

Прогресії

Заочна фізико-математична школа
НТУУ "КПІ", Київ

Урок 36



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Арифметична прогресія

- Послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (скінченна або нескінченна), члени якої зв'язані співвідношеннями $a_n = a_{n-1} + d$, $n \geq 2$, називається **арифметичною прогресією**, а число d – **різницею** прогресії.

Наприклад, послідовність чисел $8; 3; -2; -7$ є арифметичною прогресією з різницею $d = -5$, а різницею арифметичної прогресії $0; 0; 0; 0; 0$ є число $d = 0$.

Відзначимо, що арифметична прогресія повністю визначена, якщо задані її перший член a_1 і різниця прогресії d .

Арифметична прогресія

- Послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (скінченна або нескінченна), члени якої зв'язані співвідношеннями $a_n = a_{n-1} + d$, $n \geq 2$, називається **арифметичною прогресією**, а число d – **різницею** прогресії.

Наприклад, послідовність чисел $8; 3; -2; -7$ є арифметичною прогресією з різницею $d = -5$, а різницею арифметичної прогресії $0; 0; 0; 0; 0$ є число $d = 0$.

Відзначимо, що арифметична прогресія **повністю визначена**, якщо задані її перший член a_1 і різниця прогресії d .

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Приклад 1. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Розв'язання. Для розв'язання задачі необхідно знайти перший член прогресії a_1 і її різницю d .

Зазначимо, що $S_1 = a_1$. Оскільки відома формула суми S_n при будь-якому n , то, зокрема, при $n = 1$ маємо $a_1 = S_1 = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 4$.

Аналогічно при $n = 2$ маємо $S_2 = 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 20$.

Оскільки $S_2 = a_1 + a_2$ і, крім того, $a_1 = 4$, то $a_2 = S_2 - a_1 = 20 - 4 = 16$.

За означенням різниці прогресії $d = a_n - a_{n-1}$ при будь-якому $n \geq 2$, зокрема, при $n = 2$ маємо $d = a_2 - a_1 = 16 - 4 = 12$, і розв'язання закінчено.

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

Арифметична прогресія

Для арифметичної прогресії справедливі співвідношення:

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ — формула n -ного члена прогресії;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$ — формула суми S_n перших n членів прогресії;

$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ (при $n \geq 2$) — характеристична властивість арифметичної прогресії.

Характеристична властивість рівносильна означенню арифметичної прогресії у тому сенсі, що послідовність чисел, яка володіє цією властивістю, обов'язково є арифметичною прогресією.

Арифметична прогресія

Для арифметичної прогресії справедливі співвідношення:

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ — формула n -ного члена прогресії;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n$ — формула суми S_n перших n членів прогресії;

$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$ (при $n \geq 2$) — характеристична властивість арифметичної прогресії.

Характеристична властивість рівносильна означенню арифметичної прогресії у тому сенсі, що послідовність чисел, яка володіє цією властивістю, обов'язково є арифметичною прогресією.

Арифметична прогресія

Приклад 2. При яких значеннях x послідовність $a_1 = 2x - 6$, $a_2 = \sqrt{x+3}$, $a_3 = 2x + 6$ є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію за умови, що

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \iff 4x = 2\sqrt{x+3} \iff \sqrt{x+3} = 2x.$$

Тепер, розв'язуючи отримане рівняння за теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{x+3} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x - 3 = 0$ має два корені: $x_1 = -3/4$ і $x_2 = 1$, при цьому розв'язком системи є тільки додатній корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Арифметична прогресія

Приклад 2. При яких значеннях x послідовність $a_1 = 2x - 6$, $a_2 = \sqrt{x+3}$, $a_3 = 2x + 6$ є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію за умови, що

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \iff 4x = 2\sqrt{x+3} \iff \sqrt{x+3} = 2x.$$

Тепер, розв'язуючи отримане рівняння за теоремою

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{x+3} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x - 3 = 0$ має два корені: $x_1 = -3/4$ і $x_2 = 1$, при цьому розв'язком системи є тільки додатній корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Арифметична прогресія

Приклад 2. При яких значеннях x послідовність $a_1 = 2x - 6$, $a_2 = \sqrt{x+3}$, $a_3 = 2x + 6$ є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію за умови, що

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \iff 4x = 2\sqrt{x+3} \iff \sqrt{x+3} = 2x.$$

Тепер, розв'язуючи отримане рівняння за **теоремою**

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{x+3} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x - 3 = 0$ має два корені: $x_1 = -3/4$ і $x_2 = 1$, при цьому розв'язком системи є тільки додатній корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Арифметична прогресія

Приклад 2. При яких значеннях x послідовність $a_1 = 2x - 6$, $a_2 = \sqrt{x+3}$, $a_3 = 2x + 6$ є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію за умови, що

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \iff 4x = 2\sqrt{x+3} \iff \sqrt{x+3} = 2x.$$

Тепер, розв'язуючи отримане рівняння за **теоремою**

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{x+3} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x - 3 = 0$ має два корені: $x_1 = -3/4$ і $x_2 = 1$, при цьому розв'язком системи є тільки додатній корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Арифметична прогресія

Приклад 2. При яких значеннях x послідовність $a_1 = 2x - 6$, $a_2 = \sqrt{x+3}$, $a_3 = 2x + 6$ є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію за умови, що

$$a_1 + a_3 = 2a_2 \iff 4x = 2\sqrt{x+3} \iff \sqrt{x+3} = 2x.$$

Тепер, розв'язуючи отримане рівняння за **теоремою**

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2, \end{cases}$$

отримуємо

$$\sqrt{x+3} = 2x \iff \begin{cases} 2x \geq 0, \\ x+3 = 4x^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 - x - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x - 3 = 0$ має два корені: $x_1 = -3/4$ і $x_2 = 1$, при цьому розв'язком системи є тільки додатній корінь $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -20 .

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $-20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = (-20 - 2) : 6 = -22 : 6 = -11/3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot (-11/3)) \cdot 10 = 610.$$

Відповідь: 610 .

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -20 .

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $-20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = (-20 - 2) : 6 = -22 : 6 = -11/3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot (-11/3)) \cdot 10 = -610/3.$$

Відповідь: $-610/3$.

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -20 .

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $-20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = (-20 - 2) : 6 = -22 : 6 = -11/3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot (-11/3)) \cdot 10 = 610.$$

Відповідь: 610 .

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -20 .

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = 18 : 6 = 3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot 3) \cdot 10 = 610.$$

Відповідь: 610 .

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий – 20.

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = 18 : 6 = 3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot 3) \cdot 10 = 610.$$

Відповідь: 610.

Приклади із ЗНО

Приклад 3 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2014 р.).
Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n -го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайдіть різницю цієї прогресії.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $a_1 = 4 - 8 = -4$,
 $a_2 = 4 - 8 \cdot 2 = 4 - 16 = -12$ і різницю прогресії
 $d = a_2 - a_1 = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8$.

Відповідь: -8 .

Приклад 4 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2006 р.).
Обчисліть суму перших 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий -20 .

Розв'язання. Оскільки $a_7 = a_1 + 6d$, то $20 = 2 + 6d$,
звідки знаходимо різницю прогресії $d = 18 : 6 = 3$. Тоді

$$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = (2 \cdot 2 + 19 \cdot 3) \cdot 10 = 610.$$

Відповідь: 610 .

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

Розв'язання. За 10 тижнів плавець провів $10 \cdot 3 = 30$ тренувань.

Визначимо кількість тренувань n , під час яких він збільшував дистанцію в арифметичній прогресії з першим членом $a_1 = 450$ і різницею $d = 50$, поки не досягнув значення $a_n = 1000$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

Розв'язання. За 10 тижнів плавець провів $10 \cdot 3 = 30$ тренувань.

Визначимо кількість тренувань n , під час яких він збільшував дистанцію в арифметичній прогресії з першим членом $a_1 = 450$ і різницею $d = 50$, поки не досягнув значення $a_n = 1000$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.). Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

Розв'язання. За 10 тижнів плавець провів $10 \cdot 3 = 30$ тренувань.

Визначимо кількість тренувань n , під час яких він збільшував дистанцію в арифметичній прогресії з першим членом $a_1 = 450$ і різницею $d = 50$, поки не досягнув значення $a_n = 1000$.

Приклади із ЗНО

Оскільки $a_n = a_1 + d(n - 1)$, при цьому $a_1 = 450$, $d = 50$ і $a_n = 1000$, то

$$\begin{aligned} 1000 &= 450 + 50(n - 1) \iff 1000 = 400 + 50n \iff \\ &\iff 50n = 600 \iff n = 12. \end{aligned}$$

Отже, під час 12 тренувань плавець збільшував дистанцію в арифметичній прогресії, пропливши за цей час відстань (сума перших дванадцяти членів арифметичної прогресії)

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = (450 + 1000) \cdot 6 = 8700 \text{ (м)}, \text{ тобто } 8,7 \text{ км.}$$

Решту 18 тренувань він пропливав по 1000 м = 1 км за тренування, пропливши за цей час відстань 18 км.

Отже, разом за 30 тренувань він проплив $8,7 + 18 = 26,7$ (км).

Відповідь: 26,7.

Приклади із ЗНО

Оскільки $a_n = a_1 + d(n - 1)$, при цьому $a_1 = 450$, $d = 50$ і $a_n = 1000$, то

$$\begin{aligned} 1000 &= 450 + 50(n - 1) \iff 1000 = 400 + 50n \iff \\ &\iff 50n = 600 \iff n = 12. \end{aligned}$$

Отже, під час 12 тренувань плавець збільшував дистанцію в арифметичній прогресії, пропливши за цей час відстань (сума перших дванадцяти членів арифметичної прогресії)

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = (450 + 1000) \cdot 6 = 8700 \text{ (м)}, \text{ тобто } 8,7 \text{ км.}$$

Решту 18 тренувань він пропливав по 1000 м = 1 км за тренування, пропливши за цей час відстань 18 км.

Отже, разом за 30 тренувань він проплив

$$8,7 + 18 = 26,7 \text{ (км)}.$$

Відповідь: 26,7.

Приклади із ЗНО

Оскільки $a_n = a_1 + d(n - 1)$, при цьому $a_1 = 450$, $d = 50$ і $a_n = 1000$, то

$$\begin{aligned} 1000 &= 450 + 50(n - 1) \iff 1000 = 400 + 50n \iff \\ &\iff 50n = 600 \iff n = 12. \end{aligned}$$

Отже, під час 12 тренувань плавець збільшував дистанцію в арифметичній прогресії, пропливши за цей час відстань (сума перших дванадцяти членів арифметичної прогресії)

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = (450 + 1000) \cdot 6 = 8700 \text{ (м)}, \text{ тобто } 8,7 \text{ км.}$$

Решту 18 тренувань він пропливав по 1000 м = 1 км за тренування, пропливши за цей час відстань 18 км.

Отже, разом за 30 тренувань він проплив $8,7 + 18 = 26,7$ (км).

Відповідь: 26,7.

Геометрична прогресія

- Послідовність не рівних нулю чисел $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ (скінченна або нескінченна), члени якої зв'язані співвідношеннями $b_n = b_{n-1}q$, $n \geq 2$, називається **геометричною прогресією**, а число q – **знаменником** прогресії.

З означення геометричної прогресії зокрема впливає, що її знаменник $q = b_n/b_{n-1}$ (тут $n \geq 2$) не дорівнює нулю.

Наприклад, послідовність чисел $3; -6; 12; -24; 48$ є геометричною прогресією зі знаменником $q = -2$.

Послідовність чисел $2; 2; 2; 2; 2$ є арифметичною прогресією з різницею $d = 0$ і в той же час є геометричною прогресією зі знаменником $q = 1$.

А ось арифметична прогресія $0; 0; 0; 0; 0$ (з різницею $d = 0$) не є геометричною прогресією, оскільки містить числа, рівні нулю.

Геометрична прогресія

- Послідовність не рівних нулю чисел $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ (скінченна або нескінченна), члени якої зв'язані співвідношеннями $b_n = b_{n-1}q$, $n \geq 2$, називається **геометричною прогресією**, а число q – **знаменником** прогресії.

З означення геометричної прогресії зокрема випливає, що її знаменник $q = b_n/b_{n-1}$ (тут $n \geq 2$) не дорівнює нулю.

Наприклад, послідовність чисел $3; -6; 12; -24; 48$ є геометричною прогресією зі знаменником $q = -2$.

Послідовність чисел $2; 2; 2; 2; 2$ є арифметичною прогресією з різницею $d = 0$ і в той же час є геометричною прогресією зі знаменником $q = 1$.

А ось арифметична прогресія $0; 0; 0; 0; 0$ (з різницею $d = 0$) не є геометричною прогресією, оскільки містить числа, рівні нулю.

Геометрична прогресія

Відзначимо, що геометрична прогресія **повністю визначена**, якщо задані її перший член b_1 і знаменник прогресії q .

Для геометричної прогресії справедливі співвідношення:

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n -ного члена прогресії;

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ (якщо $q \neq 1$) — формула суми S_n перших n членів прогресії;

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ (при $n \geq 2$) — характеристична властивість геометричної прогресії.

Характеристична властивість рівносильна означенню геометричної прогресії у тому сенсі, що послідовність не рівних нулю чисел, яка володіє цією властивістю, обов'язково є геометричною прогресією.

Геометрична прогресія

Відзначимо, що геометрична прогресія **повністю визначена**, якщо задані її перший член b_1 і знаменник прогресії q .

Для геометричної прогресії справедливі співвідношення:

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n -ного члена прогресії;

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ (якщо $q \neq 1$) — формула суми S_n перших n членів прогресії;

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ (при $n \geq 2$) — характеристична властивість геометричної прогресії.

Характеристична властивість рівносильна означенню геометричної прогресії у тому сенсі, що послідовність не рівних нулю чисел, яка володіє цією властивістю, обов'язково є геометричною прогресією.

Геометрична прогресія

Відзначимо, що геометрична прогресія **повністю визначена**, якщо задані її перший член b_1 і знаменник прогресії q .

Для геометричної прогресії справедливі співвідношення:

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — формула n -ного члена прогресії;

$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ (якщо $q \neq 1$) — формула суми S_n перших n членів прогресії;

$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ (при $n \geq 2$) — характеристична властивість геометричної прогресії.

Характеристична властивість рівносильна означенню геометричної прогресії у тому сенсі, що послідовність не рівних нулю чисел, яка володіє цією властивістю, обов'язково є геометричною прогресією.

Геометрична прогресія

Приклад 6. При яких значеннях x послідовність $b_1 = 2x - 6$, $b_2 = \sqrt{x+3}$, $b_3 = 2x + 6$, є геометричною прогресією?

Розв'язання. Числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію, якщо вони не рівні нулю і виконується умова

$$b_1 b_3 = b_2^2 \iff (2x - 6)(2x + 6) = (\sqrt{x + 3})^2 \iff \\ \iff \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 4x^2 - 36 = x + 3, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3, \\ 4x^2 - x - 39 = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $4x^2 - x - 39 = 0$.

Його дискримінант $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-39) = 625$.

Отже, рівняння має два корені: $x = \frac{1 \pm 25}{8}$, тобто

$x_1 = -3$ і $x_2 = 13/4$, при цьому обидва корені задовольняють нерівність системи.

Геометрична прогресія

Приклад 6. При яких значеннях x послідовність $b_1 = 2x - 6$, $b_2 = \sqrt{x+3}$, $b_3 = 2x + 6$, є геометричною прогресією?

Розв'язання. Числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію, якщо вони **не рівні нулю** і виконується умова

$$b_1 b_3 = b_2^2 \iff (2x - 6)(2x + 6) = (\sqrt{x + 3})^2 \iff \\ \iff \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 4x^2 - 36 = x + 3, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3, \\ 4x^2 - x - 39 = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $4x^2 - x - 39 = 0$. Його дискримінант $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-39) = 625$.

Отже, рівняння має два корені: $x = \frac{1 \pm 25}{8}$, тобто $x_1 = -3$ і $x_2 = 13/4$, при цьому обидва корені задовольняють нерівність системи.

Геометрична прогресія

Приклад 6. При яких значеннях x послідовність $b_1 = 2x - 6$, $b_2 = \sqrt{x+3}$, $b_3 = 2x + 6$, є геометричною прогресією?

Розв'язання. Числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію, якщо вони **не рівні нулю** і виконується умова

$$b_1 b_3 = b_2^2 \iff (2x - 6)(2x + 6) = (\sqrt{x + 3})^2 \iff \\ \iff \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 4x^2 - 36 = x + 3, \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3, \\ 4x^2 - x - 39 = 0, \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння $4x^2 - x - 39 = 0$.

Його дискримінант $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot (-39) = 625$.

Отже, рівняння має два корені: $x = \frac{1 \pm 25}{8}$, тобто

$x_1 = -3$ і $x_2 = 13/4$, при цьому обидва корені задовольняють нерівність системи.

Геометрична прогресія

Проте, помічаємо, що при $x = -3$ числа $b_2 = \sqrt{x+3}$ і $b_3 = 2x+6$ дорівнюють нулю, і тому послідовність b_1, b_2, b_3 не є геометричною прогресією !

При $x = 13/4 = 3,25$ маємо

$$b_1 = 2x - 6 = 2 \cdot 3,25 - 6 = 0,5,$$

$$b_2 = \sqrt{x+3} = \sqrt{3,25+3} = 2,5,$$

$$b_3 = 2x + 6 = 2 \cdot 3,25 + 6 = 12,5.$$

Отже, числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q = 5$.

Відповідь: 3,25.

Геометрична прогресія

Проте, помічаємо, що при $x = -3$ числа $b_2 = \sqrt{x+3}$ і $b_3 = 2x+6$ дорівнюють нулю, і тому послідовність b_1, b_2, b_3 не є геометричною прогресією !

При $x = 13/4 = 3,25$ маємо

$$b_1 = 2x - 6 = 2 \cdot 3,25 - 6 = 0,5,$$

$$b_2 = \sqrt{x+3} = \sqrt{3,25+3} = 2,5,$$

$$b_3 = 2x + 6 = 2 \cdot 3,25 + 6 = 12,5.$$

Отже, числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q = 5$.

Відповідь: 3,25.

Геометрична прогресія

Проте, помічаємо, що при $x = -3$ числа $b_2 = \sqrt{x+3}$ і $b_3 = 2x+6$ дорівнюють нулю, і тому послідовність b_1, b_2, b_3 не є геометричною прогресією !

При $x = 13/4 = 3,25$ маємо

$$b_1 = 2x - 6 = 2 \cdot 3,25 - 6 = 0,5,$$

$$b_2 = \sqrt{x+3} = \sqrt{3,25+3} = 2,5,$$

$$b_3 = 2x + 6 = 2 \cdot 3,25 + 6 = 12,5.$$

Отже, числа b_1, b_2, b_3 утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q = 5$.

Відповідь: 3,25.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- Геометрична прогресія з нескінченною кількістю членів, знаменник якої q задовольняє нерівність $|q| < 1$, називається **нескінченно спадною геометричною прогресією**.

Наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; 9; 3; 1; \dots$ має знаменник $q = 1/3$.

Відзначимо, що

- члени нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються лише у випадку, коли $b_1 > 0$ і $q > 0$.
- При $q < 0$ у прогресії чергуються додатні і від'ємні члени. Такою є, наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; -9; 3; -1; \dots$ зі знаменником $q = -1/3$.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- Геометрична прогресія з нескінченною кількістю членів, знаменник якої q задовольняє нерівність $|q| < 1$, називається **нескінченно спадною геометричною прогресією**.

Наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; 9; 3; 1; \dots$ має знаменник $q = 1/3$.

Відзначимо, що

- члени нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються лише у випадку, коли $b_1 > 0$ і $q > 0$.
- При $q < 0$ у прогресії чергуються додатні і від'ємні члени. Такою є, наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; -9; 3; -1; \dots$ зі знаменником $q = -1/3$.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- Геометрична прогресія з нескінченною кількістю членів, знаменник якої q задовольняє нерівність $|q| < 1$, називається **нескінченно спадною геометричною прогресією**.

Наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; 9; 3; 1; \dots$ має знаменник $q = 1/3$.

Відзначимо, що

- члени нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються лише у випадку, коли $b_1 > 0$ і $q > 0$.
- При $q < 0$ у прогресії чергуються додатні і від'ємні члени. Такою є, наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; -9; 3; -1; \dots$ зі знаменником $q = -1/3$.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- Геометрична прогресія з нескінченною кількістю членів, знаменник якої q задовольняє нерівність $|q| < 1$, називається **нескінченно спадною геометричною прогресією**.

Наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; 9; 3; 1; \dots$ має знаменник $q = 1/3$.

Відзначимо, що

- члени нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються лише у випадку, коли $b_1 > 0$ і $q > 0$.
- При $q < 0$ у прогресії чергуються додатні і від'ємні члени. Такою є, наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $27; -9; 3; -1; \dots$ зі знаменником $q = -1/3$.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- А у випадку, коли $b_1 < 0$ і $q > 0$, члени нескінченно спадної геометричної прогресії навіть збільшуються. Наприклад, такою властивістю володіють члени нескінченно спадної геометричної прогресії $-27; -9; -3; -1; \dots$ зі знаменником $q = 1/3$.

Проте, в усіх випадках модулі членів нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються, наближаючись все ближче і ближче до числа 0. При цьому сума S_n перших n членів прогресії при зростанні числа доданків n як завгодно близько наближається до деякого числа S , яке називають сумою нескінченно спадної геометричної прогресії.

Сума S нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- А у випадку, коли $b_1 < 0$ і $q > 0$, члени нескінченно спадної геометричної прогресії навіть збільшуються. Наприклад, такою властивістю володіють члени нескінченно спадної геометричної прогресії $-27; -9; -3; -1; \dots$ зі знаменником $q = 1/3$.

Проте, в усіх випадках модулі членів нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються, наближаючись все ближче і ближче до числа 0. При цьому сума S_n перших n членів прогресії при зростанні числа доданків n як завгодно близько наближається до деякого числа S , яке називають сумою нескінченно спадної геометричної прогресії.

Сума S нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

- А у випадку, коли $b_1 < 0$ і $q > 0$, члени нескінченно спадної геометричної прогресії навіть збільшуються. Наприклад, такою властивістю володіють члени нескінченно спадної геометричної прогресії $-27; -9; -3; -1; \dots$ зі знаменником $q = 1/3$.

Проте, в усіх випадках модулі членів нескінченно спадної геометричної прогресії зменшуються, наближаючись все ближче і ближче до числа 0. При цьому сума S_n перших n членів прогресії при зростанні числа доданків n як завгодно близько наближається до деякого числа S , яке називають сумою нескінченно спадної геометричної прогресії.

Сума S нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Приклад 7. Сума другого і п'ятого членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 18, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює 32. Обчислити суму прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 – перший член прогресії, а q – її знаменник. Маємо

$$\begin{aligned} b_2 + b_5 = 18 &\iff b_1 q + b_1 q^4 = 18 \iff b_1 q(1 + q^3) = 18 \quad \text{і} \\ b_3 b_4 = 32 &\iff b_1 q^2 b_1 q^3 = 32 \iff b_1^2 q^5 = 32. \end{aligned}$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

для знаходження b_1 і q .

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Приклад 7. Сума другого і п'ятого членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 18, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює 32. Обчислити суму прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 – перший член прогресії, а q – її знаменник. Маємо

$$\begin{aligned} b_2 + b_5 = 18 &\iff b_1 q + b_1 q^4 = 18 \iff b_1 q(1 + q^3) = 18 \quad \text{і} \\ b_3 b_4 = 32 &\iff b_1 q^2 b_1 q^3 = 32 \iff b_1^2 q^5 = 32. \end{aligned}$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

для знаходження b_1 і q .

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Приклад 7. Сума другого і п'ятого членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 18, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює 32. Обчислити суму прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 – перший член прогресії, а q – її знаменник. Маємо

$$b_2 + b_5 = 18 \iff b_1 q + b_1 q^4 = 18 \iff b_1 q(1 + q^3) = 18 \quad \text{і}$$

$$b_3 b_4 = 32 \iff b_1 q^2 b_1 q^3 = 32 \iff b_1^2 q^5 = 32.$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

для знаходження b_1 і q .

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Виражаючи b_1 з першого рівняння системи

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

і підставляючи отриманий вираз у друге рівняння системи, приходимо до рівносильної системи рівнянь

$$\begin{cases} b_1 = \frac{18}{q(1 + q^3)}, \\ \frac{18^2 q^3}{(1 + q^3)^2} = 32. \end{cases}$$

Тепер, розв'язуючи друге рівняння системи за допомогою заміни змінних $t = q^3$, отримуємо

$$\frac{18^2 t}{(1 + t)^2} = 32 \iff \frac{9^2 t}{(1 + t)^2} = 8 \iff \frac{81t - 8(1 + t)^2}{(1 + t)^2} = 0 \iff$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Виражаючи b_1 з першого рівняння системи

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

і підставляючи отриманий вираз у друге рівняння системи, приходимо до рівносильної системи рівнянь

$$\begin{cases} b_1 = \frac{18}{q(1 + q^3)}, \\ \frac{18^2 q^3}{(1 + q^3)^2} = 32. \end{cases}$$

Тепер, розв'язуючи друге рівняння системи за допомогою **заміни змінних** $t = q^3$, отримуємо

$$\frac{18^2 t}{(1 + t)^2} = 32 \iff \frac{9^2 t}{(1 + t)^2} = 8 \iff \frac{81t - 8(1 + t)^2}{(1 + t)^2} = 0 \iff$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

Виражаючи b_1 з першого рівняння системи

$$\begin{cases} b_1 q(1 + q^3) = 18, \\ b_1^2 q^5 = 32 \end{cases}$$

і підставляючи отриманий вираз у друге рівняння системи, приходимо до рівносильної системи рівнянь

$$\begin{cases} b_1 = \frac{18}{q(1 + q^3)}, \\ \frac{18^2 q^3}{(1 + q^3)^2} = 32. \end{cases}$$

Тепер, розв'язуючи друге рівняння системи за допомогою **заміни змінних** $t = q^3$, отримуємо

$$\frac{18^2 t}{(1 + t)^2} = 32 \iff \frac{9^2 t}{(1 + t)^2} = 8 \iff \frac{81t - 8(1 + t)^2}{(1 + t)^2} = 0 \iff$$

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64

Нескінченно спадна геометрична прогресія

$$\Leftrightarrow \frac{81t - 8(1 + 2t + t^2)}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{65t - 8 - 8t^2}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8t^2 - 65t + 8}{(1+t)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8t^2 - 65t + 8 = 0, \\ (1+t)^2 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = t = 8, \\ q^3 = t = 1/8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ q = 1/2. \end{cases}$$

При $q = 2$ геометрична прогресія не є нескінченно спадною, а при $q = 1/2$ маємо

$$b_1 = \frac{18}{q(1+q^3)} = \frac{18}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{8})} = \frac{18}{\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8}} = 18 : \frac{9}{16} = 18 \cdot \frac{16}{9} = 32.$$

Отже, сума прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = 32 : \frac{1}{2} = 32 \cdot 2 = 64.$$

Відповідь: 64.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: $0,5$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: $2,5$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: $0,5$.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: $2,5$.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: 0,5.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: 0,5.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: 0,5.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Приклади із ЗНО

Приклад 8 (Пробне тестування ЗНО, 2017 р.).

Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -0,25$, $b_4 = 2$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3$, то $2 = -0,25 q^3 \iff q^3 = -8$, звідки знаходимо знаменник прогресії: $q = -2$. Тоді $b_2 = b_1 q = -0,25 \cdot (-2) = 0,5$.

Відповідь: 0,5.

Приклад 9 (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2008 р.).

Обчисліть суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії, у якої $b_n = 5 \cdot 3^{-n}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$b_1 = 5 \cdot 3^{-1} = 5/3$, $b_2 = 5 \cdot 3^{-2} = 5/9$ і знаменник прогресії $q = b_2/b_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3}$. Тоді

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{3} : \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Відповідь: 2,5.

Приклад комбінованої задачі на властивості арифметичної і геометричної прогресій

На закінчення розглянемо приклад, при розв'язанні якого використовуються властивості як арифметичної, так і геометричної прогресії.

Приклад 10. Дано чотири числа, з яких перші три є послідовними членами геометричної, а останні три — послідовними членами арифметичної прогресії. Сума крайніх чисел дорівнює 32, сума середніх дорівнює 24. Знайти ці числа.

Розв'язання. Нехай задано числа x, y, z, t . За умовою виконуються співвідношення $x+t=32$, $y+z=24$, а також $y+t=2z$ (характеристична властивість арифметичної прогресії) і $xz=y^2$ (характеристична властивість геометричної прогресії).

Приклад комбінованої задачі на властивості арифметичної і геометричної прогресій

На закінчення розглянемо приклад, при розв'язанні якого використовуються властивості як арифметичної, так і геометричної прогресії.

Приклад 10. Дано чотири числа, з яких перші три є послідовними членами геометричної, а останні три — послідовними членами арифметичної прогресії. Сума крайніх чисел дорівнює 32, сума середніх дорівнює 24. Знайти ці числа.

Розв'язання. Нехай задано числа x, y, z, t . За умовою виконуються співвідношення $x + t = 32$, $y + z = 24$, а також $y + t = 2z$ (характеристична властивість арифметичної прогресії) і $xz = y^2$ (характеристична властивість геометричної прогресії).

Комбінована задача

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+t=32, \\ y+z=24, \\ y+t=2z, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Послідовно виражаючи змінні цієї системи через z ,
отримуємо

$$\begin{cases} y=24-z, \\ t=2z-y=2z-(24-z)=3z-24, \\ x=32-t=32-(3z-24)=56-3z, \\ (56-3z)z=(24-z)^2. \end{cases}$$

Перетворимо останнє рівняння системи:

$$\begin{aligned} 56z-3z^2 &= 576-48z+z^2 \iff 0=4z^2-104z+576 \iff \\ &\iff z^2-26z+144=0. \end{aligned}$$

Отримане квадратне рівняння має два корені: $z_1=8$ і $z_2=18$.

Комбінована задача

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+t=32, \\ y+z=24, \\ y+t=2z, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Послідовно виражаючи змінні цієї системи через z ,
отримуємо

$$\begin{cases} y=24-z, \\ t=2z-y=2z-(24-z)=3z-24, \\ x=32-t=32-(3z-24)=56-3z, \\ (56-3z)z=(24-z)^2. \end{cases}$$

Перетворимо останнє рівняння системи:

$$\begin{aligned} 56z-3z^2 &= 576-48z+z^2 \iff 0=4z^2-104z+576 \iff \\ &\iff z^2-26z+144=0. \end{aligned}$$

Отримане квадратне рівняння має два корені: $z_1=8$ і $z_2=18$.

Комбінована задача

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+t=32, \\ y+z=24, \\ y+t=2z, \\ xz=y^2. \end{cases}$$

Послідовно виражаючи змінні цієї системи через z ,
отримуємо

$$\begin{cases} y=24-z, \\ t=2z-y=2z-(24-z)=3z-24, \\ x=32-t=32-(3z-24)=56-3z, \\ (56-3z)z=(24-z)^2. \end{cases}$$

Перетворимо останнє рівняння системи:

$$\begin{aligned} 56z-3z^2 &= 576-48z+z^2 \iff 0=4z^2-104z+576 \iff \\ &\iff z^2-26z+144=0. \end{aligned}$$

Отримане квадратне рівняння має два корені: $z_1=8$ і $z_2=18$.

Комбінована задача

Отже, далі маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 24 - z, \\ t = 3z - 24, \\ x = 56 - 3z, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} z = 8, y = 16, t = 0, x = 32, \\ z = 18, y = 6, t = 30, x = 2, \end{array} \right.$$

тобто система має два розв'язки. Відповідно, існують дві четвірки чисел x, y, z, t , що задовольняють умову задачі: $(32; 16; 8; 0)$ або $(2; 6; 18; 30)$.

Відповідь: $(32; 16; 8; 0)$ або $(2; 6; 18; 30)$.

Комбінована задача

Отже, далі маємо

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 24 - z, \\ t = 3z - 24, \\ x = 56 - 3z, \end{array} \right. \iff \left[\begin{array}{l} z = 8, y = 16, t = 0, x = 32, \\ z = 18, y = 6, t = 30, x = 2, \end{array} \right.$$

тобто система має два розв'язки. Відповідно, існують дві четвірки чисел x, y, z, t , що задовольняють умову задачі: $(32; 16; 8; 0)$ або $(2; 6; 18; 30)$.

Відповідь: $(32; 16; 8; 0)$ або $(2; 6; 18; 30)$.