності**, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = -\infty$.

Про нескінченні границі функції

В точці 0, у якій функція $y(x) = \frac{1}{x}$ не визначена, вона не має границі, а також не має скінченних односторонніх границь справа і зліва від цієї точки.



У той же час, якщо x прямує до точки $x_0 = 0$ справа від цієї точки, значення функції $y(x)$ необмежено збільшуються до плюс нескінченності. В такому випадку кажуть, що **границя справа** функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює **плюс нескінченності**, і пишуть:

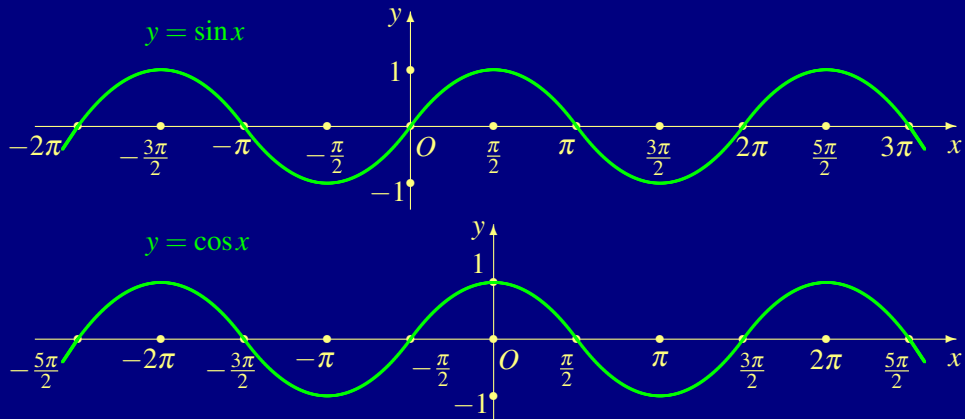
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = +\infty.$$

Границя зліва цієї ж функції $y(x)$ в точці $x_0 = 0$ дорівнює **мінус нескінченності**, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = -\infty$.

Про не існування границь функції

Нарешті, зазначимо, що функція може не мати ні скінченних, ні нескінченних односторонніх границь.

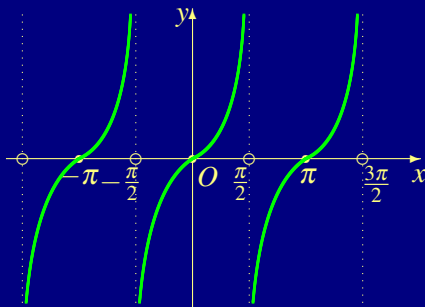
Так, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ не мають ні скінченних, ні нескінченних границь в плюс нескінченності і в мінус нескінченності.



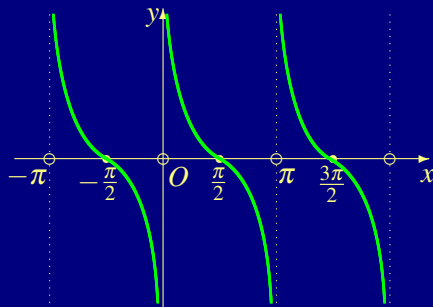
Про не існування границь функції

Функції $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ також не мають ні скінченних, ні нескінченних границь в плюс нескінченності і в мінус нескінченності.

$$y = \operatorname{tg} x$$

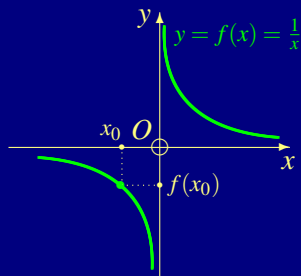


$$y = \operatorname{ctg} x$$



Про неперервність функції

Абсолютна більшість функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики, володіють визначною властивістю – вони **неперервні** у тих точках, в яких визначені.

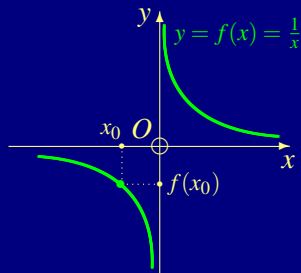


Наочним відображенням властивості неперервності функції є відсутність у графіка функції, неперервної на деякому проміжку, розривів на цьому проміжку. Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ має розрив у точці $x = 0$, в якій вона не визначена, але в кожній точці області визначення ця функція неперервна.

- Для уточнення наочних уявлень про неперервність функції використовується поняття границі функції в точці. Так, функція $f(x)$ називається **неперервною** в точці x_0 , якщо границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Про неперервність функції

Абсолютна більшість функцій, що вивчаються в шкільному курсі математики, володіють визначною властивістю – вони **неперервні** у тих точках, в яких визначені.

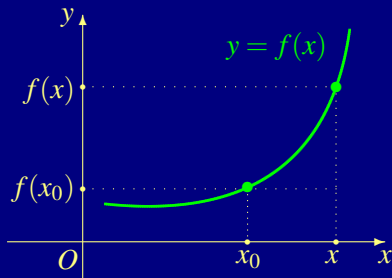


Наочним відображенням властивості неперервності функції є відсутність у графіка функції, неперервної на деякому проміжку, розривів на цьому проміжку. Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ має розрив у точці $x = 0$, в якій вона не визначена, але в кожній точці області визначення ця функція неперервна.

- Для уточнення наочних уявлень про неперервність функції використовується поняття границі функції в точці. Так, функція $f(x)$ називається **неперервною** в точці x_0 , якщо границя функції в цій точці дорівнює значенню функції в точці x_0 , тобто якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Приріст аргумента и приріст функції

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на деякому проміжку, який містить точку x_0 .



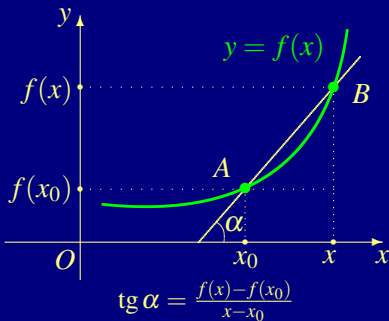
При переході від точки x_0 до точки x цього проміжку зміна змінної x виражається різницею $x - x_0$, а зміна функції – різницею $f(x) - f(x_0)$.

Зміну змінної x називають також **прирістом аргумента** і позначають $\Delta x = x - x_0$.

Зміну функції називають також **прирістом функції** і позначають Δf , тобто $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Середня швидкість зміни функції

Очевидно, що відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ виражає середню швидкість зміни функції на відрізку, що з'єднує точки x_0 і x .



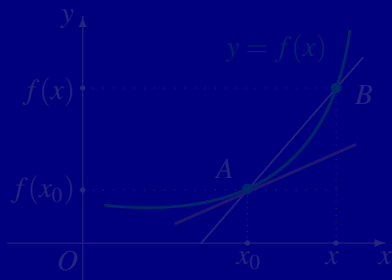
Помітимо, що чисельно відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ дорівнює тангенсу кута α між додатнім напрямком осі Ox і січною, яка проходить через точки A і B графіка функції $f(x)$, абсциси яких відповідно дорівнюють x_0 і x .

Іншими словами, середня швидкість $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ зміни функції чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту січної, що проходить через точки A і B.

Похідна функції

Похідною $f'(x_0)$ функції $f(x)$ в точці x_0 називається швидкість зміни функції в цій точці, яка знаходиться як границя середньої швидкості при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

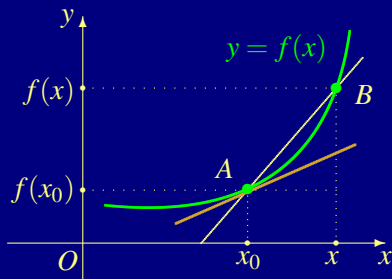


В геометричних термінах цьому граничному переходу відповідає перехід січної до свого граничного положення – дотичної в точці A при прямуванні точки B до точки A вздовж кривої $y = f(x)$.

Похідна функції

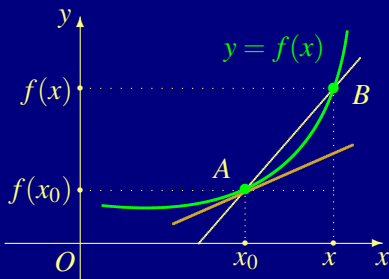
Похідною $f'(x_0)$ функції $f(x)$ в точці x_0 називається швидкість зміни функції в цій точці, яка знаходиться як границя середньої швидкості при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



В геометричних термінах цьому граничному переходу відповідає перехід січної до свого граничного положення – дотичної в точці A при прямуванні точки B до точки A вздовж кривої $y = f(x)$.

Похідна і кутовий коефіцієнт дотичної



Тому і кутовий коефіцієнт січної при граничному переході перетворюється в кутовий коефіцієнт дотичної в точці A .

Отже, похідна функції $f(x)$ в точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $A(x_0, f(x_0))$, тобто кутовий коефіцієнт цієї дотичної:

$$k_{\text{дот}} = f'(x_0).$$

Похідна як швидкість зміни функції

Підкреслимо ще раз, що **похідна функції в точці виражає швидкість зміни функції в цій точці**, тобто похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ виражає **швидкість** протікання процесу, який описується залежністю $f(x)$.

- Зокрема, якщо в фізичних задачах відома залежність пройденого тілом шляху $s = s(t)$ від часу t , то похідна $s'(t)$ виражає **миттєву швидкість тіла** $v(t)$ в момент часу t , тобто $v(t) = s'(t)$.
- В свою чергу, похідна $v'(t)$ виражає **миттєве прискорення тіла** $a(t)$ в момент часу t (іншими словами, швидкість зміни швидкості), тобто $a(t) = v'(t)$.

Похідна як швидкість зміни функції

Підкреслимо ще раз, що **похідна функції в точці виражає швидкість зміни функції в цій точці**, тобто похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ виражає **швидкість** протікання процесу, який описується залежністю $f(x)$.

- Зокрема, якщо в фізичних задачах відома залежність пройденого тілом шляху $s = s(t)$ від часу t , то похідна $s'(t)$ виражає **миттєву швидкість тіла** $v(t)$ в момент часу t , тобто $v(t) = s'(t)$.
- В свою чергу, похідна $v'(t)$ виражає **миттєве прискорення тіла** $a(t)$ в момент часу t (іншими словами, швидкість зміни швидкості), тобто $a(t) = v'(t)$.

Похідна як швидкість зміни функції

Підкреслимо ще раз, що **похідна функції в точці виражає швидкість зміни функції в цій точці**, тобто похідна $f'(x)$ функції $f(x)$ виражає **швидкість** протікання процесу, який описується залежністю $f(x)$.

- Зокрема, якщо в фізичних задачах відома залежність пройденого тілом шляху $s = s(t)$ від часу t , то похідна $s'(t)$ виражає **миттєву швидкість тіла** $v(t)$ в момент часу t , тобто $v(t) = s'(t)$.
- В свою чергу, похідна $v'(t)$ виражає **миттєве прискорення** тіла $a(t)$ в момент часу t (іншими словами, швидкість зміни швидкості), тобто $a(t) = v'(t)$.

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Розглянемо рівняння $\sin x = 2x$.

Очевидно, що воно має корінь $x = 0$.

Відповідь на питання, чи є інші корені в цьому рівнянні, природньо залежить від взаємного розміщення графіків функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$.

Уточнити взаємне розміщення цих графіків можна, використовуючи поняття похідної як швидкості зміни функції.

Відомо, що $g'(x) = 2$ і $f'(x) = \cos x$ (техніка знаходження похідних розглядається далі).

Оскільки $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ і $g'(0) > f'(0)$, то швидкість зміни функції $g(x) = 2x$ в точці $x = 0$ більша, ніж швидкість зміни функції $f(x) = \sin x$, тобто функція $g(x)$ "втікає" від функції $f(x)$.

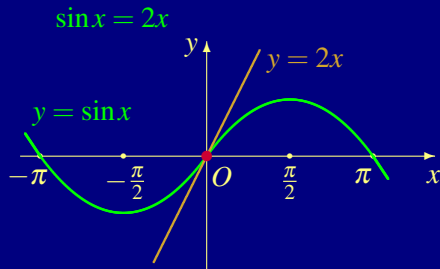
Крім того, при $x > 0$ маємо співвідношення

$$f'(x) = \cos x \leq 1 < 2 = g'(x),$$

з яких випливає, що на проміжку $(0, \infty)$ графіки функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ не можуть більше перетинатися, оскільки швидкість зміни функції $f(x)$ менша, ніж швидкість зміни функції $g(x)$, і, таким чином, функція $f(x)$ не може "догнати" функцію $g(x)$, яка від неї "втікає".

Похідна як швидкість зміни функції

Помітимо також, що в силу непарності функцій $y = f(x) = \sin x$ і $y = g(x) = 2x$ їх графіки симетричні відносно початку координат і тому при від'ємних x також не мають точок перетину. Отже, рівняння $\sin x = 2x$ має єдиний корінь $x = 0$ (див. мал.):



Техніка диференціювання

Операцію знаходження похідної функції $f(x)$ називають диференціюванням функції $f(x)$.

- Диференціювання функції можна розглядати як формальну операцію, яка за строго визначеними правилами ставить у відповідність функції f деяку іншу функцію f' , яку називають похідною функції f . Найбільш прості з правил, за якими встановлюється вказана відповідність, утворюють таблицю похідних від основних елементарних функцій.

Техніка диференціювання

Таблиця похідних

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x, \frac{a}{a} \neq 1$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg} x$	$\text{ctg} x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg} x$	$\text{arcctg} x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Використовуючи формулу похідної від функції x^α , отримуємо

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{і т.п.}$$

Техніка диференціювання

Таблиця похідних

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x, \frac{a}{a} \neq 1$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg} x$	$\text{ctg} x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg} x$	$\text{arcctg} x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Використовуючи формулу похідної від функції x^α , отримуємо

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 x^{-2-1} = -2 x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{і т.п.}$$

Техніка диференціювання

Таблиця похідних

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x, \frac{a}{a} \neq 1$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg} x$	$\text{ctg} x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg} x$	$\text{arcctg} x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Використовуючи формулу похідної від функції x^α , отримуємо

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 x^{-2-1} = -2 x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{і т.п.}$$

Техніка диференціювання

Таблиця похідних

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x, \frac{a}{a} \neq 1$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg} x$	$\text{ctg} x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg} x$	$\text{arcctg} x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Використовуючи формулу похідної від функції x^α , отримуємо

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{і т.п.}$$

Техніка диференціювання

Таблиця похідних

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x, \frac{a}{a} \neq 1$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg} x$	$\text{ctg} x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg} x$	$\text{arcctg} x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Використовуючи формулу похідної від функції x^α , отримуємо

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$(\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -1 x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\frac{1}{x^2})' = (x^{-2})' = -2 x^{-2-1} = -2 x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{і т.п.}$$

Техніка диференціювання

Справедливі також наступні **правила диференціювання суми (різниці), добутку і частки** функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Зокрема, якщо k – деяке число, не рівне нулю, то

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x).$$

Техніка диференціювання

Справедливі також наступні **правила диференціювання суми (різниці), добутку і частки** функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Зокрема, якщо k – деяке число, не рівне нулю, то

$$\left(kf(x)\right)' = kf'(x).$$

Техніка диференціювання

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x; \quad \text{б) } y = \frac{3x+1}{2x-3}.$$

Розв'язання. У відповідності з правилами диференціювання маємо

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= ((x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x)' = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)' \cos x + (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)(\cos x)' = \\ &= (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $y' = (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x$;

$$\text{б) } y' = -\frac{11}{(2x-3)^2}.$$

Техніка диференціювання

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x; \quad \text{б) } y = \frac{3x+1}{2x-3}.$$

Розв'язання. У відповідності з правилами диференціювання маємо

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= ((x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x)' = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)' \cos x + (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)(\cos x)' = \\ &= (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $y' = (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x$;

$$\text{б) } y' = -\frac{11}{(2x-3)^2}.$$

Техніка диференціювання

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x; \quad \text{б) } y = \frac{3x+1}{2x-3}.$$

Розв'язання. У відповідності з правилами диференціювання маємо

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= ((x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x)' = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)' \cos x + (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)(\cos x)' = \\ &= (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $y' = (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x$;

$$\text{б) } y' = -\frac{11}{(2x-3)^2}.$$

Техніка диференціювання

Приклад 1. Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x; \quad \text{б) } y = \frac{3x+1}{2x-3}.$$

Розв'язання. У відповідності з правилами диференціювання маємо

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= ((x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \cos x)' = \\ &= (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)' \cos x + (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi)(\cos x)' = \\ &= (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } y' &= \left(\frac{3x+1}{2x-3} \right)' = \frac{(3x+1)'(2x-3) - (3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \\ &= \frac{3(2x-3) - 2(3x+1)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x-2}{(2x-3)^2} = -\frac{11}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: а) $y' = (3x^2 - 6x + 5) \cos x - (x^3 - 3x^2 + 5x - \pi) \sin x$;

$$\text{б) } y' = -\frac{11}{(2x-3)^2}.$$

Техніка диференціювання

Для диференціювання складеної функції $f(g(x))$ справедливе наступне правило:

$$\left[f(g(x)) \right]' = f'(g(x))g'(x).$$

Приклад 2. Знайти похідні наступних функцій:

а) $y(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$; б) $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 5}$;

в) $y(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$; г) $y(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y(x) = f(kx + b)$,

де функція f має похідну f' , а k і b – деякі сталі, не рівні нулю;

е) $y(x) = \sin x^2$; є) $y(x) = \sin^2 x$; ж) $y(x) = \ln^3(x^2 + 4)$.

Техніка диференціювання

Для диференціювання складеної функції $f(g(x))$ справедливе наступне правило:

$$\left[f(g(x)) \right]' = f'(g(x)) g'(x).$$

Приклад 2. Знайти похідні наступних функцій:

а) $y(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$; б) $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 5}$;

в) $y(x) = \frac{5}{\sqrt{2x-1}}$; г) $y(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y(x) = f(kx + b)$,

де функція f має похідну f' , а k і b – деякі сталі, не рівні нулю;

е) $y(x) = \sin x^2$; є) $y(x) = \sin^2 x$; ж) $y(x) = \ln^3(x^2 + 4)$.

Техніка диференціювання

Розв'язання. а) Подамо складену функцію

$y(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$ у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt{t}$ і $t = g(x) = 3x^2 + 5x + 1$. Враховуючи, що $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ і $t = 3x^2 + 5x + 1$, у відповідності з

правилом диференціювання складеної функції маємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\sqrt{3x^2 + 5x + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}} (3x^2 + 5x + 1)' = \\ &= \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}}. \end{aligned}$$

б) Аналогічно подамо функцію $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 5}$ у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt[3]{t}$, $t = g(x) = x^2 + 3x - 5$, і, враховуючи, що $f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, отримаємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2 + 3x - 5} \right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 5)^2}} (x^2 + 3x - 5)' = \\ &= \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 5)^2}}. \end{aligned}$$

Техніка диференціювання

Розв'язання. а) Подамо складену функцію

$y(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$ у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt{t}$ і $t = g(x) = 3x^2 + 5x + 1$. Враховуючи, що $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ і $t = 3x^2 + 5x + 1$, у відповідності з

правилом диференціювання складеної функції маємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\sqrt{3x^2 + 5x + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}} (3x^2 + 5x + 1)' = \\ &= \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}}. \end{aligned}$$

б) Аналогічно подамо функцію $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 5}$ у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt[3]{t}$, $t = g(x) = x^2 + 3x - 5$, і, враховуючи, що $f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, отримаємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2 + 3x - 5} \right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 5)^2}} (x^2 + 3x - 5)' = \\ &= \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 5)^2}}. \end{aligned}$$

Техніка диференціювання

в) Перепишемо функцію $y(x)$ у вигляді $y(x) = 5(2x - 1)^{-1/2}$.

Отже, маємо складену функцію $y(x) = f(g(x))$, де

$f(t) = 5t^{-1/2}$ і $t = g(x) = 2x - 1$. Тепер, враховуючи, що

$f'(t) = 5(-\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2}t^{-3/2}$, отримуємо

$$\begin{aligned}y'(x) &= (5(2x - 1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2}(2x - 1)^{-3/2}(2x - 1)' = \\&= -5(2x - 1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}.\end{aligned}$$

г) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \cos t$, $t = g(x) = 3x - \frac{\pi}{4}$.

Тому

$$\begin{aligned}y'(x) &= (\cos(3x - \frac{\pi}{4}))' = -\sin(3x - \frac{\pi}{4})(3x - \frac{\pi}{4})' = \\&= -3\sin(3x - \frac{\pi}{4}).\end{aligned}$$

д) Аналогічно отримуємо

$$y'(x) = (f(kx + b))' = f'(kx + b)(kx + b)' = kf'(kx + b).$$

е) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sin t$, $t = g(x) = x^2$.

Тому $y'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2$.

Техніка диференціювання

в) Перепишемо функцію $y(x)$ у вигляді $y(x) = 5(2x - 1)^{-1/2}$.

Отже, маємо складену функцію $y(x) = f(g(x))$, де

$f(t) = 5t^{-1/2}$ і $t = g(x) = 2x - 1$. Тепер, враховуючи, що

$f'(t) = 5 \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2} t^{-3/2}$, отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= (5(2x - 1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2} (2x - 1)^{-3/2} (2x - 1)' = \\ &= -5(2x - 1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

г) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \cos t$, $t = g(x) = 3x - \frac{\pi}{4}$.

Тому

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' = \\ &= -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

д) Аналогічно отримуємо

$$y'(x) = (f(kx + b))' = f'(kx + b)(kx + b)' = kf'(kx + b).$$

е) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sin t$, $t = g(x) = x^2$.

Тому $y'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2$.

Техніка диференціювання

в) Перепишемо функцію $y(x)$ у вигляді $y(x) = 5(2x - 1)^{-1/2}$.

Отже, маємо складену функцію $y(x) = f(g(x))$, де

$f(t) = 5t^{-1/2}$ і $t = g(x) = 2x - 1$. Тепер, враховуючи, що

$f'(t) = 5 \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2} t^{-3/2}$, отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= (5(2x - 1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2} (2x - 1)^{-3/2} (2x - 1)' = \\ &= -5(2x - 1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

г) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \cos t$, $t = g(x) = 3x - \frac{\pi}{4}$.

Тому

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' = \\ &= -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

д) Аналогічно отримуємо

$$y'(x) = (f(kx + b))' = f'(kx + b)(kx + b)' = kf'(kx + b).$$

е) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sin t$, $t = g(x) = x^2$.

Тому $y'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2$.

Техніка диференціювання

в) Перепишемо функцію $y(x)$ у вигляді $y(x) = 5(2x - 1)^{-1/2}$.

Отже, маємо складену функцію $y(x) = f(g(x))$, де

$f(t) = 5t^{-1/2}$ і $t = g(x) = 2x - 1$. Тепер, враховуючи, що

$f'(t) = 5 \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{5}{2} t^{-3/2}$, отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= (5(2x - 1)^{-1/2})' = -\frac{5}{2} (2x - 1)^{-3/2} (2x - 1)' = \\ &= -5(2x - 1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}. \end{aligned}$$

г) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \cos t$, $t = g(x) = 3x - \frac{\pi}{4}$.

Тому

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' = \\ &= -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

д) Аналогічно отримуємо

$$y'(x) = (f(kx + b))' = f'(kx + b)(kx + b)' = kf'(kx + b).$$

е) Тут $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sin t$, $t = g(x) = x^2$.

Тому $y'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2$.

Техніка диференціювання

є) Як і у попередньої функції $y(x)$, тут вираз $y(x)$ складено з тих же операцій (піднесення до квадрату і синус), але порядок цих операцій інший. Дійсно, маємо $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = t^2$ і $t = g(x) = \sin x$. Тому $y'(x) = (\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$.

Відзначимо тут також ще один спосіб знаходження похідної $y'(x)$, при якому спочатку перетворюється вираз $y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\sin^2 x)' = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)' = \\ &= 0 - \frac{1}{2} (-\sin 2x) (2x)' = \sin 2x. \end{aligned}$$

Очевидно, що обидва розглянутих способи знаходження похідної функції $\sin^2 x$ приводять до однакового результату.

Техніка диференціювання

є) Як і у попередньої функції $y(x)$, тут вираз $y(x)$ складено з тих же операцій (піднесення до квадрату і синус), але порядок цих операцій інший. Дійсно, маємо $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = t^2$ і $t = g(x) = \sin x$. Тому $y'(x) = (\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$.

Відзначимо тут також ще один спосіб знаходження похідної $y'(x)$, при якому спочатку перетворюється вираз $y(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\sin^2 x)' = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)' = \\ &= 0 - \frac{1}{2} (-\sin 2x) (2x)' = \sin 2x. \end{aligned}$$

Очевидно, що обидва розглянутих способи знаходження похідної функції $\sin^2 x$ приводять до однакового результату.

Техніка диференціювання

ж) Тут складена функція $y(x) = \ln^3(x^2 + 4)$ подається у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = t^3$, а функція $t = g(x) = \ln(x^2 + 4)$, в свою чергу, є складеною функцією, оскільки $g(x) = h(\varphi(x))$ при $h(z) = \ln z$ і $z = \varphi(x) = x^2 + 4$.

Отже, при обчисленні похідної $y'(x)$ правило диференціювання складеної функції використовується двічі так, що послідовно матимемо

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\ln^3(x^2 + 4))' = 3 \ln^2(x^2 + 4) g'(x) = \\ &= 3 \ln^2(x^2 + 4) (\ln(x^2 + 4))' = 3 \ln^2(x^2 + 4) \frac{1}{x^2 + 4} (x^2 + 4)' = \\ &= \frac{6x}{x^2 + 4} \ln^2(x^2 + 4). \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: а) } y' = \frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}; \text{ б) } y' = \frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x-5)^2}};$$

Техніка диференціювання

ж) Тут складена функція $y(x) = \ln^3(x^2 + 4)$ подається у вигляді $y(x) = f(g(x))$, де $f(t) = t^3$, а функція $t = g(x) = \ln(x^2 + 4)$, в свою чергу, є складеною функцією, оскільки $g(x) = h(\varphi(x))$ при $h(z) = \ln z$ і $z = \varphi(x) = x^2 + 4$.

Отже, при обчисленні похідної $y'(x)$ правило диференціювання складеної функції використовується двічі так, що послідовно матимемо

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\ln^3(x^2 + 4))' = 3 \ln^2(x^2 + 4) g'(x) = \\ &= 3 \ln^2(x^2 + 4) (\ln(x^2 + 4))' = 3 \ln^2(x^2 + 4) \frac{1}{x^2 + 4} (x^2 + 4)' = \\ &= \frac{6x}{x^2 + 4} \ln^2(x^2 + 4). \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: а) } y' = \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 1}}; \text{ б) } y' = \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x - 5)^2}};$$

Техніка диференціювання

$$\text{в) } y' = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}; \quad \text{г) } y' = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{д) } y' = kf'(kx+b); \quad \text{е) } y' = 2x \cos x^2; \quad \text{є) } y' = \sin 2x;$$

$$\text{ж) } y' = \frac{6x}{x^2+4} \ln^2(x^2+4).$$

Розглянемо ще один приклад, в якому при знаходженні похідної використовуються різні правила диференціювання.

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{1-x}.$$

Техніка диференціювання

$$\text{в) } y' = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}; \quad \text{г) } y' = -3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\text{д) } y' = k f'(kx+b); \quad \text{е) } y' = 2x \cos x^2; \quad \text{є) } y' = \sin 2x;$$

$$\text{ж) } y' = \frac{6x}{x^2+4} \ln^2(x^2+4).$$

Розглянемо ще один приклад, в якому при знаходженні похідної використовуються різні правила диференціювання.

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{1-x}.$$

Техніка диференціювання

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки маємо

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt{3-x}}{1-x} \right)' = \frac{(\sqrt{3-x})'(1-x) - \sqrt{3-x}(1-x)'}{(1-x)^2}. \quad (1)$$

У відповідності з правилом диференціювання складеної функції знаходимо

$$(\sqrt{3-x})' = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Підставляючи цей вираз в рівність (1), далі отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\frac{1-x}{2\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x) + 2(3-x)}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2} = \\ &= \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}.$

Техніка диференціювання

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки маємо

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt{3-x}}{1-x} \right)' = \frac{(\sqrt{3-x})'(1-x) - \sqrt{3-x}(1-x)'}{(1-x)^2}. \quad (1)$$

У відповідності з правилом диференціювання складеної функції знаходимо

$$(\sqrt{3-x})' = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Підставляючи цей вираз в рівність (1), далі отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\frac{1-x}{2\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x) + 2(3-x)}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2} = \\ &= \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}.$

Техніка диференціювання

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки маємо

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt{3-x}}{1-x} \right)' = \frac{(\sqrt{3-x})'(1-x) - \sqrt{3-x}(1-x)'}{(1-x)^2}. \quad (1)$$

У відповідності з правилом диференціювання складеної функції знаходимо

$$(\sqrt{3-x})' = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Підставляючи цей вираз в рівність (1), далі отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\frac{1-x}{2\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x) + 2(3-x)}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2} = \\ &= \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $y' = \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}.$

Техніка диференціювання

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки маємо

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt{3-x}}{1-x} \right)' = \frac{(\sqrt{3-x})'(1-x) - \sqrt{3-x}(1-x)'}{(1-x)^2}. \quad (1)$$

У відповідності з правилом диференціювання складеної функції знаходимо

$$(\sqrt{3-x})' = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}.$$

Підставляючи цей вираз в рівність (1), далі отримуємо

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\frac{1-x}{2\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x) + 2(3-x)}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2} = \\ &= \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } y' = \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}.$$

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Зайдіть похідну функції: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки отримуємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Зайдіть похідну функції: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки отримуємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.).

Зайдіть похідну функції: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання. У відповідності з правилом диференціювання частки отримуємо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.).
Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{13 - 3x}$ в
точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. У відповідності з правилом
диференціювання складеної функції отримуємо

$$y'(x) = (\sqrt{13 - 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{13 - 3x}} (13 - 3x)' = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3x}}.$$

Тепер

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3 \cdot 3}} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Відповідь: $-0,75$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.).
Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{13 - 3x}$ в
точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. У відповідності з правилом
диференціювання складеної функції отримуємо

$$y'(x) = (\sqrt{13 - 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{13 - 3x}} (13 - 3x)' = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3x}}.$$

Тепер

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3 \cdot 3}} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Відповідь: $-0,75$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.).
Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{13 - 3x}$ в
точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. У відповідності з правилом
диференціювання складеної функції отримуємо

$$y'(x) = (\sqrt{13 - 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{13 - 3x}} (13 - 3x)' = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3x}}.$$

Тепер

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3 \cdot 3}} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Відповідь: $-0,75$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2016 р.).
Обчисліть значення похідної функції $y = \sqrt{13 - 3x}$ в
точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. У відповідності з правилом
диференціювання складеної функції отримуємо

$$y'(x) = (\sqrt{13 - 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{13 - 3x}} (13 - 3x)' = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3x}}.$$

Тепер

$$y'(x_0) = y'(3) = -\frac{3}{2\sqrt{13 - 3 \cdot 3}} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4} = -0,75.$$

Відповідь: $-0,75$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t в секундах. Знайдіть значення t (в секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с.

Розв'язання. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t — це

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3.$$

Тепер знайдемо значення t , при якому $v(t) = 76$:
 $4t + 3 = 76$, звідки отримуємо $t = 73/4 = 18,25$ (с).

Відповідь: 18,25.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t в секундах. Знайдіть значення t (в секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с.

Розв'язання. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t — це

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3.$$

Тепер знайдемо значення t , при якому $v(t) = 76$:
 $4t + 3 = 76$, звідки отримуємо $t = 73/4 = 18,25$ (с).

Відповідь: $18,25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t в секундах. Знайдіть значення t (в секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с.

Розв'язання. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t — це

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3.$$

Тепер знайдемо значення t , при якому $v(t) = 76$:
 $4t + 3 = 76$, звідки отримуємо $t = 73/4 = 18,25$ (с).

Відповідь: $18,25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 6 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2011 р.). Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t в секундах. Знайдіть значення t (в секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с.

Розв'язання. Миттєва швидкість матеріальної точки в момент часу t — це

$$v(t) = s'(t) = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3.$$

Тепер знайдемо значення t , при якому $v(t) = 76$:
 $4t + 3 = 76$, звідки отримуємо $t = 73/4 = 18,25$ (с).

Відповідь: $18,25$.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$
(час t вимірюється в секундах, шлях s — в метрах).
Визначіть прискорення його руху в момент $t = 10$ с.

Розв'язання. Миттєва швидкість тіла в момент часу t —
це

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4,$$

а миттєве прискорення — це

$$a(t) = v'(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4.$$

Отже, прискорення його руху в момент $t = 10$ с дорівнює

$$a(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: 36.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$
(час t вимірюється в секундах, шлях s — в метрах).
Визначіть прискорення його руху в момент $t = 10$ с.

Розв'язання. Миттєва швидкість тіла в момент часу t —
це

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4,$$

а миттєве прискорення — це

$$a(t) = v'(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4.$$

Отже, прискорення його руху в момент $t = 10$ с дорівнює

$$a(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: 36.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$
(час t вимірюється в секундах, шлях s — в метрах).
Визначіть прискорення його руху в момент $t = 10$ с.

Розв'язання. Миттєва швидкість тіла в момент часу t —
це

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4,$$

а миттєве прискорення — це

$$a(t) = v'(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4.$$

Отже, прискорення його руху в момент $t = 10$ с дорівнює

$$a(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: 36.

Приклади із ЗНО

Приклад 7 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2018 р.).
Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$
(час t вимірюється в секундах, шлях s — в метрах).
Визначіть прискорення його руху в момент $t = 10$ с.

Розв'язання. Миттєва швидкість тіла в момент часу t —
це

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = 2t^2 - 4t + 4,$$

а миттєве прискорення — це

$$a(t) = v'(t) = (2t^2 - 4t + 4)' = 4t - 4.$$

Отже, прискорення його руху в момент $t = 10$ с дорівнює

$$a(10) = 4 \cdot 10 - 4 = 36 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: 36.