

Застосування похідної до дослідження функцій

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 29



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Локальні екстремуми

Оскільки похідна виражає швидкість зміни функції в точці, то вона є характеристикою локальної поведінки функції. При описі локальних властивостей функцій використовується поняття околу.

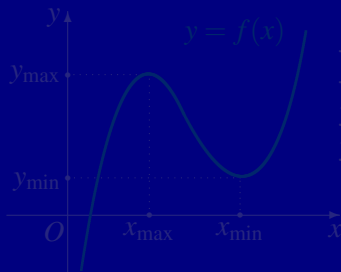
- **Околом** точки x_0 називають інтервал (a, b) , який містить цю точку.



Локальні екстремуми

Розглянемо поняття локальних екстремумів функції, а також точок локальних екстремумів.

- Якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (або $f(x) \geq f(x_0)$), то таку точку x_0 називають точкою локального максимума (відповідно, мінімуму) функції $f(x)$. При цьому відповідне значення функції $f(x_0)$ називається локальним максимумом (мінімумом) функції $f(x)$ (див. мал.).



$x_{\min}$ — точка локального мінімуму

$x_{\max}$ — точка локального максимуму

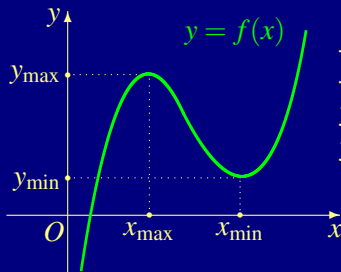
$y_{\min} = f(x_{\min})$ — локальний мінімум

$y_{\max} = f(x_{\max})$ — локальний максимум

Локальні екстремуми

Розглянемо поняття локальних екстремумів функції, а також точок локальних екстремумів.

- Якщо для всіх x з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (або $f(x) \geq f(x_0)$), то таку точку x_0 називають **точкою локального максимуму** (відповідно, **мінімуму**) функції $f(x)$. При цьому відповідне значення функції $f(x_0)$ називається **локальним максимумом** (**мінімумом**) функції $f(x)$ (див. мал.).



$x_{\min}$ — точка локального мінімуму

$x_{\max}$ — точка локального максимуму

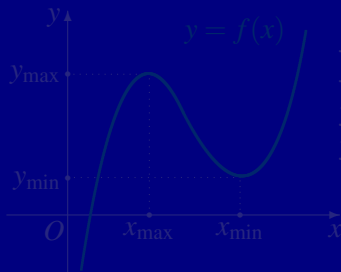
$y_{\min} = f(x_{\min})$ — локальний мінімум

$y_{\max} = f(x_{\max})$ — локальний максимум

Локальні екстремуми

Термін "**локальний**" у назві максимума (чи мінімуму) підкреслює, що **максимум** (чи **мінімум**) у точці x_0 має місце лише відносно сусідніх точок і може не бути при цьому абсолютним максимумом (чи мінімумом) функції.

Так, очевидно, що функція, графік якої зображено на мал., приймає значення більші, ніж локальний максимум $y_{\max}$, і менші, ніж локальний мінімум $y_{\min}$.



$x_{\min}$ – точка локального мінімуму

$x_{\max}$ – точка локального максимуму

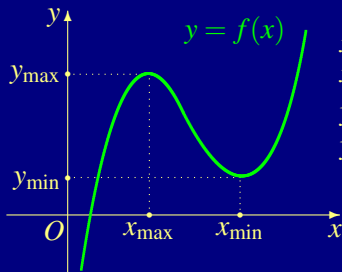
$y_{\min} = f(x_{\min})$ – локальний мінімум

$y_{\max} = f(x_{\max})$ – локальний максимум

Локальні екстремуми

Термін "локальний" у назві максимума (чи мінімуму) підкреслює, що максимум (чи мінімум) у точці x_0 має місце лише відносно сусідніх точок і може не бути при цьому абсолютним максимумом (чи мінімумом) функції.

Так, очевидно, що функція, графік якої зображено на мал., приймає значення більші, ніж локальний максимум $y_{\max}$, і менші, ніж локальний мінімум $y_{\min}$.



$x_{\min}$ – точка локального мінімуму

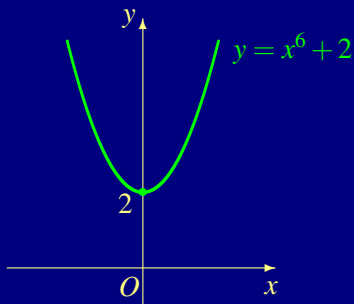
$x_{\max}$ – точка локального максимуму

$y_{\min} = f(x_{\min})$ – локальний мінімум

$y_{\max} = f(x_{\max})$ – локальний максимум

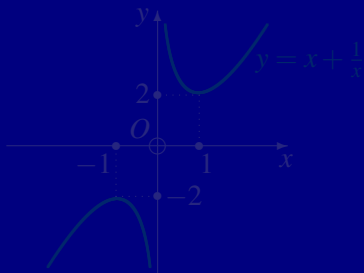
Локальні екстремуми

А ось функція $y = x^6 + 2$ має в точці $x_0 = 0$ не тільки локальний, але також і абсолютний мінімум, рівний 2, оскільки значень, менших числа 2, ця функція не приймає (див. мал.).



Локальні екстремуми

У зв'язку з цим зазначимо, що немає нічого дивного в тому, що **локальний мінімум може виявитися більшим, ніж локальний максимум функції.**

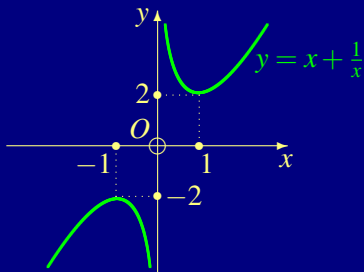


Наприклад, функція $y = x + \frac{1}{x}$, графік якої зображено на мал., має локальний мінімум $y_{\min} = y(1) = 2$ і локальний максимум $y_{\max} = y(-1) = -2$, тобто у цьому випадку $y_{\min} > y_{\max}$.

Функцію $y = x + \frac{1}{x}$ буде досліджено далі в Прикладі 1.

Локальні екстремуми

У зв'язку з цим зазначимо, що немає нічого дивного в тому, що локальний мінімум може виявитися більшим, ніж локальний максимум функції.



Наприклад, функція $y = x + \frac{1}{x}$, графік якої зображено на мал., має локальний мінімум $y_{\min} = y(1) = 2$ і локальний максимум $y_{\max} = y(-1) = -2$, тобто у цьому випадку $y_{\min} > y_{\max}$.

Функцію $y = x + \frac{1}{x}$ буде досліджено далі в Прикладі 1.

Локальні екстремуми

Звернемо також увагу на те, що в означенні точки локального максимума (чи мінімуму) використовується **нестрога** нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (чи, відповідно, $f(x) \geq f(x_0)$). Це означає, що **значення функції в точці локального максимума – не менше, а в точці локального мінімуму – не більше, ніж у сусідніх точках.**

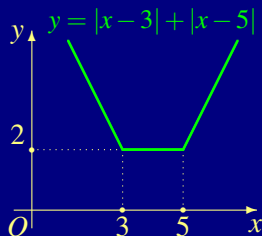
Щоб роз'яснити зміст цього зауваження, розглянемо функцію $y = |x - 3| + |x - 5|$ та її графік, зображений на наступному малюнку.

Локальні екстремуми

Звернемо також увагу на те, що в означенні точки локального максимума (чи мінімуму) використовується **нестрога** нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (чи, відповідно, $f(x) \geq f(x_0)$). Це означає, що **значення функції в точці локального максимума – не менше, а в точці локального мінімуму – не більше, ніж у сусідніх точках.**

Щоб роз'яснити зміст цього зауваження, розглянемо функцію $y = |x - 3| + |x - 5|$ та її графік, зображений на наступному малюнку.

Локальні екстремуми

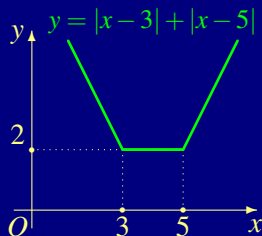


Точки локального мінімуму цієї функції заповнюють відрізок $[3; 5]$, оскільки значення функції в цих точках не більші, ніж у сусідніх точках.

Проте, будь-яка точка x з інтервалу $(3; 5)$ є також точкою локального максимуму (!) цієї функції, оскільки значення функції в цій точці дорівнює значенню у сусідніх точках (а отже, не менше, ніж у них).

Отже, точки проміжку $(3; 5)$ є для функції $y = |x - 3| + |x - 5|$ одночасно і точками локального мінімуму і точками локального максимуму.

Локальні екстремуми

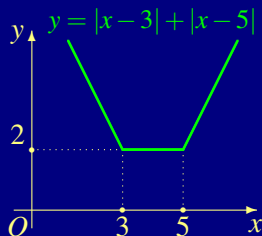


Точки локального мінімуму цієї функції заповнюють відрізок $[3;5]$, оскільки значення функції в цих точках не більші, ніж у сусідніх точках.

Проте, будь-яка точка x з інтервалу $(3;5)$ є також точкою локального максимуму (!) цієї функції, оскільки значення функції в цій точці дорівнює значенню у сусідніх точках (а отже, не менше, ніж у них).

Отже, точки проміжку $(3;5)$ є для функції $y = |x - 3| + |x - 5|$ одночасно і точками локального мінімуму і точками локального максимуму.

Локальні екстремуми



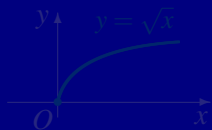
Точки локального мінімуму цієї функції заповнюють відрізок $[3;5]$, оскільки значення функції в цих точках не більші, ніж у сусідніх точках.

Проте, будь-яка точка x з інтервалу $(3;5)$ є також точкою локального максимуму (!) цієї функції, оскільки значення функції в цій точці дорівнює значенню у сусідніх точках (а отже, не менше, ніж у них).

Отже, точки проміжку $(3;5)$ є для функції $y = |x - 3| + |x - 5|$ одночасно і точками локального мінімуму і точками локального максимуму.

Локальні екстремуми

Ще однією особливістю означення точки локального максимума (чи мінімума) є неявна вимога того, щоб функція $f(x)$ обов'язково була **визначена в деякому околі точки локального максимума (мінімума) з обох сторін від цієї точки**.

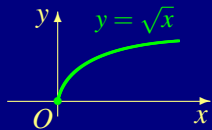


$$D(y) = [0, \infty)$$

Наслідком цієї вимоги, зокрема, є висновок про те, що функція $y = \sqrt{x}$ не має в точці $x = 0$ локального мінімуму, оскільки ця функція не визначена зліва від точки $x = 0$. У той же час, очевидно, що в точці $x = 0$ функція $y = \sqrt{x}$ має абсолютний мінімум, рівний нулю.

Локальні екстремуми

Ще однією особливістю означення точки локального максимума (чи мінімуму) є неявна вимога того, щоб функція $f(x)$ обов'язково була визначена в деякому околі точки локального максимума (мінімуму) з обох сторін від цієї точки.



$$D(y) = [0, \infty)$$

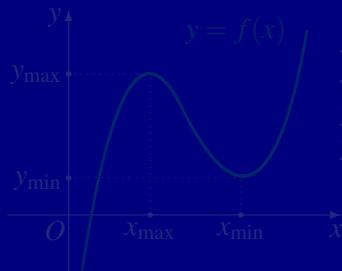
Наслідком цієї вимоги, зокрема, є висновок про те, що функція $y = \sqrt{x}$ не має в точці $x = 0$ локального мінімуму, оскільки ця функція не визначена зліва від точки $x = 0$. У той же час, очевидно, що в точці $x = 0$ функція $y = \sqrt{x}$ має абсолютний мінімум, рівний нулю.

Локальні екстремуми

Нарешті, зазначимо, що в шкільному курсі математики слово "локальний" у назві максимума (чи мінімуму), як правило, опускається. При цьому

- точки максимума и мінімума називають точками екстремума, а відповідні їм значення функції — екстремумами функції.

Не потрібно плутати поняття екстремума і точки екстремума функції. Тому, ще раз підкреслимо, що екстремум — це значення функції в точці екстремума.



$x_{\min}$ — точка мінімуму

$x_{\max}$ — точка максимуму

$y_{\min} = f(x_{\min})$ — мінімум

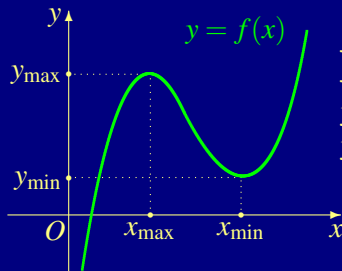
$y_{\max} = f(x_{\max})$ — максимум

Локальні екстремуми

Нарешті, зазначимо, що в шкільному курсі математики слово "локальний" у назві максимума (чи мінімуму), як правило, опускається. При цьому

- точки максимума и мінімуму називають точками екстремума, а відповідні їм значення функції — екстремумами функції.

Не потрібно плутати поняття екстремума і точки екстремума функції. Тому, ще раз підкреслимо, що екстремум — це значення функції в точці екстремума.



$x_{\min}$ — точка мінімуму

$x_{\max}$ — точка максимуму

$y_{\min} = f(x_{\min})$ — мінімум

$y_{\max} = f(x_{\max})$ — максимум

Ознаки зростання і спадання функції

Застосування похідної до дослідження функції базується на наступних ознаках зростання і спадання функції.

- Достатня ознака зростання функції:
якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.
- Достатня ознака спадання функції:
якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

З цих ознак випливає, що локальний екстремум у функції $f(x)$ можливий лише в тих точках, у яких похідна $f'(x)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Ознаки зростання і спадання функції

Застосування похідної до дослідження функції базується на наступних ознаках зростання і спадання функції.

- Достатня ознака зростання функції:
якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.
- Достатня ознака спадання функції:
якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

З цих ознак випливає, що локальний екстремум у функції $f(x)$ можливий лише в тих точках, у яких похідна $f'(x)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Ознаки зростання і спадання функції

Застосування похідної до дослідження функції базується на наступних ознаках зростання і спадання функції.

- Достатня ознака зростання функції:
якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.
- Достатня ознака спадання функції:
якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

З цих ознак випливає, що локальний екстремум у функції $f(x)$ можливий лише в тих точках, у яких похідна $f'(x)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Ознаки зростання і спадання функції

Застосування похідної до дослідження функції базується на наступних ознаках зростання і спадання функції.

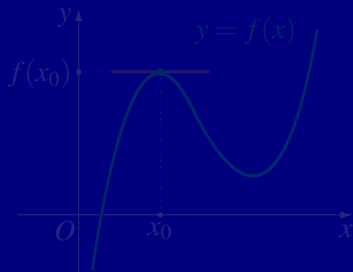
- Достатня ознака зростання функції:
якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.
- Достатня ознака спадання функції:
якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі (a, b) , то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

З цих ознак випливає, що локальний екстремум у функції $f(x)$ можливий лише в тих точках, у яких похідна $f'(x)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Критичні точки функції

- Критичними точками (тобто точками, що є підозрілими на екстремум) функції $f(x)$ називаються точки з області визначення цієї функції, в яких похідна $f'(x)$ або не існує, або дорівнює нулю.

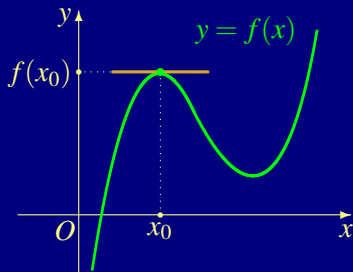
Відзначимо, що в точці $(x_0, f(x_0))$ такий, що $f'(x_0) = 0$, графік функції $y = f(x)$ має дотичну, паралельну осі Ox .



Критичні точки функції

- Критичними точками (тобто точками, що є підозрілими на екстремум) функції $f(x)$ називаються точки з області визначення цієї функції, в яких похідна $f'(x)$ або не існує, або дорівнює нулю.

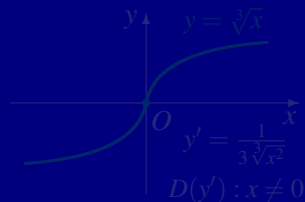
Відзначимо, що в точці $(x_0, f(x_0))$ такий, що $f'(x_0) = 0$, графік функції $y = f(x)$ має дотичну, паралельну осі Ox .



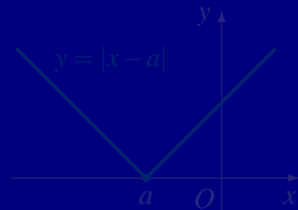
Критичні точки функції

В точці $(x, f(x))$, для якої $f'(x)$ не визначена (тобто **похідна в точці x не існує**), графік функції $y = f(x)$ має одну з наступних особливостей:

1) або дотична до графіка в цій точці паралельна осі Oy . Наприклад, графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точці $(0;0)$, перетинаючи вісь Oy , у той же час дотикається (!) до цієї осі (див. мал.);



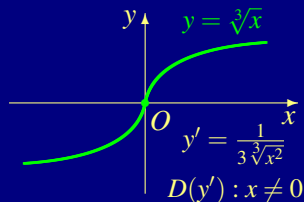
2) або графік функції в цій точці не має дотичної. Наприклад, графік функції $y = |x - a|$ не має дотичної в точці $(a;0)$, в якій є злам графіка (див. мал.).



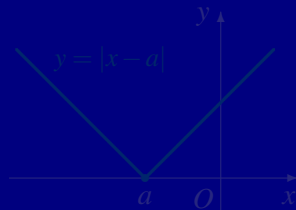
Критичні точки функції

В точці $(x, f(x))$, для якої $f'(x)$ не визначена (тобто **похідна в точці x не існує**), графік функції $y = f(x)$ має одну з наступних особливостей:

1) або **дотична до графіка в цій точці паралельна осі Oy** . Наприклад, графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точці $(0;0)$, перетинаючи вісь Oy , у той же час **дотикається (!)** до цієї **осі** (див. мал.);



2) або графік функції в цій точці не має дотичної. Наприклад, графік функції $y = |x - a|$ не має дотичної в точці $(a;0)$, в якій є **злам графіка** (див. мал.).

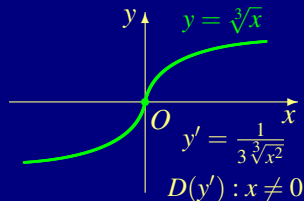


Критичні точки функції

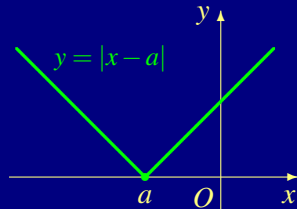
В точці $(x, f(x))$, для якої $f'(x)$ не визначена (тобто **похідна в точці x не існує**), графік функції $y = f(x)$ має одну з наступних особливостей:

1) або **дотична до графіка в цій точці паралельна осі Oy** .

Наприклад, графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точці $(0;0)$, перетинаючи вісь Oy , у той же час **дотикається (!)** до цієї **осі** (див. мал.);



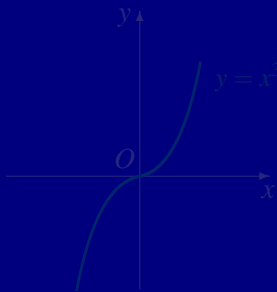
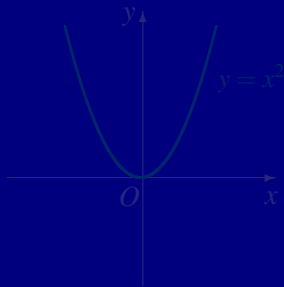
2) або **графік функції в цій точці не має дотичної**. Наприклад, графік функції $y = |x - a|$ не має дотичної в точці $(a;0)$, в якій є **злам графіка** (див. мал.).



Критичні точки функції

Підкреслимо, що **критична точка функції може не бути точкою екстремума цієї функції**.

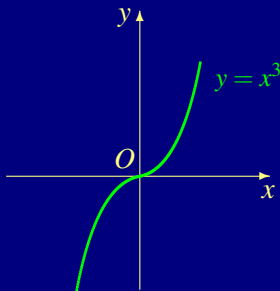
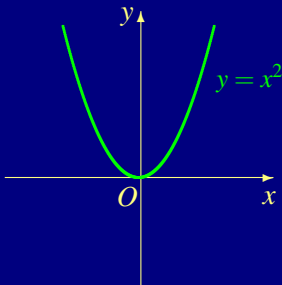
Так, функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = x^2$ мають критичну точку $x = 0$, оскільки $f'(0) = g'(0) = 0$, тобто їх графіки дотикаються до осі Ox в початку координат. При цьому функція $g(x) = x^2$ в точці $x = 0$ має мінімум, а функція $f(x) = x^3$ екстремума в ній не має, оскільки зростає на всій числовій прямій.



Критичні точки функції

Підкреслимо, що **критична точка функції може не бути точкою екстремума цієї функції**.

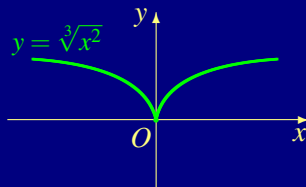
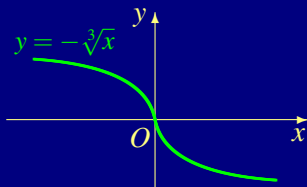
Так, функції $f(x) = x^3$ і $g(x) = x^2$ мають критичну точку $x = 0$, оскільки $f'(0) = g'(0) = 0$, тобто їх графіки дотикаються до осі Ox в початку координат. При цьому функція $g(x) = x^2$ в точці $x = 0$ має мінімум, а функція $f(x) = x^3$ **екстремума** в ній **не має**, оскільки зростає на всій числовій прямій.



Критичні точки функції

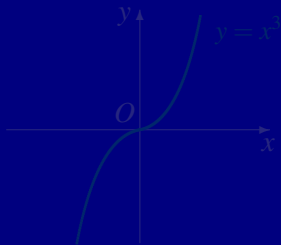
Аналогічно, функції $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ і $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ мають критичну точку $x = 0$, оскільки їх похідні $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ і $g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в цій точці не визначені, а їх графіки дотикаються (!) до осі Oy .

При цьому функція $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ спадає на всій числовій прямій і в точці $x = 0$ **екстремума не має**, а функція $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ має в ній мінімум.

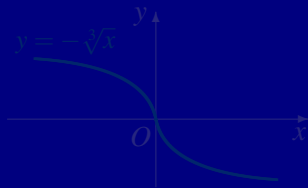


Ознаки монотонності функції (продовження)

Зазначимо, що наведені тут приклади функцій $y = x^3$ і $y = -\sqrt[3]{x}$ показують також, що умови $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ не є необхідними відповідно для зростання і спадання функції.



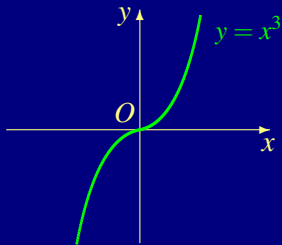
Функція $f(x) = x^3$ є строго зростаючою на всій числовій прямій, а умова $f'(x) = 3x^2 > 0$ при $x = 0$ не виконується.



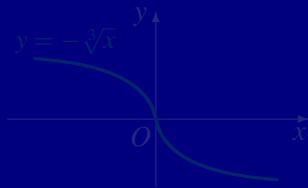
Функція $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ є строго спадною на всій числовій прямій, а умова $f'(x) < 0$ при $x = 0$ не виконується, оскільки похідна $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в цій точці не визначена.

Ознаки монотонності функції (продовження)

Зазначимо, що наведені тут приклади функцій $y = x^3$ і $y = -\sqrt[3]{x}$ показують також, що умови $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ не є необхідними відповідно для зростання і спадання функції.



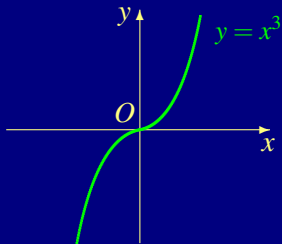
Функція $f(x) = x^3$ є строго зростаючою на всій числовій прямій, а умова $f'(x) = 3x^2 > 0$ при $x = 0$ не виконується.



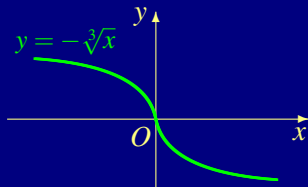
Функція $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ є строго спадною на всій числовій прямій, а умова $f'(x) < 0$ при $x = 0$ не виконується, оскільки похідна $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в цій точці не визначена.

Ознаки монотонності функції (продовження)

Зазначимо, що наведені тут приклади функцій $y = x^3$ і $y = -\sqrt[3]{x}$ показують також, що умови $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ не є необхідними відповідно для зростання і спадання функції.



Функція $f(x) = x^3$ є строго зростаючою на всій числовій прямій, а умова $f'(x) = 3x^2 > 0$ при $x = 0$ не виконується.



Функція $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ є строго спадною на всій числовій прямій, а умова $f'(x) < 0$ при $x = 0$ не виконується, оскільки похідна $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ в цій точці не визначена.

Ознаки монотонності функції (продовження)

Не зважаючи на це, у випадку, коли похідна $f'(x)$ існує в усіх точках деякого інтервала, умова $f'(x) > 0$ (або $f'(x) < 0$) виділяє, так би мовити, більшу частину множини зростання (відповідно, спадання) функції $f(x)$ на цьому інтервалі, а **ознаки зростання і спадання** функції можна уточнити у наступний спосіб.

- Якщо функція $f(x)$ має похідну при всіх $x \in (a, b)$, то для того щоб ця функція **зростала** (**спадала**) всюди на інтервалі (a, b) , необхідно і достатньо, щоб при всіх $x \in (a, b)$ виконувалась нерівність $f'(x) \geq 0$ (відповідно, $f'(x) \leq 0$) і критичні точки функції $f(x)$ не заповнювали при цьому цілий проміжок на інтервалі (a, b) .

Критичні точки функції (резюме)

Виділимо найбільш типові випадки поведінки функції $f(x)$ в критичних точках.

- Якщо при переході через критичну точку x_0 неперервної функції $f(x)$:
 - похідна $f'(x)$ змінює знак, то x_0 є точкою екстремума функції $f(x)$;
 - $f'(x)$ не змінює знака, то x_0 не є точкою екстремума функції $f(x)$.
- Якщо ж похідна $f'(x)$ дорівнює нулю в деякому околі точки x_0 , то функція $f(x)$ приймає сталі значення в цьому околі, а точка x_0 (як і інші точки цього околу) є одночасно і точкою локального максимуму і точкою локального мінімуму функції $f(x)$.

Приклади

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Вкажемо область визначення функції:
 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Оскільки область визначення похідної $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$, то критичні точки цієї функції слід шукати серед коренів рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x = \pm 1.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Вкажемо область визначення функції:
 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Оскільки область визначення похідної $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$, то критичні точки цієї функції слід шукати серед коренів рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x = \pm 1.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Вкажемо область визначення функції:
 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Оскільки область визначення похідної $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$, то критичні точки цієї функції слід шукати серед коренів рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x = \pm 1.$$

Приклади

Приклад 1. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Розв'язання. Вкажемо область визначення функції:
 $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Знаходимо похідну: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

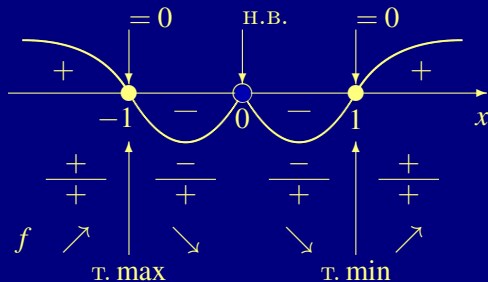
Оскільки область визначення похідної $D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$, то критичні точки цієї функції слід шукати серед коренів рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff x = \pm 1.$$

Приклади

Зображуючи криву знаків для похідної $f'(x)$, визначаємо знак похідної на різних проміжках числової прямої (див. мал.).

$$y = f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$



Визначаємо проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку максимуму $x_{\max} = -1$ і точку мінімуму $x_{\min} = 1$.

Нарешті, обчислюємо максимум

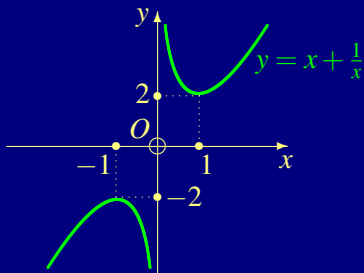
$$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$$

$$\text{і мінімум } y_{\min} = f(x_{\min}) = f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

Приклади

Відповідь: функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty, -1]$ і $[1, \infty)$ та спадає на проміжках $[-1, 0]$ і $(0, 1]$; $x_{\max} = -1$ — точка максимума та $x_{\min} = 1$ — точка мінімуму функції; $y_{\max} = -2$ — максимум та $y_{\min} = 2$ — мінімум функції.

Зазначимо, що в силу неперервності функції $f(x)$ в точках екстремумів ці точки приєднуються до проміжків зростання і спадання функції.



Зазначимо також, що локальний максимум розглянутої функції $y_{\max} = f(-1) = -2$ менший, ніж її локальний мінімум $y_{\min} = f(1) = 2$.

Приклади

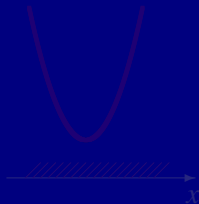
Приклад 2. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (перший – із застосуванням похідної за стандартною схемою і другий – без її застосування, який базується на специфічних властивостях функцій, що утворюють задану складену функцію).

1-й спосіб. Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 \geq 0$.

$y = 2x^2 - 8x + 9$ Парабола $y = 2x^2 - 8x + 9$ не перетинає вісь Ox , оскільки квадратне рівняння $2x^2 - 8x + 9 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -8 < 0$.



Оскільки парабола цілком лежить вище осі Ox , то $D(f) = \mathbf{R}$.

Приклади

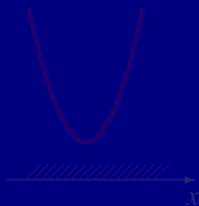
Приклад 2. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (перший – із застосуванням похідної за стандартною схемою і другий – без її застосування, який базується на специфічних властивостях функцій, що утворюють задану складену функцію).

1-й спосіб. Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 \geq 0$.

$y = 2x^2 - 8x + 9$ Парабола $y = 2x^2 - 8x + 9$ не перетинає вісь



Ox , оскільки квадратне рівняння

$2x^2 - 8x + 9 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -8 < 0$.

Оскільки парабола цілком лежить вище осі Ox , то $D(f) = \mathbf{R}$.

Приклади

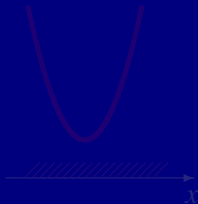
Приклад 2. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (перший – із застосуванням похідної за стандартною схемою і другий – без її застосування, який базується на специфічних властивостях функцій, що утворюють задану складену функцію).

1-й спосіб. Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 \geq 0$.

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$



Парабола $y = 2x^2 - 8x + 9$ не перетинає вісь Ox , оскільки квадратне рівняння $2x^2 - 8x + 9 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -8 < 0$.

Оскільки парабола цілком лежить вище осі Ox , то $D(f) = \mathbf{R}$.

Приклади

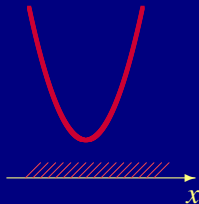
Приклад 2. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}.$$

Розв'язання. Розглянемо два способи розв'язання (перший – із застосуванням похідної за стандартною схемою і другий – без її застосування, який базується на специфічних властивостях функцій, що утворюють задану складену функцію).

1-й спосіб. Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 \geq 0$.

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$



Парабола $y = 2x^2 - 8x + 9$ не перетинає вісь Ox , оскільки квадратне рівняння $2x^2 - 8x + 9 = 0$ не має коренів в силу того, що його дискримінант $D = 64 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = -8 < 0$.

Оскільки парабола цілком лежить вище осі Ox , то $D(f) = \mathbf{R}$.

Приклади

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{2x^2 - 8x + 9})' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} (2x^2 - 8x + 9)' = \\ &= \frac{4x - 8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} = \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 9}}. \end{aligned}$$

Область визначення похідної знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 > 0 \iff x \in \mathbf{R}$ (див. попередній малюнок), тобто збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$.

Отже, всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} = 0 \iff x = 2.$$

Приклади

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{2x^2 - 8x + 9})' = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} (2x^2 - 8x + 9)' = \\ &= \frac{4x - 8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} = \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 9}}. \end{aligned}$$

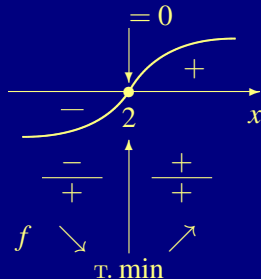
Область визначення похідної знаходиться шляхом розв'язання нерівності $2x^2 - 8x + 9 > 0 \iff x \in \mathbf{R}$ (див. попередній малюнок), тобто збігається з областю визначення $D(f)$ самої функції $f(x)$.

Отже, всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 9}} = 0 \iff x = 2.$$

Приклади

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+9}}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку мінімуму $x_{\min} = 2$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний мінімум

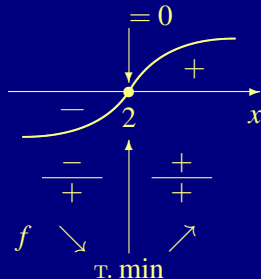
$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$,
а локальних максимумів функція не має.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Перш, ніж розглянути 2-й спосіб розв'язання, відзначимо, що при розв'язанні різноманітних завдань про знаходження екстремумів часто використовується існування єдиної точки екстремума у квадратичної функції.

Приклади

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+9}}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку мінімуму $x_{\min} = 2$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний мінімум

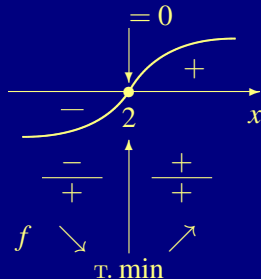
$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$,
а локальних максимумів функція не має.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Перш, ніж розглянути 2-й спосіб розв'язання, відзначимо, що при розв'язанні різноманітних завдань про знаходження екстремумів часто використовується існування єдиної точки екстремума у квадратичної функції.

Приклади

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+9}}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку мінімуму $x_{\min} = 2$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний мінімум

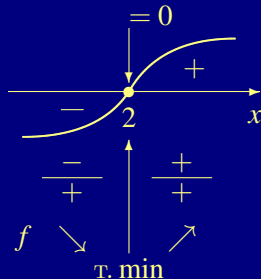
$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$,
а локальних максимумів функція не має.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Перш, ніж розглянути 2-й спосіб розв'язання, відзначимо, що при розв'язанні різноманітних завдань про знаходження екстремумів часто використовується існування єдиної точки екстремума у квадратичної функції.

Приклади

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+9}}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку мінімуму $x_{\min} = 2$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний мінімум

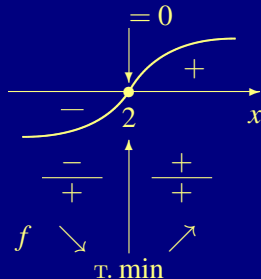
$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$,
а локальних максимумів функція не має.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Перш, ніж розглянути 2-й спосіб розв'язання, відзначимо, що при розв'язанні різноманітних завдань про знаходження екстремумів часто використовується існування єдиної точки екстремума у квадратичної функції.

Приклади

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+9}}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку мінімуму $x_{\min} = 2$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний мінімум

$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$,
а локальних максимумів функція не має.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

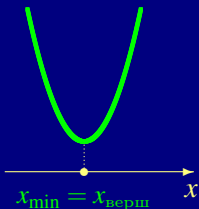
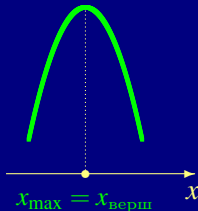
Перш, ніж розглянути 2-й спосіб розв'язання, відзначимо, що при розв'язанні різноманітних завдань про знаходження екстремумів часто використовується існування єдиної точки екстремума у квадратичної функції.

Точка екстремума квадратичної функції

Дійсно, квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, має єдину точку екстремума, яка є абсцисою вершини параболу і знаходиться за формулою

$$x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a}.$$

При цьому у випадку $a > 0$ ця точка є точкою мінімуму, а у випадку $a < 0$ – точкою максимуму.

 $a > 0$  $a < 0$ 

$$x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a}$$

Приклади

2-й спосіб розв'язання Прикладу 2.

Подано функцію $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}$ у вигляді $y = \sqrt{t(x)}$, де $t(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

Оскільки функція $y = \sqrt{t}$ є зростаючою при $t \geq 0$, то на області визначення $D(f)$ функція $f(x)$ приймає більші значення при більших значеннях функції $t(x)$. Тому на області $D(f) = \mathbf{R}$ точки екстремума функцій $f(x)$ і $t(x)$ співпадають.

Функція $t(x)$ має єдину точку мінімуму

$x_{\min} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ (абсциса вершини параболи $y = t(x)$).

Отже, функція $f(x)$ має єдиний екстремум – мінімум

$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Приклади

2-й спосіб розв'язання Прикладу 2.

Подамо функцію $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}$ у вигляді $y = \sqrt{t(x)}$, де $t(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

Оскільки функція $y = \sqrt{t}$ є зростаючою при $t \geq 0$, то на області визначення $D(f)$ функція $f(x)$ приймає більші значення при більших значеннях функції $t(x)$. Тому на області $D(f) = \mathbf{R}$ точки екстремума функцій $f(x)$ і $t(x)$ співпадають.

Функція $t(x)$ має єдину точку мінімуму

$x_{\min} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ (абсциса вершини параболи $y = t(x)$).

Отже, функція $f(x)$ має єдиний екстремум – мінімум

$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

Приклади

2-й спосіб розв'язання Прикладу 2.

Подано функцію $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8x + 9}$ у вигляді $y = \sqrt{t(x)}$, де $t(x) = 2x^2 - 8x + 9$.

Оскільки функція $y = \sqrt{t}$ є зростаючою при $t \geq 0$, то на області визначення $D(f)$ функція $f(x)$ приймає більші значення при більших значеннях функції $t(x)$. Тому на області $D(f) = \mathbf{R}$ точки екстремума функцій $f(x)$ і $t(x)$ співпадають.

Функція $t(x)$ має єдину точку мінімуму

$x_{\min} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ (абсциса вершини параболи $y = t(x)$).

Отже, функція $f(x)$ має єдиний екстремум – мінімум

$y_{\min} = f(2) = \sqrt{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 9} = \sqrt{1} = 1$.

Відповідь: функція має мінімум $y_{\min} = f(2) = 1$ і не має максимумів.

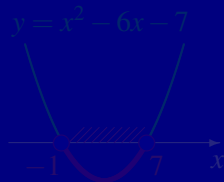
Приклади

Приклад 3. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7).$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб.



Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності

$$\begin{aligned} 6x - x^2 + 7 > 0 &\iff x^2 - 6x - 7 < 0 \iff \\ &\iff x \in (-1; 7). \end{aligned}$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log_2(6x - x^2 + 7) \right)' = \frac{1}{(6x - x^2 + 7) \ln 2} (6x - x^2 + 7)' = \\ &= \frac{6 - 2x}{(6x - x^2 + 7) \ln 2}. \end{aligned}$$

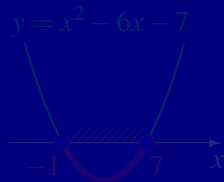
Приклади

Приклад 3. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7).$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб.



Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності

$$\begin{aligned} 6x - x^2 + 7 > 0 &\iff x^2 - 6x - 7 < 0 \iff \\ &\iff x \in (-1; 7). \end{aligned}$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log_2(6x - x^2 + 7) \right)' = \frac{1}{(6x - x^2 + 7) \ln 2} (6x - x^2 + 7)' = \\ &= \frac{6 - 2x}{(6x - x^2 + 7) \ln 2}. \end{aligned}$$

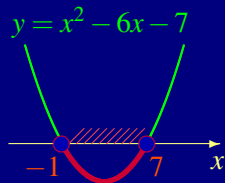
Приклади

Приклад 3. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7).$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб.



Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності

$$\begin{aligned} 6x - x^2 + 7 > 0 &\iff x^2 - 6x - 7 < 0 \iff \\ &\iff x \in (-1; 7). \end{aligned}$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log_2(6x - x^2 + 7) \right)' = \frac{1}{(6x - x^2 + 7) \ln 2} (6x - x^2 + 7)' = \\ &= \frac{6 - 2x}{(6x - x^2 + 7) \ln 2}. \end{aligned}$$

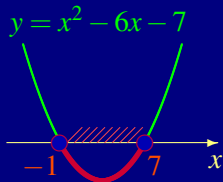
Приклади

Приклад 3. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7).$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, розглянемо два способи розв'язання.

1-й спосіб.



Область визначення функції знаходиться шляхом розв'язання нерівності

$$\begin{aligned} 6x - x^2 + 7 > 0 &\iff x^2 - 6x - 7 < 0 \iff \\ &\iff x \in (-1; 7). \end{aligned}$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log_2(6x - x^2 + 7) \right)' = \frac{1}{(6x - x^2 + 7) \ln 2} (6x - x^2 + 7)' = \\ &= \frac{6 - 2x}{(6x - x^2 + 7) \ln 2}. \end{aligned}$$

Приклади

Оскільки похідна визначена всюди на $D(f) = (-1; 7)$, то всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2} = 0 \iff x = 3.$$

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку максимуму

$$x_{\max} = 3.$$

Отже, функція $f(x)$ має один локальний максимум

$$y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = \log_2 16 = 4,$$

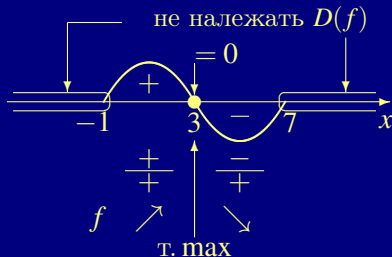
а локальних мінімумів функція не має.

Приклади

Оскільки похідна визначена всюди на $D(f) = (-1; 7)$, то всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2} = 0 \iff x = 3.$$

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку максимуму

$$x_{\max} = 3.$$

Отже, функція $f(x)$ має один локальний максимум

$$y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = \log_2 16 = 4,$$

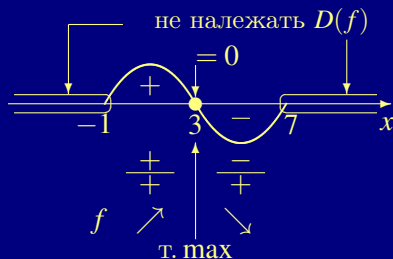
а локальних мінімумів функція не має.

Приклади

Оскільки похідна визначена всюди на $D(f) = (-1; 7)$, то всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2} = 0 \iff x = 3.$$

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку максимуму $x_{\max} = 3$.

Отже, функція $f(x)$ має один локальний максимум

$$y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = \log_2 16 = 4,$$

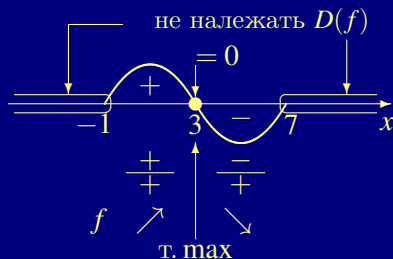
а локальних мінімумів функція не має.

Приклади

Оскільки похідна визначена всюди на $D(f) = (-1; 7)$, то всі критичні точки цієї функції – це корені рівняння

$$f'(x) = 0 \iff \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2} = 0 \iff x = 3.$$

Криву знаків для похідної $y = f'(x) = \frac{6-2x}{(6x-x^2+7)\ln 2}$ зображено на мал.



Визначаючи проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точку максимуму $x_{\max} = 3$.

Отже, **функція $f(x)$ має один локальний максимум**

$$y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = \log_2 16 = 4,$$

а локальних мінімумів функція не має.

Приклади

2-й спосіб розв'язання. Подамо функцію $f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7)$ у вигляді $y = \log_2 t(x)$, де $t(x) = 6x - x^2 + 7$.

Оскільки функція $y = \log_2 t$ є зростаючою при $t > 0$, то на області визначення $D(f)$ функція $f(x)$ приймає більші значення при більших значеннях функції $t(x)$. Тому на області $D(f)$ точки екстремума функцій $f(x)$ і $t(x)$ співпадають.

Функція $t(x)$ має єдину точку максимуму $x_{\max} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$ (абсциса вершини параболи $y = t(x)$).

Отже, функція $f(x)$ має єдиний екстремум – максимум $y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = 4$.

Відповідь: функція має максимум $y_{\max} = f(3) = 4$ і не має мінімумів.

Приклади

2-й спосіб розв'язання. Подамо функцію $f(x) = \log_2(6x - x^2 + 7)$ у вигляді $y = \log_2 t(x)$, де $t(x) = 6x - x^2 + 7$.

Оскільки функція $y = \log_2 t$ є зростаючою при $t > 0$, то на області визначення $D(f)$ функція $f(x)$ приймає більші значення при більших значеннях функції $t(x)$. Тому на області $D(f)$ точки екстремума функцій $f(x)$ і $t(x)$ співпадають.

Функція $t(x)$ має єдину точку максимуму $x_{\max} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$ (абсциса вершини параболи $y = t(x)$).

Отже, функція $f(x)$ має єдиний екстремум – максимум $y_{\max} = f(3) = \log_2(6 \cdot 3 - 3^2 + 7) = 4$.

Відповідь: функція має максимум $y_{\max} = f(3) = 4$ і не має мінімумів.

Приклади

Приклад 4. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = 2x + \cos 2x$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ визначена всюди на $\mathbf{R}$. При цьому похідна $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$ також визначена всюди на $\mathbf{R}$.

Помічаємо, що $f'(x) \geq 0$ всюди на $\mathbf{R}$, оскільки $2 \geq 2\sin 2x$ при всіх $x \in \mathbf{R}$. Критичні точки функції – це корені рівняння

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2 - 2\sin 2x = 0 \iff \sin 2x = 1 \iff \\ &\iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

І хоча функція $f(x)$ має нескінченну множину критичних точок, ці точки не заповнюють цілий проміжок.

Приклади

Приклад 4. Знайти проміжки зростання і спадання, точки максимуму і мінімуму, а також максимуми і мінімуми функції $f(x) = 2x + \cos 2x$.

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ визначена всюди на $\mathbf{R}$. При цьому похідна $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$ також визначена всюди на $\mathbf{R}$.

Помічаємо, що $f'(x) \geq 0$ всюди на $\mathbf{R}$, оскільки $2 \geq 2\sin 2x$ при всіх $x \in \mathbf{R}$. Критичні точки функції – це корені рівняння

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 2 - 2\sin 2x = 0 \iff \sin 2x = 1 \iff \\ &\iff 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

І хоча функція $f(x)$ має нескінченну множину критичних точок, ці точки не заповнюють цілий проміжок.

Приклади

Отже, функція $f(x)$ зростає всюди на $\mathbf{R}$ і при цьому не має екстремумів (тобто жодна з критичних точок цієї функції не є точкою екстремума).

Відповідь: функція не має екстремумів, оскільки зростає на всій числової прямій.

Приклади

Отже, функція $f(x)$ зростає всюди на $\mathbf{R}$ і при цьому не має екстремумів (тобто жодна з критичних точок цієї функції не є точкою екстремума).

Відповідь: функція не має екстремумів, оскільки зростає на всій числової прямій.

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції: $f'(x) = 0 \iff$

$$\iff 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \iff 12x(x^2 - x - 2) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції: $f'(x) = 0 \iff$

$$\iff 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \iff 12x(x^2 - x - 2) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції: $f'(x) = 0 \iff$

$$\iff 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \iff 12x(x^2 - x - 2) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

Знаходимо критичні точки цієї функції: $f'(x) = 0 \iff$

$$\iff 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \iff 12x(x^2 - x - 2) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Приклад із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Задано функцію $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$.

1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
2. Побудуйте ескіз графіка функції $f(x)$.
3. Знайдіть кількість коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, залежно від значення параметра a .

Розв'язання. Очевидно, що функція $f(x)$ та її похідна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ визначені всюди на $\mathbf{R}$.

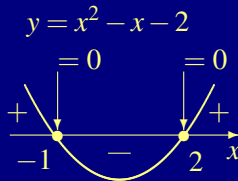
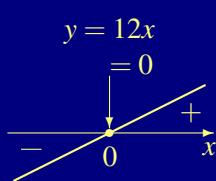
Знаходимо критичні точки цієї функції: $f'(x) = 0 \iff$

$$\iff 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \iff 12x(x^2 - x - 2) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

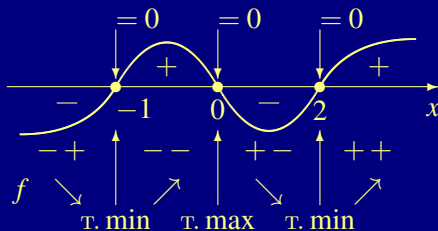
Приклад із ЗНО

Використаємо допоміжні малюнки



для визначення знаків похідної

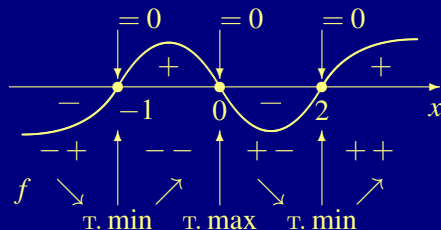
$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$ між критичними точками:



Визначаємо проміжки зростання і спадання функції, знаходимо точки екстремумів.

Приклад із ЗНО

$$y = f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$$



Отже, функція $f(x)$

зростає на проміжках $[-1; 0]$ і $[2; \infty)$;

спадає на $(-\infty, -1]$ і $[0; 2]$.

Вона має два локальних мінімуми в точках $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 12(-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5;$$

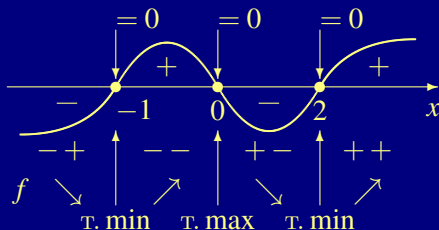
$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 = \\ = 48 - 32 - 48 = -32$$

та один локальний максимум в точці $x = 0$:

$$f(0) = 0.$$

Приклад із ЗНО

$$y = f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$$



Отже, функція $f(x)$

зростає на проміжках $[-1; 0]$ і $[2; \infty)$;

спадає на $(-\infty, -1]$ і $[0; 2]$.

Вона має два локальних мінімумів в точках $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 12(-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5;$$

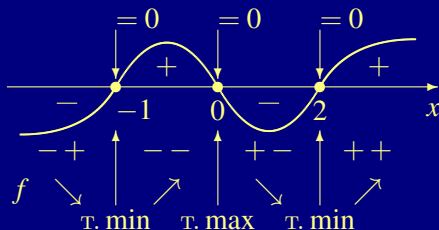
$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 = \\ &= 48 - 32 - 48 = -32 \end{aligned}$$

та один локальний максимум в точці $x = 0$:

$$f(0) = 0.$$

Приклад із ЗНО

$$y = f'(x) = 12x(x^2 - x - 2)$$



Отже, функція $f(x)$

зростає на проміжках $[-1; 0]$ і $[2; \infty)$;

спадає на $(-\infty, -1]$ і $[0; 2]$.

Вона має два локальних мінімумів в точках $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(-1) = 3(-1)^4 - 4(-1)^3 - 12(-1)^2 = 3 + 4 - 12 = -5;$$

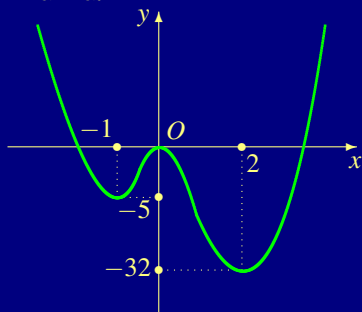
$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 = 3 \cdot 16 - 4 \cdot 8 - 12 \cdot 4 = \\ &= 48 - 32 - 48 = -32 \end{aligned}$$

та один локальний максимум в точці $x = 0$:

$$f(0) = 0.$$

Приклад із ЗНО

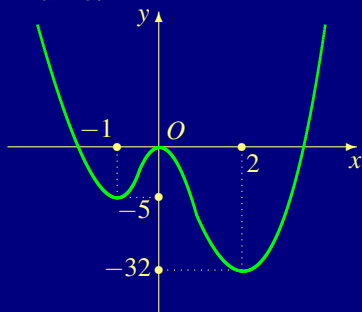
Ескіз графіка функції $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ зображено на мал.



Скористаємося побудованим ескізом графіка функції $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ для визначення кількості коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, в залежності від значень параметра a .

Приклад із ЗНО

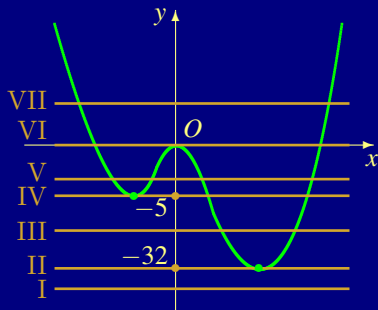
Ескіз графіка функції $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ зображено на мал.



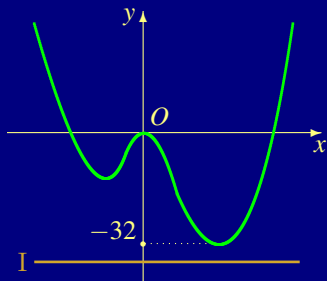
Скористаємося побудованим ескізом графіка функції $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ для визначення кількості коренів рівняння $f(x) = a$, де $a \in \mathbb{R}$, в залежності від значень параметра a .

Приклад із ЗНО

Графіком функції $y = a$ є пряма, яка паралельна осі Ox при $a \neq 0$ і збігається з Ox при $a = 0$. Можливі 7 різних випадків розміщення цієї прямої відносно графіка $y = f(x)$ (див. мал., де ці випадки пронумеровано римськими цифрами):

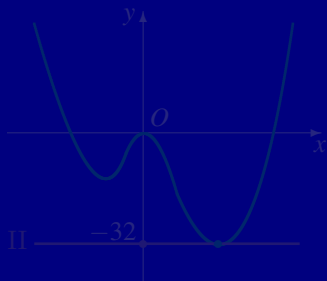


Приклад із ЗНО



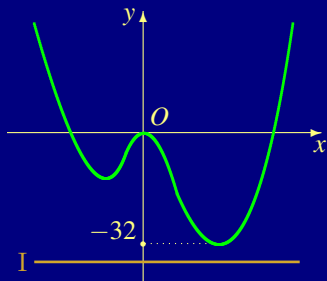
Тепер очевидно, що
рівняння $f(x) = a$:

у випадку **I** при $a < -32$
коренів не має;



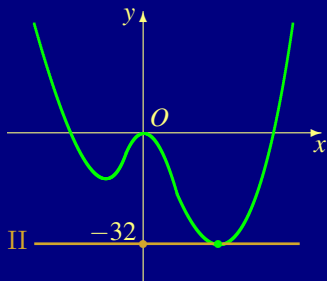
у випадку **II** при $a = -32$
має 1 корінь;

Приклад із ЗНО



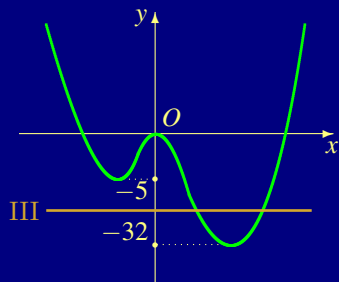
Тепер очевидно, що
рівняння $f(x) = a$:

у випадку I при $a < -32$
коренів не має;

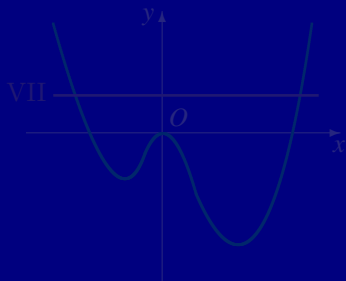


у випадку II при $a = -32$
має 1 корінь;

Приклад із ЗНО

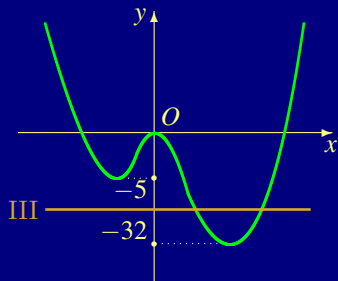


у випадку III при
 $a \in (-32; -5)$

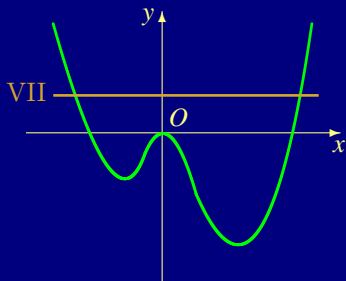


і у випадку VII при $a > 0$
 має 2 корені;

Приклад із ЗНО

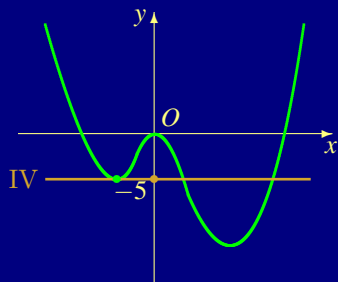


у випадку III при
 $a \in (-32; -5)$

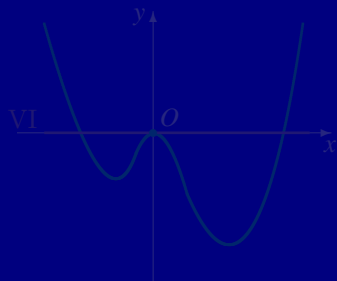


і у випадку VII при $a > 0$
 має 2 корені;

Приклад із ЗНО

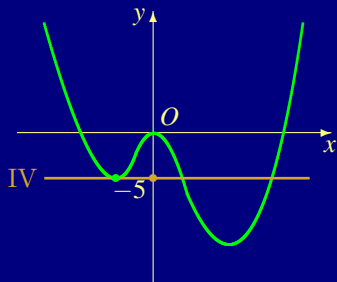


у випадку IV при $a = -5$

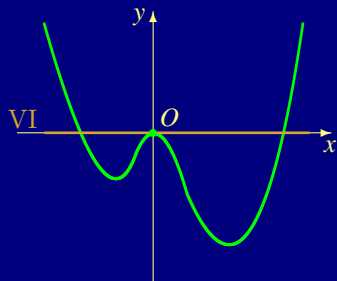


і у випадку VI при $a = 0$
має 3 корені;

Приклад із ЗНО

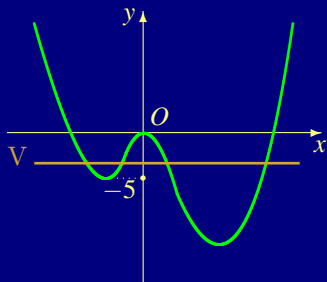


у випадку IV при $a = -5$



і у випадку VI при $a = 0$
має 3 корені;

Приклад із ЗНО



у випадку V при
 $a \in (-5; 0)$ має 4 корені.

Відповідь: проміжки зростання: $[-1; 0]$ і $[2, \infty)$;

проміжки спадання: $(-\infty, -1]$ і $[0; 2]$;

максимум: $f(0) = 0$;

мінімуми: $f(-1) = -5$ і $f(2) = -32$.

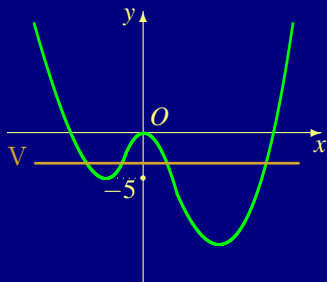
При $a < -32$ рівняння коренів не має; при $a = -32$

рівняння має 1 корінь; при $a \in (-32; -5) \cup (0, \infty)$

рівняння має 2 корені; при $a = -5$ і при $a = 0$ рівняння

має 3 корені; при $a \in (-5; 0)$ рівняння має 4 корені.

Приклад із ЗНО



у випадку V при
 $a \in (-5; 0)$ має 4 корені.

Відповідь: проміжки зростання: $[-1; 0]$ і $[2, \infty)$;

проміжки спадання: $(-\infty, -1]$ і $[0; 2]$;

максимум: $f(0) = 0$;

мінімуми: $f(-1) = -5$ і $f(2) = -32$.

При $a < -32$ рівняння коренів не має; при $a = -32$

рівняння має 1 корінь; при $a \in (-32; -5) \cup (0, \infty)$

рівняння має 2 корені; при $a = -5$ і при $a = 0$ рівняння

має 3 корені; при $a \in (-5; 0)$ рівняння має 4 корені.