Екстремальні задачі стереометрії

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 38 (частина друга)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Етапи розв'язання екстремальних задач

Будемо розглядати екстремальні задачі стереометрії, розв'язання яких зводиться до знаходження екстремальних значень функцій однієї змінної.

При розв'язанні таких задач, як правило, необхідно виконати наступні кроки (етапи):

- моделюючи задачу, ввести змінну x і визначити проміжок I її зміни;
- записати деяку функцію $f(x)$ та дослідити її екстремальні властивості (тобто наявність екстремумів і т.п.) на проміжку I;
- застосувати результат дослідження функції $f(x)$ до розв'язання задачі.

Успіх у розв'язанні ряду екстремальних задач багато в чому залежить від вдалого вибору змінної x. В кожному з наступних прикладів зверніть увагу на раціональний вибір змінної x.

Етапи розв'язання екстремальних задач

Будемо розглядати екстремальні задачі стереометрії, розв'язання яких зводиться до знаходження екстремальних значень функцій однієї змінної.

При розв'язанні таких задач, як правило, необхідно виконати наступні кроки (етапи):

- моделюючи задачу, ввести змінну x і визначити проміжок I її зміни;
- записати деяку функцію $f(x)$ та дослідити її екстремальні властивості (тобто наявність екстремумів і т.п.) на проміжку I;
- застосувати результат дослідження функції $f(x)$ до розв'язання задачі.

Успіх у розв'язанні ряду екстремальних задач багато в чому залежить від вдалого вибору змінної x. В кожному з наступних прикладів зверніть увагу на раціональний вибір змінної x.

Етапи розв'язання екстремальних задач

Будемо розглядати екстремальні задачі стереометрії, розв'язання яких зводиться до знаходження екстремальних значень функцій однієї змінної.

При розв'язанні таких задач, як правило, необхідно виконати наступні кроки (етапи):

- моделюючи задачу, ввести змінну x і визначити проміжок I її зміни;
- записати деяку функцію $f(x)$ та дослідити її екстремальні властивості (тобто наявність екстремумів і т.п.) на проміжку I;
- застосувати результат дослідження функції $f(x)$ до розв'язання задачі.

Успіх у розв'язанні ряду екстремальних задач багато в чому залежить від вдалого вибору змінної x. В кожному з наступних прикладів зверніть увагу на раціональний вибір змінної x.

Етапи розв'язання екстремальних задач

Будемо розглядати екстремальні задачі стереометрії, розв'язання яких зводиться до знаходження екстремальних значень функцій однієї змінної.

При розв'язанні таких задач, як правило, необхідно виконати наступні кроки (етапи):

- моделюючи задачу, ввести змінну x і визначити проміжок I її зміни;
- записати деяку функцію $f(x)$ та дослідити її екстремальні властивості (тобто наявність екстремумів і т.п.) на проміжку I;
- застосувати результат дослідження функції $f(x)$ до розв'язання задачі.

Успіх у розв'язанні ряду екстремальних задач багато в чому залежить від вдалого вибору змінної x. В кожному з наступних прикладів зверніть увагу на раціональний вибір змінної x.

Етапи розв'язання екстремальних задач

Будемо розглядати екстремальні задачі стереометрії, розв'язання яких зводиться до знаходження екстремальних значень функцій однієї змінної.

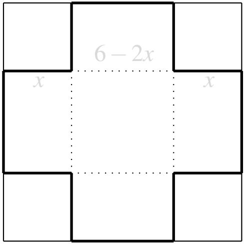
При розв'язанні таких задач, як правило, необхідно виконати наступні кроки (етапи):

- моделюючи задачу, ввести змінну x і визначити проміжок I її зміни;
- записати деяку функцію $f(x)$ та дослідити її екстремальні властивості (тобто наявність екстремумів і т.п.) на проміжку I;
- застосувати результат дослідження функції $f(x)$ до розв'язання задачі.

Успіх у розв'язанні ряду екстремальних задач багато в чому залежить від вдалого вибору змінної x. В кожному з наступних прикладів зверніть увагу на раціональний вибір змінної x.

Приклади

Приклад 1. З квадратного шматка листового металу зі стороною 6 м виготовляють резервуар для води, вирізаючи у кутах чотири однакових квадрати так, щоб із частини, що залишилася, після згинання чотирьох смуг і зварювання швів утворився резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда без кришки. Обчисліть максимальний об'єм резервуара.



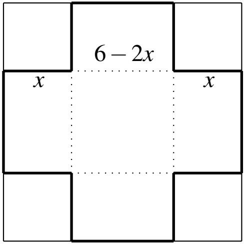
Розв'язання. Нехай x – сторона вирізаного квадрата. Оскільки $2x < 6 \iff x < 3$, то $x \in (0;3)$. Тоді сторона основи резервуара дорівнює $6-2x$ м, а висота резервуара – x м. Використовуючи формулу об'єму паралелепіпеда $V = S_0 H$, де S_0 – площа основи і H – висота паралелепіпеда,

отримуємо вираз об'єму резервуара через змінну x:

$V = f(x) = (6-2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad x \in (0;3)$.

Приклади

Приклад 1. З квадратного шматка листового металу зі стороною 6 м виготовляють резервуар для води, вирізаючи у кутах чотири однакових квадрати так, щоб із частини, що залишилася, після згинання чотирьох смуг і зварювання швів утворився резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда без кришки. Обчисліть максимальний об'єм резервуара.



Розв'язання. Нехай x – сторона вирізаного квадрата. Оскільки $2x < 6 \iff x < 3$, то $x \in (0;3)$. Тоді сторона основи резервуара дорівнює $6-2x$ м, а висота резервуара – x м.

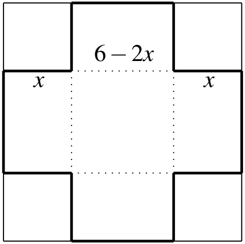
Використовуючи формулу об'єму паралелепіпеда $V = S_0 H$, де S_0 – площа основи і H – висота паралелепіпеда,

отримуємо вираз об'єму резервуара через змінну x:

$$V = f(x) = (6-2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad x \in (0;3).$$

Приклади

Приклад 1. З квадратного шматка листового металу зі стороною 6 м виготовляють резервуар для води, вирізаючи у кутах чотири однакових квадрати так, щоб із частини, що залишилася, після згинання чотирьох смуг і зварювання швів утворився резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда без кришки. Обчисліть максимальний об'єм резервуара.



Розв'язання. Нехай x – сторона вирізаного квадрата. Оскільки $2x < 6 \iff x < 3$, то $x \in (0;3)$. Тоді сторона основи резервуара дорівнює $6-2x$ м, а висота резервуара – x м. Використовуючи формулу об'єму паралелепіпеда $V = S_0 H$, де S_0 – площа основи і H – висота паралелепіпеда,

отримуємо вираз об'єму резервуара через змінну x:

$V = f(x) = (6-2x)^2 x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad x \in (0;3)$.

Приклади

Шукаємо критичні точки функції $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$:

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$;

$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 48x + 36 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

$y = f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$

Проміжку $(0;3)$ належить тільки критична точка $x = 1$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;3)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, максимальний об'єм резервуара дорівнює

$V_{\max} = f(1) = 4 - 24 + 36 = 16$ (м^3).

Відповідь: 16 м^3.

Приклади

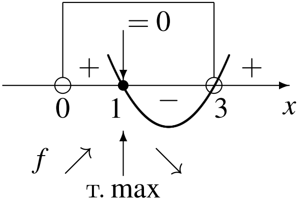
Шукаємо критичні точки функції $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$:

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$;

$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 48x + 36 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array} \right.$

$y = f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$



Проміжку $(0;3)$ належить тільки критична точка $x = 1$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;3)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, максимальний об'єм резервуара дорівнює

$V_{max} = f(1) = 4 - 24 + 36 = 16$ (м^3).

Відповідь: 16 м^3.

Приклади

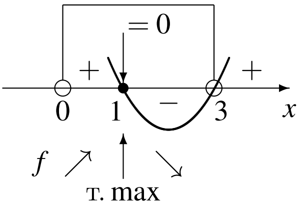
Шукаємо критичні точки функції $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$:

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$;

$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 48x + 36 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1\,, \\ x = 3\,. \end{array} \right.$

$y = f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$



Проміжку $(0;3)$ належить тільки критична точка $x = 1$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;3)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, максимальний об'єм резервуара дорівнює

$V_{\max} = f(1) = 4 - 24 + 36 = 16$ (м^3).

Відповідь: 16 м^3.

Приклади

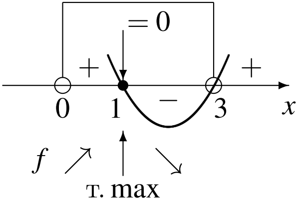
Шукаємо критичні точки функції $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$:

$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$;

$f'(x) = 0 \iff 12x^2 - 48x + 36 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} x = 1\,, \\ x = 3\,. \end{array} \right.$

$y = f'(x) = 12x^2 - 48x + 36$



Проміжку $(0;3)$ належить тільки критична точка $x = 1$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;3)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, максимальний об'єм резервуара дорівнює

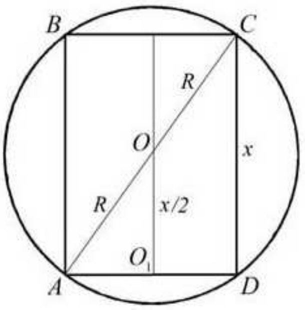
$V_{\max} = f(1) = 4 - 24 + 36 = 16$ (м^3).

Відповідь: 16 м^3.

Приклади

Відзначимо, що якщо в кулю вписується тіло (піраміда, конус, циліндр), один з параметрів якого досягає максимального значення, то в якості змінної x зручно вибрати висоту цього тіла.

Приклад 2. Знайти максимальный об'єм циліндра, вписаного в кулю радіуса R.



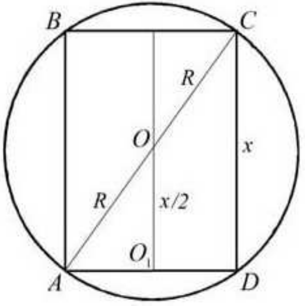
Розв'язання. Нехай x – висота циліндра, при цьому $x \in (0, 2R)$. Використовуючи формулу об'єму циліндра $V = \pi (R_{ц})^2 H$, де $R_{ц} = AO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ – радіус циліндра і $H = x$ – його висота (див. осьовий переріз циліндра і кулі на мал.), отримуємо вираз об'єму циліндра через змінну x:

$$V = f(x) = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{4}\right), \qquad x \in (0; 2R).$$

Приклади

Відзначимо, що якщо в кулю вписується тіло (піраміда, конус, циліндр), один з параметрів якого досягає максимального значення, то в якості змінної x зручно вибрати висоту цього тіла.

Приклад 2. Знайти максимальный об'єм циліндра, вписаного в кулю радіуса R.



Розв'язання. Нехай x – висота циліндра, при цьому $x \in (0, 2R)$. Використовуючи формулу об'єму циліндра $V = \pi(R_{\text{ц}})^2 H$, де $R_{\text{ц}} = AO_1 = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ – радіус циліндра і $H = x$ – його висота (див. осьовий переріз циліндра і кулі на мал.), отримуємо вираз об'єму циліндра через змінну x:

$$V = f(x) = \pi\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{4}\right), \qquad x \in (0; 2R).$$

Приклади

Шукаємо критичні точки функції $f(x) = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{4}\right)$:

$f'(x) = \pi\left(R^2 - \frac{3x^2}{4}\right)$;

$f'(x) = 0 \iff R^2 - \frac{3x^2}{4} = 0 \iff x^2 = \frac{4R^2}{3} \iff x = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$y = f'(x) = \pi\left(R^2 - \frac{3x^2}{4}\right)$

Проміжку $(0;2R)$ належить тільки критична точка $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, максимальный об'єм циліндра дорівнює

$V_{\max} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \pi\left(R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{8R^3}{4\cdot 3\sqrt{3}}\right) = \pi\left(\frac{2R^3}{\sqrt{3}} - \frac{2R^3}{3\sqrt{3}}\right) =$

$= \frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Відповідь: $V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

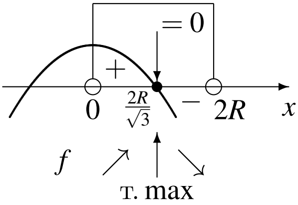
Приклади

Шукаємо критичні точки функції $f(x)=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{4}\right)$:

$f'(x)=\pi\left(R^2-\frac{3x^2}{4}\right)$;

$f'(x)=0 \iff R^2-\frac{3x^2}{4}=0 \iff x^2=\frac{4R^2}{3} \iff x=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$y=f'(x)=\pi\left(R^2-\frac{3x^2}{4}\right)$



Проміжку $(0;2R)$ належить тільки критична точка $x=\frac{2R}{\sqrt{3}}$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Отже, максимальный об'єм циліндра дорівнює

$$V_{\max}=f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)=\pi\left(R^2\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}-\frac{8R^3}{4\cdot3\sqrt{3}}\right)=\pi\left(\frac{2R^3}{\sqrt{3}}-\frac{2R^3}{3\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

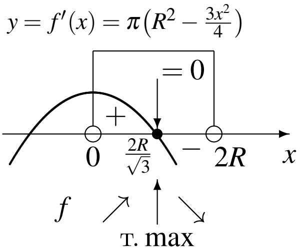
Відповідь: $V_{\max}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Приклади

Шукаємо критичні точки функції $f(x)=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{4}\right)$:

$f'(x)=\pi\left(R^2-\frac{3x^2}{4}\right)$;

$f'(x)=0 \iff R^2-\frac{3x^2}{4}=0 \iff x^2=\frac{4R^2}{3} \iff x=\pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.



Проміжку $(0;2R)$ належить тільки критична точка $x=\frac{2R}{\sqrt{3}}$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Отже, максимальный об'єм циліндра дорівнює

$$V_{\max}=f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)=\pi\left(R^2\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}-\frac{8R^3}{4\cdot3\sqrt{3}}\right)=\pi\left(\frac{2R^3}{\sqrt{3}}-\frac{2R^3}{3\sqrt{3}}\right)=$$
$$=\frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}\,.$$

Відповідь: $V_{\max}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

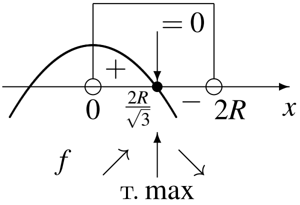
Приклади

Шукаємо критичні точки функції $f(x) = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{4}\right)$:

$f'(x) = \pi\left(R^2 - \frac{3x^2}{4}\right)$;

$f'(x) = 0 \iff R^2 - \frac{3x^2}{4} = 0 \iff x^2 = \frac{4R^2}{3} \iff x = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$y = f'(x) = \pi\left(R^2 - \frac{3x^2}{4}\right)$



Проміжку $(0;2R)$ належить тільки критична точка $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, в якій функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

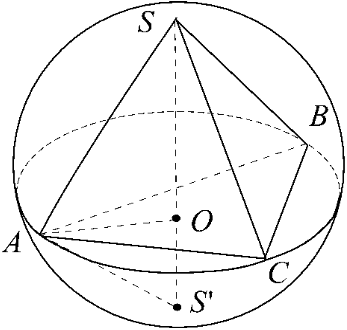
Отже, максимальный об'єм циліндра дорівнює

$$V_{\max} = f\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \pi\left(R^2 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} - \frac{8R^3}{4 \cdot 3\sqrt{3}}\right) = \pi\left(\frac{2R^3}{\sqrt{3}} - \frac{2R^3}{3\sqrt{3}}\right) =$$
$$= \frac{2\pi R^3}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}} .$$

Відповідь: $V_{\max} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Приклади

Приклад 3. В кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти площу основи піраміди.



Розв'язання. Нехай $x = SO$ – висота піраміди, при цьому $x \in (0, 2R)$. Нехай SS' – діаметр кулі, який містить висоту SO (див. мал.). Використаємо рівність (див. розв'язання стандартної планіметричної задачі 3, розглянутої в частині першій Уроку 38) $SS' = \frac{AS^2}{OS}$, звідки виражаємо $AS^2 = SS' \cdot OS = 2Rx$.

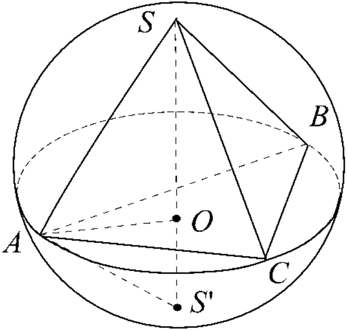
Тоді $AO^2 = AS^2 - OS^2 = 2Rx - x^2$.

Виразимо через x площу основи піраміди:

$$S_{\text{O}} = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}\, AO)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} AO^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} (2Rx - x^2).$$

Приклади

П р и к л а д 3. В кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти площу основи піраміди.



Р о з в' я з а н н я. Нехай $x = SO$ – висота піраміди, при цьому $x \in (0, 2R)$. Нехай SS' – діаметр кулі, який містить висоту SO (див. мал.). Використаємо рівність (див. розв'язання стандартної планіметричної задачі 3, розглянутої в частині першій Уроку 38) $SS' = \frac{AS^2}{OS}$, звідки виражаємо $AS^2 = SS' \cdot OS = 2Rx$.

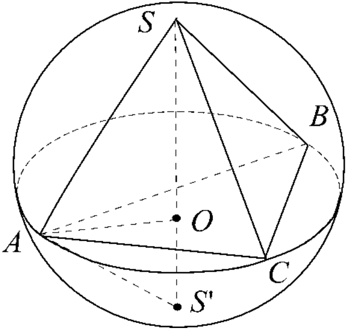
Тоді $AO^2 = AS^2 - OS^2 = 2Rx - x^2$.

Виразимо через x площу основи піраміди:

$$S_O = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}\, AO)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} AO^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} (2Rx - x^2).$$

Приклади

Приклад 3. В кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти площу основи піраміди.



Розв'язання. Нехай $x = SO$ – висота піраміди, при цьому $x \in (0, 2R)$. Нехай SS' – діаметр кулі, який містить висоту SO (див. мал.). Використаємо рівність (див. розв'язання стандартної планіметричної задачі 3, розглянутої в частині першій Уроку 38) $SS' = \frac{AS^2}{OS}$, звідки виражаємо $AS^2 = SS' \cdot OS = 2Rx$.

Тоді $AO^2 = AS^2 - OS^2 = 2Rx - x^2$.

Виразимо через x площу основи піраміди:

$$S_{\text{O}} = \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3}\, AO)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} AO^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} (2Rx - x^2).$$

Приклади

Отже, об'єм V піраміди виражається у вигляді функції від x:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{O}} \cdot SO = \frac{\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)\, x = \frac{\sqrt{3}}{4}(2Rx^2 - x^3).$$

Розглянемо функцію $f(x) = 2Rx^2 - x^3$ при $x \in (0; 2R)$. Очевидно, що об'єм V – максимальний, якщо функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення.

Шукаємо критичні точки функції $f(x)$:

$f'(x) = 4Rx - 3x^2$;

$f'(x) = 0 \iff 4Rx - 3x^2 = 0 \iff x(4R - 3x) = 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4R/3. \end{array} \right.$$

Проміжку $(0; 2R)$ належить єдина критична точка $x = 4R/3$.

Приклади

Отже, об'єм V піраміди виражається у вигляді функції від x:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{O}} \cdot SO = \frac{\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)x = \frac{\sqrt{3}}{4}(2Rx^2 - x^3)\,.$$

Розглянемо функцію $f(x) = 2Rx^2 - x^3$ при $x \in (0;2R)$. Очевидно, що об'єм V – максимальний, якщо функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення.

Шукаємо критичні точки функції $f(x)$:

$$f'(x) = 4Rx - 3x^2\,;$$

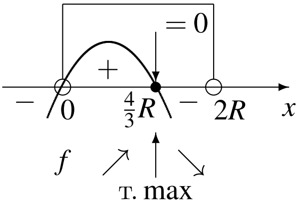
$$f'(x) = 0 \iff 4Rx - 3x^2 = 0 \iff x(4R - 3x) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = 0\,, \\ x = 4R/3\,. \end{array}\right.$$

Проміжку $(0;2R)$ належить єдина критична точка $x = 4R/3$.

Приклади

$y = f'(x) = 4Rx - 3x^2$



В критичній точці $x = 4R/3$ функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Знаходимо тепер площу основи цієї піраміди за формулою

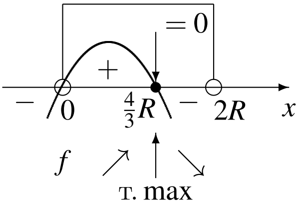
$S_O = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)$ при $x = x_{\max} = 4R/3$:

$$S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2.$$

Відповідь: $S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2$.

Приклади

$y = f'(x) = 4Rx - 3x^2$



В критичній точці $x = 4R/3$ функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0; 2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

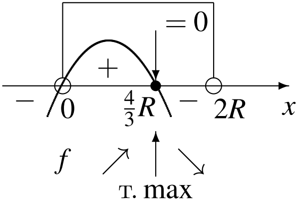
Знаходимо тепер площу основи цієї піраміди за формулою $S_O = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)$ при $x = x_{\max} = 4R/3$:

$$S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2 .$$

Відповідь: $S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2$.

Приклади

$y = f'(x) = 4Rx - 3x^2$



В критичній точці $x = 4R/3$ функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0;2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Знаходимо тепер площу основи цієї піраміди за формулою

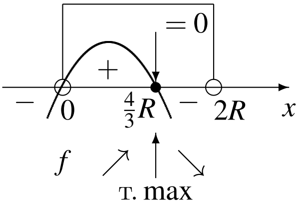
$S_{\mathrm{O}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)$ при $x = x_{\max} = 4R/3$:

$$S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2 .$$

Відповідь: $S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2$.

Приклади

$y = f'(x) = 4Rx - 3x^2$



В критичній точці $x = 4R/3$ функція $f(x)$ досягає свого найбільшого значення на інтервалі $(0; 2R)$, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Знаходимо тепер площу основи цієї піраміди за формулою

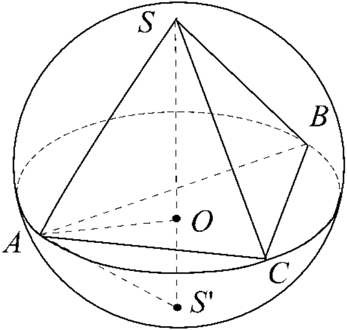
$S_О = \frac{3\sqrt{3}}{4}(2Rx - x^2)$ при $x = x_{\max} = 4R/3$:

$$S_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \cdot \frac{8}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2.$$

Відповідь: $S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R^2$.

Приклади

Приклад 4. В кулю вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

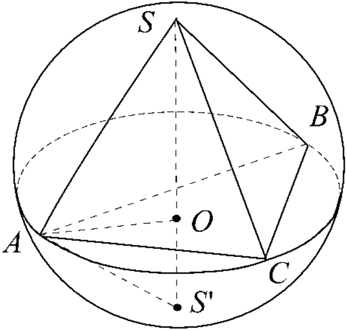


Розв'язання. В ході розв'язання нам належить виділити серед нескінченної множини пірамід, вписаних в кулю, піраміду найбільшого об'єму, а потім знайти плоский кут при вершині цієї виділеної піраміди.

Позначимо через R радіус кулі (тут R – величина стала). Ввівши змінну $x = SO$ так, як і в попередній задачі, встановимо, що піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Приклади

П р и к л а д 4. В кулю вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти плоский кут при вершині піраміди.

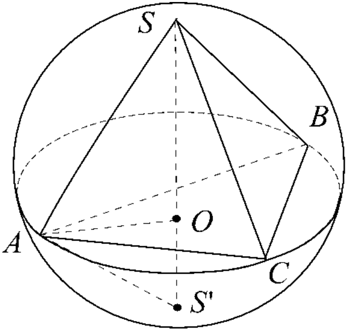


Р о з в' я з а н н я. В ході розв'язання нам належить виділити серед нескінченної множини пірамід, вписаних в кулю, піраміду найбільшого об'єму, а потім знайти плоский кут при вершині цієї виділеної піраміди.

Позначимо через R радіус кулі (тут R – величина стала). Ввівши змінну $x = SO$ так, як і в попередній задачі, встановимо, що піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Приклади

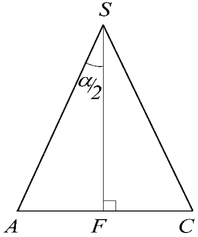
П р и к л а д 4. В кулю вписано правильну трикутну піраміду найбільшого об'єму. Знайти плоский кут при вершині піраміди.



Р о з в' я з а н н я. В ході розв'язання нам належить виділити серед нескінченної множини пірамід, вписаних в кулю, піраміду найбільшого об'єму, а потім знайти плоский кут при вершині цієї виділеної піраміди.

Позначимо через R радіус кулі (тут R – величина стала). Ввівши змінну $x = SO$ так, як і в попередній задачі, встановимо, що піраміда найбільшого об'єму, вписана в кулю радіуса R, має висоту $x_{\max} = 4R/3$.

Приклади



Тепер шуканий кут α будемо шукати із співвідношення $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AS} = \frac{AC}{2\,AS}$ (див. мал., на якому зображено бічну грань піраміди).

Використовуючи формули $AS^2 = 2Rx$, $AO^2 = 2Rx - x^2$ (див. попередній приклад), при $x = x_{\max}$ отримуємо

$AS = \sqrt{2R \cdot \frac{4}{3}R} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$AC = \sqrt{3}\,AO = \sqrt{3}\sqrt{2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{8}{9}R^2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R$.

Отже,

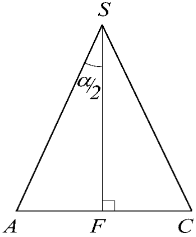
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}AC : AS = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R : 2R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $\frac{\alpha}{2}$ — гострий кут, то $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Тоді $\alpha = \pi/3$.

Відповідь: 60°.

Приклади



Тепер шуканий кут α будемо шукати із співвідношення $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AF}{AS}=\frac{AC}{2\,AS}$ (див. мал., на якому зображено бічну грань піраміди).

Використовуючи формули $AS^2=2Rx$, $AO^2=2Rx-x^2$ (див. попередній приклад), при $x=x_{\max}$ отримуємо

$AS=\sqrt{2R\cdot\frac{4}{3}R}=2R\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$AC=\sqrt{3}\,AO=\sqrt{3}\sqrt{2R\cdot\frac{4}{3}R-\frac{16}{9}R^2}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{8}{9}R^2}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R$.

Отже,

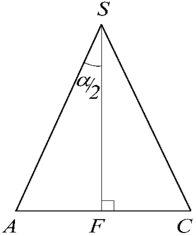
$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}AC:AS=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R:2R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

Оскільки $\frac{\alpha}{2}$ — гострий кут, то $\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

Тоді $\alpha=\pi/3$.

Відповідь: 60°.

Приклади



Тепер шуканий кут α будемо шукати із співвідношення $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AS} = \frac{AC}{2\,AS}$ (див. мал., на якому зображено бічну грань піраміди).

Використовуючи формули $AS^2 = 2Rx$, $AO^2 = 2Rx - x^2$ (див. попередній приклад), при $x = x_{\max}$ отримуємо

$$AS = \sqrt{2R\cdot\frac{4}{3}R} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}\,;$$

$$AC = \sqrt{3}\,AO = \sqrt{3}\sqrt{2R\cdot\frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{8}{9}R^2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R\,.$$

Отже,

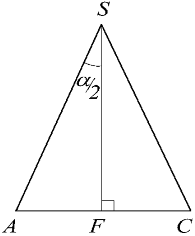
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}AC : AS = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R : 2R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Оскільки $\frac{\alpha}{2}$ — гострий кут, то $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Тоді $\alpha = \pi/3$.

Відповідь: 60°.

Приклади



Тепер шуканий кут α будемо шукати із співвідношення $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AF}{AS} = \frac{AC}{2\,AS}$ (див. мал., на якому зображено бічну грань піраміди).

Використовуючи формули $AS^2 = 2Rx$, $AO^2 = 2Rx - x^2$ (див. попередній приклад), при $x = x_{\max}$ отримуємо

$AS = \sqrt{2R \cdot \frac{4}{3}R} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}$;

$AC = \sqrt{3}\,AO = \sqrt{3}\sqrt{2R \cdot \frac{4}{3}R - \frac{16}{9}R^2} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{8}{9}R^2} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R$.

Отже,

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}AC : AS = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}R : 2R\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

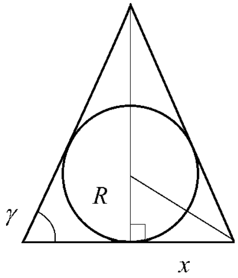
Оскільки $\frac{\alpha}{2}$ — гострий кут, то $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Тоді $\alpha = \pi/3$.

Відповідь: 60°.

Приклади

Приклад 5. Навколо кулі радіуса R описано конус найменшого об'єму. Знайти радіус основи конуса.



Розв'язання. Нехай x – радіус основи конуса, при цьому $x \in (R, \infty)$. Позначимо через γ кут нахилу твірної до площини основи (див. осьовий переріз конуса і кулі на мал.). Маємо співвідношення $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{x}$.

Виразимо через x висоту конуса

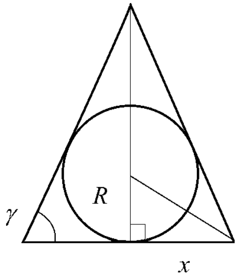
$$H = x \operatorname{tg} \gamma = x \frac{2 \operatorname{tg}(\gamma/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\gamma/2)} = x \frac{2 \frac{R}{x}}{1 - \frac{R^2}{x^2}} = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}.$$

Тоді об'єм V конуса виражається через x у такий спосіб:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 H = \frac{2\pi R}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2}, \quad x \in (R, \infty).$$

Приклади

П р и к л а д 5. Навколо кулі радіуса R описано конус найменшого об'єму. Знайти радіус основи конуса.



Р о з в' я з а н н я. Нехай x – радіус основи конуса, при цьому $x \in (R, \infty)$. Позначимо через γ кут нахилу твірної до площини основи (див. осьовий переріз конуса і кулі на мал.). Маємо співвідношення $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{R}{x}$.

Виразимо через x висоту конуса

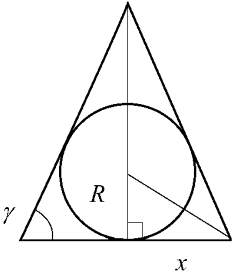
$$H = x \operatorname{tg}\gamma = x \frac{2\operatorname{tg}(\gamma/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\gamma/2)} = x \frac{2\frac{R}{x}}{1 - \frac{R^2}{x^2}} = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}.$$

Тоді об'єм V конуса виражається через x у такий спосіб:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 H = \frac{2\pi R}{3} \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2}, \quad x \in (R, \infty).$$

Приклади

Приклад 5. Навколо кулі радіуса R описано конус найменшого об'єму. Знайти радіус основи конуса.



Розв'язання. Нехай x – радіус основи конуса, при цьому $x \in (R, \infty)$. Позначимо через γ кут нахилу твірної до площини основи (див. осьовий переріз конуса і кулі на мал.). Маємо співвідношення $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{R}{x}$.

Виразимо через x висоту конуса

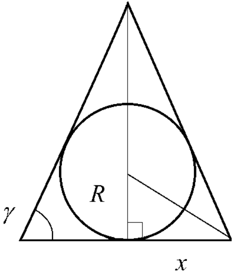
$$H = x \operatorname{tg}\gamma = x\,\frac{2\operatorname{tg}(\gamma/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\gamma/2)} = x\,\frac{2\,\frac{R}{x}}{1-\frac{R^2}{x^2}} = \frac{2Rx^2}{x^2-R^2}.$$

Тоді об'єм V конуса виражається через x у такий спосіб:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 H = \frac{2\pi R}{3}\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}, \qquad x \in (R, \infty).$$

Приклади

Приклад 5. Навколо кулі радіуса R описано конус найменшого об'єму. Знайти радіус основи конуса.



Розв'язання. Нехай x – радіус основи конуса, при цьому $x \in (R, \infty)$. Позначимо через γ кут нахилу твірної до площини основи (див. осьовий переріз конуса і кулі на мал.). Маємо співвідношення $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{R}{x}$.

Виразимо через x висоту конуса

$$H = x \operatorname{tg}\gamma = x\,\frac{2\operatorname{tg}(\gamma/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\gamma/2)} = x\,\frac{2\,\frac{R}{x}}{1-\frac{R^2}{x^2}} = \frac{2Rx^2}{x^2-R^2}.$$

Тоді об'єм V конуса виражається через x у такий спосіб:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 H = \frac{2\pi R}{3}\cdot\frac{x^4}{x^2-R^2}, \qquad x \in (R, \infty).$$

Приклади

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - R^2}$ при $x \in (R, \infty)$. Очевидно, що об'єм V є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^4)'(x^2-R^2)-(x^4)(x^2-R^2)'}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^3(x^2-R^2)-x^4\cdot 2x}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^5-4R^2x^3-2x^5}{(x^2-R^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^5-4R^2x^3}{(x^2-R^2)^2} = \frac{2x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}.$$

На проміжку (R, ∞) функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x = \sqrt{2}R$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, конус найменшого об'єму, описаний навколо кулі радіуса R, має радіус основи $x_{\min} = \sqrt{2}R$.

Відповідь: $\sqrt{2}R$.

Приклади

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^2-R^2}$ при $x \in (R,\infty)$. Очевидно, що об'єм V є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^4)'(x^2-R^2)-(x^4)(x^2-R^2)'}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^3(x^2-R^2)-x^4\cdot 2x}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^5-4R^2x^3-2x^5}{(x^2-R^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^5-4R^2x^3}{(x^2-R^2)^2} = \frac{2x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}.$$

На проміжку (R,∞) функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x = \sqrt{2}R$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, конус найменшого об'єму, описаний навколо кулі радіуса R, має радіус основи $x_{\min} = \sqrt{2}R$.

Відповідь: $\sqrt{2}R$.

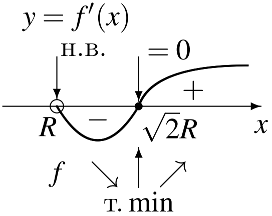
Приклади

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^4}{x^2-R^2}$ при $x\in(R,\infty)$. Очевидно, що об'єм V є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^4)'(x^2-R^2)-(x^4)(x^2-R^2)'}{(x^2-R^2)^2}=\frac{4x^3(x^2-R^2)-x^4\cdot 2x}{(x^2-R^2)^2}=\frac{4x^5-4R^2x^3-2x^5}{(x^2-R^2)^2}=$$

$$=\frac{2x^5-4R^2x^3}{(x^2-R^2)^2}=\frac{2x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}.$$



На проміжку (R,∞) функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x=\sqrt{2}R$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Отже, конус найменшого об'єму, описаний навколо кулі радіуса R, має радіус основи $x_{\min}=\sqrt{2}R$.

Відповідь: $\sqrt{2}R$.

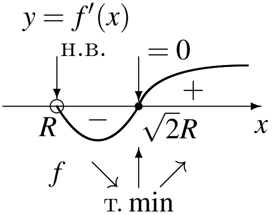
Приклади

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^4}{x^2-R^2}$ при $x\in(R,\infty)$. Очевидно, що об'єм V є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^4)'(x^2-R^2)-(x^4)(x^2-R^2)'}{(x^2-R^2)^2}=\frac{4x^3(x^2-R^2)-x^4\cdot 2x}{(x^2-R^2)^2}=\frac{4x^5-4R^2x^3-2x^5}{(x^2-R^2)^2}=$$

$$=\frac{2x^5-4R^2x^3}{(x^2-R^2)^2}=\frac{2x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}.$$



На проміжку (R,∞) функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x=\sqrt{2}R$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Отже, конус найменшого об'єму, описаний навколо кулі радіуса R, має радіус основи $x_{\min}=\sqrt{2}R$.

Відповідь: $\sqrt{2}R$.

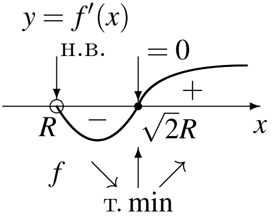
Приклади

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - R^2}$ при $x \in (R, \infty)$. Очевидно, що об'єм V є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^4)'(x^2-R^2)-(x^4)(x^2-R^2)'}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^3(x^2-R^2)-x^4 \cdot 2x}{(x^2-R^2)^2} = \frac{4x^5-4R^2x^3-2x^5}{(x^2-R^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^5-4R^2x^3}{(x^2-R^2)^2} = \frac{2x^3(x^2-2R^2)}{(x^2-R^2)^2}.$$



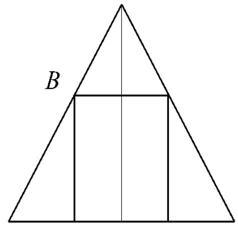
На проміжку (R, ∞) функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x = \sqrt{2}R$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

Отже, конус найменшого об'єму, описаний навколо кулі радіуса R, має радіус основи $x_{\min} = \sqrt{2}R$.

Відповідь: $\sqrt{2}R$.

Приклади

Приклад 6. Навколо циліндра об'єму V описано конус найменшого об'єму. Знайти об'єм конуса.



Розв'язання. Нехай $AO = R$ – радіус основи циліндра, $AB = H$ – висота циліндра, $H_{\text{К}} = OS$ – висота конуса, $R_{\text{К}} = OC$ – радіус основи конуса (див. осьовий переріз цих тіл на мал.), при цьому $V = \pi R^2 H$.

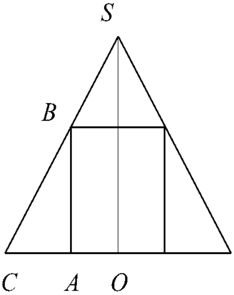
Позначимо через x коефіцієнт подібності трикутників SOC і BAC, тобто $x = \frac{OS}{AB} = \frac{OC}{AC}$, при цьому $x \in (1, \infty)$. Звідси отримуємо $OS = xAB = xH$ и $OC = xAC \iff R_{\text{К}} = x(R_{\text{К}} - R) \iff R_{\text{К}} = \frac{x}{x-1}R$.

Тоді об'єм конуса $V_{\text{К}}$ виражається через x:

$$V_{\text{К}} = \frac{1}{3}\pi(R_{\text{К}})^2 H_{\text{К}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{(x-1)^2} xH = \frac{1}{3}(\pi R^2 H)\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{3}V\frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Приклади

Приклад 6. Навколо циліндра об'єму V описано конус найменшого об'єму. Знайти об'єм конуса.



Розв'язання. Нехай $AO = R$ – радіус основи циліндра, $AB = H$ – висота циліндра, $H_к = OS$ – висота конуса, $R_к = OC$ – радіус основи конуса (див. осьовий переріз цих тіл на мал.), при цьому $V = \pi R^2 H$.

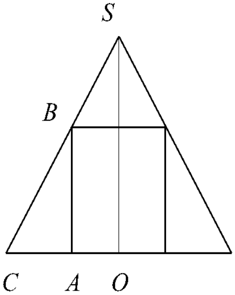
Позначимо через x коефіцієнт подібності трикутників SOC і BAC, тобто $x = \frac{OS}{AB} = \frac{OC}{AC}$, при цьому $x \in (1, \infty)$. Звідси отримуємо $OS = xAB = xH$ и $OC = xAC \iff R_к = x(R_к - R) \iff R_к = \frac{x}{x-1} R$.

Тоді об'єм конуса $V_к$ виражається через x:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi (R_к)^2 H_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{(x-1)^2} x H = \frac{1}{3}(\pi R^2 H)\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Приклади

Приклад 6. Навколо циліндра об'єму V описано конус найменшого об'єму. Знайти об'єм конуса.



Розв'язання. Нехай $AO = R$ – радіус основи циліндра, $AB = H$ – висота циліндра, $H_{\text{к}} = OS$ – висота конуса, $R_{\text{к}} = OC$ – радіус основи конуса (див. осьовий переріз цих тіл на мал.), при цьому $V = \pi R^2 H$.

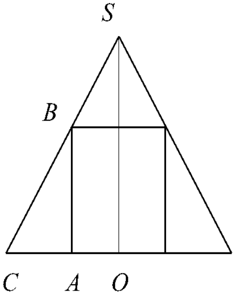
Позначимо через x коефіцієнт подібності трикутників SOC і BAC, тобто $x = \frac{OS}{AB} = \frac{OC}{AC}$, при цьому $x \in (1, \infty)$. Звідси отримуємо $OS = xAB = xH$ и $OC = xAC \iff R_{\text{к}} = x(R_{\text{к}} - R) \iff R_{\text{к}} = \frac{x}{x-1} R$.

Тоді об'єм конуса $V_{\text{к}}$ виражається через x:

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi (R_{\text{к}})^2 H_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{(x-1)^2} xH = \frac{1}{3}(\pi R^2 H) \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

Приклади

П р и к л а д 6. Навколо циліндра об'єму V описано конус найменшого об'єму. Знайти об'єм конуса.



Р о з в' я з а н н я. Нехай $AO = R$ – радіус основи циліндра, $AB = H$ – висота циліндра, $H_к = OS$ – висота конуса, $R_к = OC$ – радіус основи конуса (див. осьовий переріз цих тіл на мал.), при цьому $V = \pi R^2 H$.

Позначимо через x коефіцієнт подібності трикутників SOC і BAC, тобто $x = \frac{OS}{AB} = \frac{OC}{AC}$, при цьому $x \in (1, \infty)$. Звідси отримуємо $OS = xAB = xH$ і $OC = xAC \iff R_к = x(R_к - R) \iff R_к = \frac{x}{x-1} R$.

Тоді об'єм конуса $V_к$ виражається через x:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi(R_к)^2 H_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{(x-1)^2} xH = \frac{1}{3}(\pi R^2 H)\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

Приклади

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ при $x\in(1,\infty)$. Оскільки за умовою задачі V – величина стала, то очевидно, що об'єм $V_{\text{к}}=\frac{1}{3}V\frac{x^3}{(x-1)^2}$ є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(x-1)^2-x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

На проміжку $(1,\infty)$ функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x=3$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Приклади

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ при $x \in (1, \infty)$. Оскільки за умовою задачі V – величина стала, то очевидно, що об’єм $V_к = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}$ є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1)^2 - x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

На проміжку $(1, \infty)$ функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x = 3$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y = f'(x)$.

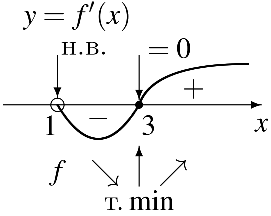
Приклади

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ при $x\in(1,\infty)$. Оскільки за умовою задачі V – величина стала, то очевидно, що об'єм $V_{\text{к}}=\frac{1}{3}V\frac{x^3}{(x-1)^2}$ є мінімальним, якщо функція $f(x)$ досягає свого найменшого значення.

Знаходимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(x-1)^2-x^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4}=\frac{3x^2\,(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^2\,(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}\,.$$



На проміжку $(1,\infty)$ функція $f(x)$ має єдину критичну точку $x=3$. В цій точці вона досягає свого найменшого значення, що підтверджує крива знаків для похідної $y=f'(x)$.

Приклади

Нарешті, знаходимо об'єм конуса за формулою

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}$

при $x = x_{\min} = 3$, а саме:

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{9}{4} V$.

Відповідь: $9V/4$.

Приклади

Нарешті, знаходимо об'єм конуса за формулою

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V \frac{x^3}{(x-1)^2}$

при $x = x_{\min} = 3$, а саме:

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V \frac{3^3}{(3-1)^2} = \frac{9}{4} V$.

Відповідь: $9V/4$.