

Стереометрія-4: Описана навколо піраміди куля

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 38 (частина перша)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. Крім того, за заданим одним із основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. Крім того, за заданим одним із основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Основні методи розв'язання геометричних задач

Продовжимо вивчення задач про знаходження основних параметрів правильної трикутної піраміди.

Нагадаємо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів. Крім того, за заданим одним із основних кутів правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

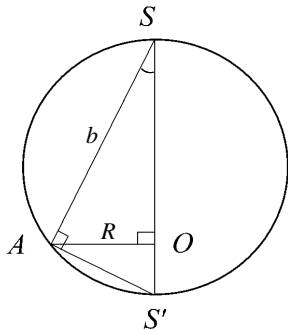
При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач (див. Урок 7);
- метод введення допоміжної невідомої (див. Урок 19).

Стандартна планіметрична задача, пов'язана з описаною навколо піраміди кулею

Розглянемо стандартну планіметричну задачу, пов'язану з описаною навколо правильної піраміди кулею.

Використаємо скорочений запис умови задачі та назви відповідних елементів піраміди.



Задача 3. Дано: $\triangle SAS'$, $\angle SAS' = 90^\circ$, AO – висота, $AS = b$, $AO = R$.

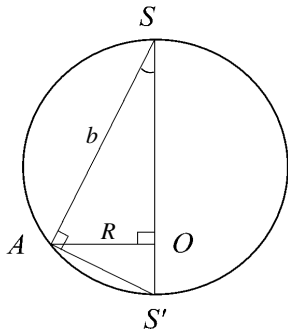
Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника SAS' (радіус кулі, описаної навколо піраміди).

Розв'язання. Зазначимо, що гіпотенуза SS' трикутника SAS' є діаметром кола, описаного навколо цього трикутника.

Стандартна планіметрична задача, пов'язана з описаною навколо піраміди кулею

Розглянемо стандартну планіметричну задачу, пов'язану з описаною навколо правильної піраміди кулею.

Використаємо скорочений запис умови задачі та назви відповідних елементів піраміди.

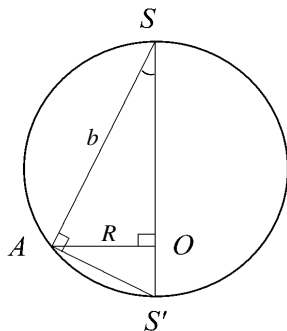


Задача 3. Дано: $\triangle SAS'$, $\angle SAS' = 90^\circ$, AO – висота, $AS = b$, $AO = R$.

Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника SAS' (радіус кулі, описаної навколо піраміди).

Розв'язання. Зазначимо, що гіпотенуза SS' трикутника SAS' є діаметром кола, описаного навколо цього трикутника.

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SAS'$ з $\triangle SOA$

$$\frac{AS}{SS'} = \cos \angle ASO = \frac{OS}{AS},$$

з яких випливає рівність

$$SS' = \frac{AS^2}{OS}. \quad (1)$$

Отже, шуканий радіус R_K виражається формулою

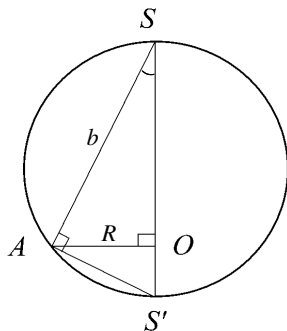
$$R_K = \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}}.$$

Зазначимо, що з рівності (1) випливає наступна формула для радіуса описаної навколо піраміди кулі:

$$R_K = \frac{b^2}{2H},$$

де b – бічне ребро і H – висота піраміди.

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SAS'$ з $\triangle SOA$

$$\frac{AS}{SS'} = \cos \angle ASO = \frac{OS}{AS},$$

з яких випливає рівність

$$SS' = \frac{AS^2}{OS}. \quad (1)$$

Отже, шуканий радіус R_K виражається формулою

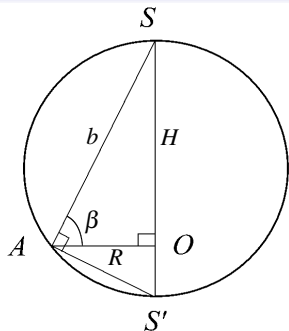
$$R_K = \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}}.$$

Зазначимо, що з рівності (1) випливає наступна формула для радіуса описаної навколо піраміди кулі:

$$R_K = \frac{b^2}{2H},$$

де b – бічне ребро і H – висота піраміди.

Формули для радіуса описаної кулі



Враховуючи співвідношення

$$H = b \sin \beta, \text{ з формули } R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2H}$$

отримуємо рівності

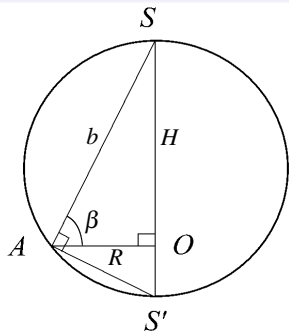
$$R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2b \sin \beta} = \frac{b}{2 \sin \beta}.$$

З останньої рівності, використовуючи співвідношення $R = b \cos \beta$, отримуємо також рівності

$$R_{\text{к}} = \frac{b \cos \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{R}{\sin 2\beta}.$$

Отримані формули для знаходження радіуса описаної кулі можуть бути використані також у випадку неправильних пірамід, що мають наступні властивості:

Формули для радіуса описаної кулі



Враховуючи співвідношення

$$H = b \sin \beta, \text{ з формули } R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2H}$$

отримуємо рівності

$$R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2b \sin \beta} = \frac{b}{2 \sin \beta}.$$

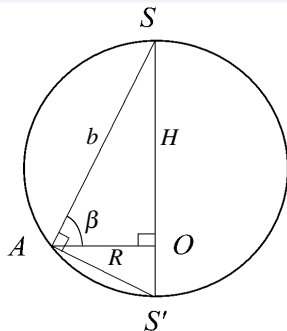
З останньої рівності, використовуючи співвідношення

$R = b \cos \beta$, отримуємо також рівності

$$R_{\text{к}} = \frac{b \cos \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{R}{\sin 2\beta}.$$

Отримані формули для знаходження радіуса описаної кулі можуть бути використані також у випадку неправильних пірамід, що мають наступні властивості:

Формули для радіуса описаної кулі



Враховуючи співвідношення

$$H = b \sin \beta, \text{ з формули } R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2H}$$

отримуємо рівності

$$R_{\text{к}} = \frac{b^2}{2b \sin \beta} = \frac{b}{2 \sin \beta}.$$

З останньої рівності, використовуючи співвідношення $R = b \cos \beta$, отримуємо також рівності

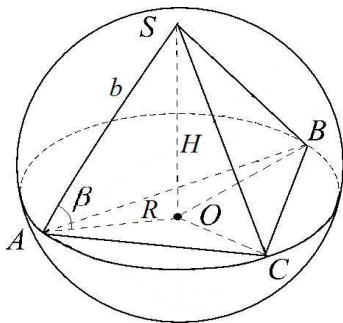
$$R_{\text{к}} = \frac{b \cos \beta}{2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{R}{\sin 2\beta}.$$

Отримані формули для знаходження радіуса описаної кулі можуть бути використані також у випадку неправильних пірамід, що мають наступні властивості:

Описана навколо піраміди куля

Усі бічні **ребра** піраміди рівні між собою тоді і тільки тоді, коли усі вони нахилені до площини основи під одним і тим же кутом β . При цьому навколо піраміди можна **описати** кулю

(радіуса R_k), центр якої лежить на прямій, що містить висоту піраміди, навколо основи піраміди можна описати коло (радіуса R), центр якого є основою висоти піраміди, і



$$\begin{aligned} SA &= b, & SO &= H, \\ AO &= R, & \angle SAO &= \beta \end{aligned}$$

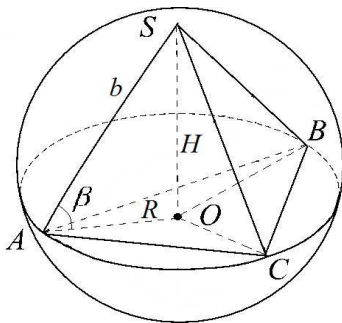
- $R_k = \frac{b^2}{2H} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\sin 2\beta},$
- $H = R \operatorname{tg} \beta = \sqrt{b^2 - R^2},$

де b – бічне ребро і H – висота піраміди.

Описана навколо піраміди куля

Усі бічні **ребра** піраміди рівні між собою тоді і тільки тоді, коли усі вони нахилені до площини основи під одним і тим же кутом β . При цьому навколо піраміди можна **описати** кулю

(радіуса R_k), центр якої лежить на прямій, що містить висоту піраміди, навколо основи піраміди можна описати коло (радіуса R), центр якого є основою висоти піраміди, і

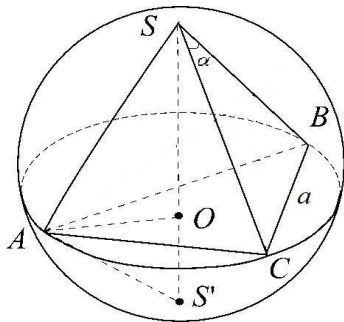


$$\begin{aligned} SA &= b, & SO &= H, \\ AO &= R, & \angle SAO &= \beta \end{aligned}$$

- $R_k = \frac{b^2}{2H} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\sin 2\beta},$
- $H = R \operatorname{tg} \beta = \sqrt{b^2 - R^2},$

де b – бічне ребро і H – висота піраміди.

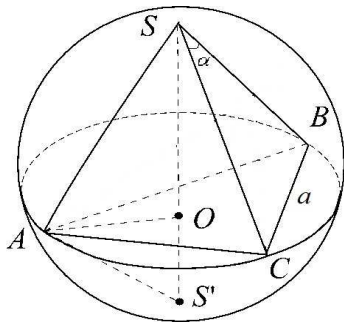
Приклади



Приклад 1. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і α – плоский кут при вершині піраміди. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Розв'язання. Повністю визначені рівносторонній трикутник ABC и рівнобедрений трикутник CSB . Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди. Позначимо через S' другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі (див. мал.). Тоді SS' – діаметр кулі.

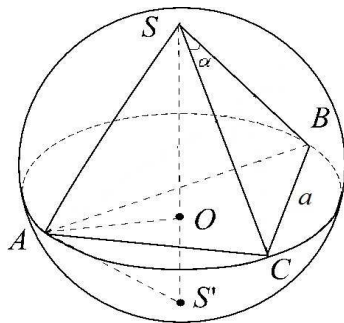
Приклади



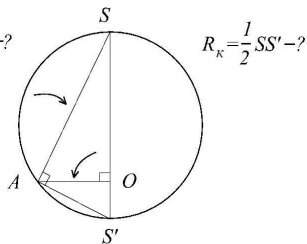
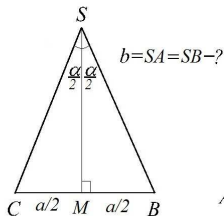
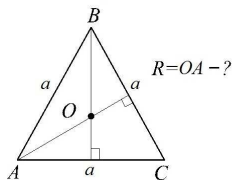
Приклад 1. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і α – плоский кут при вершині піраміди. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Розв'язання. Повністю визначені рівносторонній трикутник ABC і рівнобедрений трикутник CSB . Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди. Позначимо через S' другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі (див. мал.). Тоді SS' – діаметр кулі.

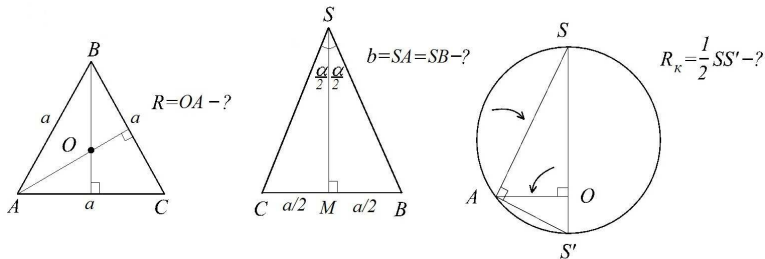
Приклади



Будемо шукати $R_K = \frac{1}{2}SS'$ в прямокутному трикутнику SAS' , де $\angle SAS' = 90^\circ$ (див. розглянуту вище стандартну планіметричну задачу 3). Для цього необхідно спочатку знайти $R = OA$ в рівносторонньому $\triangle ABC$ і $b = SA = SB$ в рівнобедреному $\triangle CSB$.



Приклади

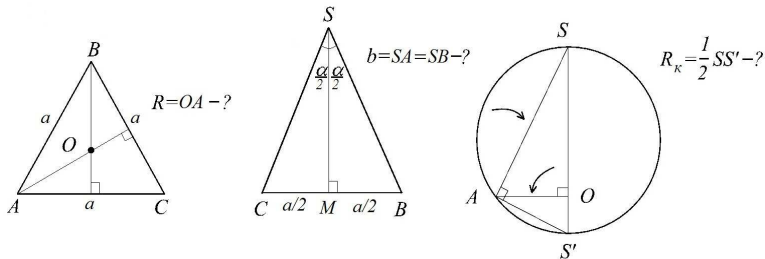


Отже:

- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :
 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{SB}$, звідки $b = SB = \frac{MB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = MB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;
- 3) в прямокутному $\triangle SAS'$ (див. задачу 3) знаходимо

$$R_K = \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} =$$

Приклади

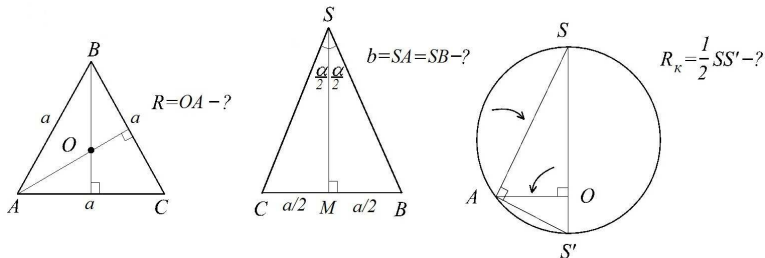


Отже:

- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :
 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{SB}$, звідки $b = SB = \frac{MB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = MB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;
- 3) в прямокутному $\triangle SAS'$ (див. задачу 3) знаходимо

$$R_k = \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} =$$

Приклади



Отже:

- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :
 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{MB}{SB}$, звідки $b = SB = \frac{MB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = MB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$;
- 3) в прямокутному $\triangle SAS'$ (див. задачу 3) знаходимо

$$R_K = \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} =$$

Приклади

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $R_K = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$

Приклади

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

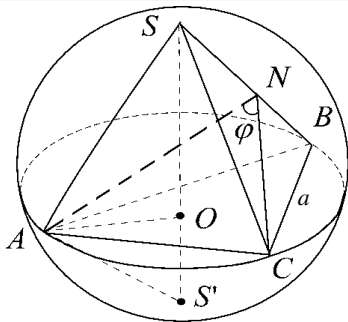
Відповідь: $R_K = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$

Приклади

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sqrt{\frac{a^2(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \\
 &= \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $R_K = \frac{\sqrt{3} a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$

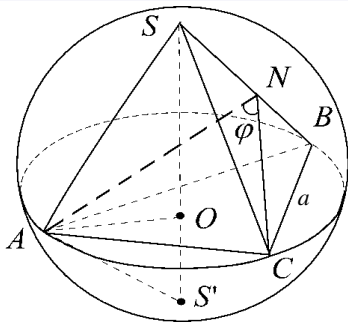
Приклади



Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Розв'язання. Повністю визначені рівносторонній трикутник ABC і рівнобедрений трикутник ANC , у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB . Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди. Позначимо через S' другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі (див. мал.). Тоді SS' – діаметр кулі.

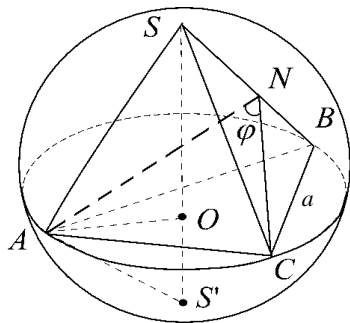
Приклади



Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знайти радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Розв’язання. Повністю визначені рівносторонній трикутник ABC і рівнобедрений трикутник ANC , у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB . Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди. Позначимо через S' другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі (див. мал.). Тоді SS' – діаметр кулі.

Приклади

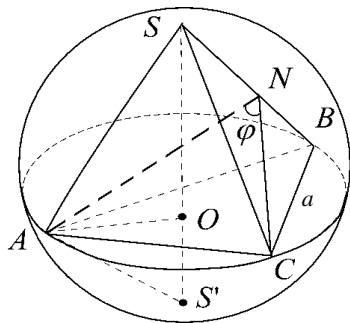


Будемо шукати $R_K = \frac{1}{2}SS'$ в прямокутному трикутнику SAS' , де $\angle SAS' = 90^\circ$ (див. розглянуту вище стандартну планіметричну задачу 3). Для цього необхідно спочатку знайти $R = OA$ (в рівносторонньому $\triangle ABC$) і $b = SA = SB$.

Бічне ребро SB можна знайти в трикутнику SBC (стандартна задача 1 з частини першої Уроку 7) або в трикутнику MSB , де M — середина AC (стандартна задача 2 з Уроку 19).

Розглянемо обидва способи.

Приклади

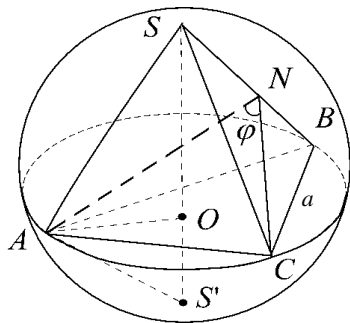


Будемо шукати $R_K = \frac{1}{2}SS'$ в прямокутному трикутнику SAS' , де $\angle SAS' = 90^\circ$ (див. розглянуту вище стандартну планіметричну задачу 3). Для цього необхідно спочатку знайти $R = OA$ (в рівносторонньому $\triangle ABC$) і $b = SA = SB$.

Бічне ребро SB можна знайти в трикутнику SBC (стандартна задача 1 з частини першої Уроку 7) або в трикутнику MSB , де M — середина AC (стандартна задача 2 з Уроку 19).

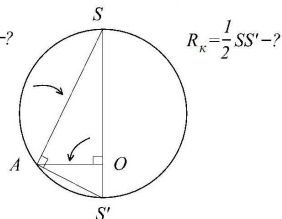
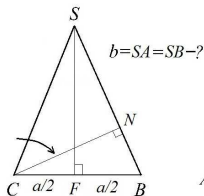
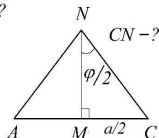
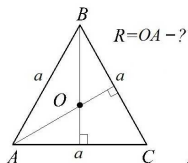
Розглянемо обидва способи.

Приклади

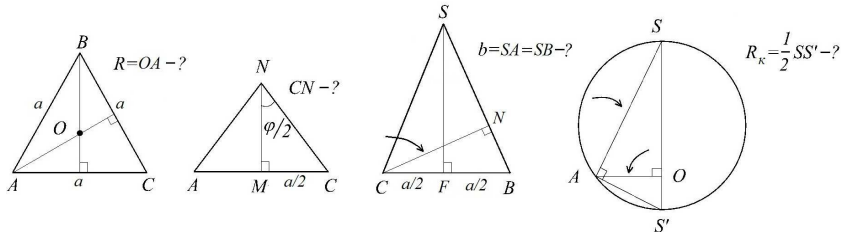


1-й спосіб. Щоб знайти SB , використовуючи трикутник SBC , необхідно спочатку знайти вираз відрізка CN в повністю визначеному трикутнику ANC .

Отже, в цьому випадку маємо **послідовне розв'язання чотирьох стандартних планіметричних задач**:



Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

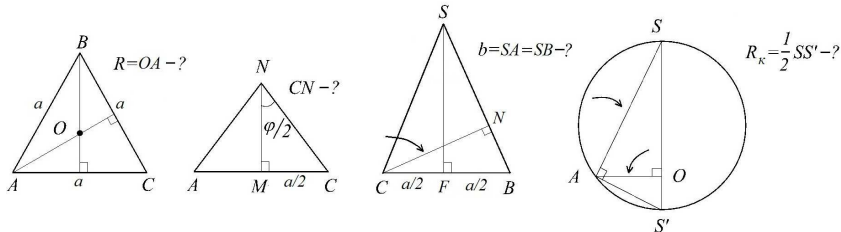
2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо CN :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}, \text{ звідки } CN = \frac{MC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}};$$

3) в трикутнику SBC знаходимо SB (стандартна задача 1 з частини першої Уроку 7):

$$b = SB = \frac{FB \cdot BC}{NB} = \frac{FB \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} =$$

Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

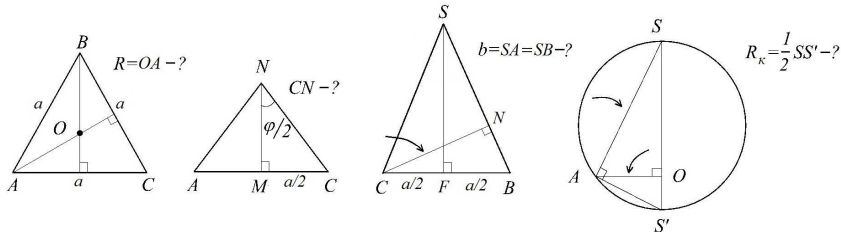
2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо CN :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}, \text{ звідки } CN = \frac{MC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}};$$

3) в трикутнику SBC знаходимо SB (стандартна задача 1 з частини першої Уроку 7):

$$b = SB = \frac{FB \cdot BC}{NB} = \frac{FB \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} =$$

Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо CN :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}, \text{ звідки } CN = \frac{MC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}};$$

3) в трикутнику SBC знаходимо SB (стандартна задача 1 з частини першої Уроку 7):

$$b = SB = \frac{FB \cdot BC}{NB} = \frac{FB \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} =$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2\sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2(3\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1))}{3(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\frac{2a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}} = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3} a \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}. \end{aligned}$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2\sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2(3\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1))}{3(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\frac{2a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}} = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3} a \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}. \end{aligned}$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2\sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2(3\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1))}{3(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\frac{2a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}} = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3} a \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}. \end{aligned}$$

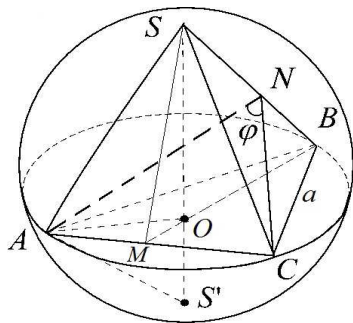
Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2\sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}};$$

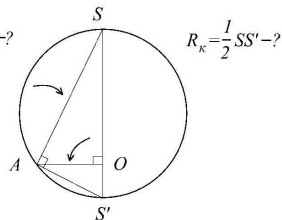
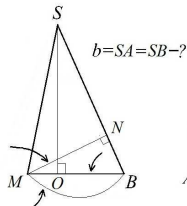
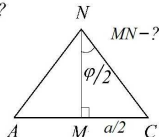
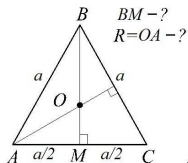
4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{2\sqrt{\frac{a^2(3\sin^2 \frac{\varphi}{2} - (4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1))}{3(4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}}} = \frac{\frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\frac{2a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}} = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3} a \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}. \end{aligned}$$

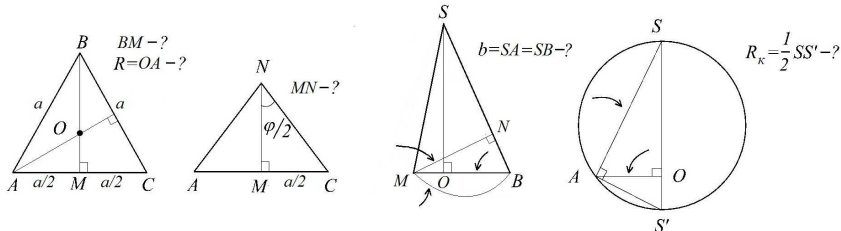
Приклади



2-й спосіб. При використанні трикутника MSB для знаходження бічного ребра SB розв'язання задачі зводиться до **послідовного розв'язання наступних чотирьох стандартних планіметричних задач**:



Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ и $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

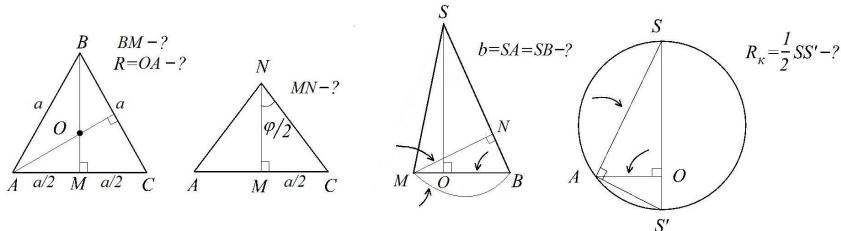
2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо MN :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}, \text{ звідки } MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2};$$

3) в трикутнику MSB знаходимо SB (стандартна задача 2 з Уроку 19):

$$b = SB = \frac{OB \cdot MB}{NB} = \frac{OB \cdot MB}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{\sqrt{\frac{3}{4} a^2 - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ и $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

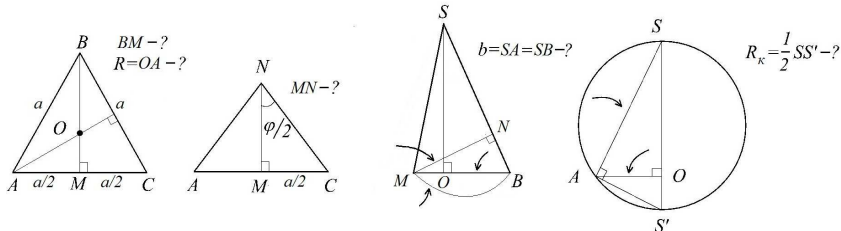
2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо MN :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}, \text{ звідки } MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2};$$

3) в трикутнику MSB знаходимо SB (стандартна задача 2 з Уроку 19):

$$b = SB = \frac{OB \cdot MB}{NB} = \frac{OB \cdot MB}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{\sqrt{\frac{3}{4} a^2 - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

Приклади



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $BM = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ и $OA = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a$;

2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо MN :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}, \text{ звідки } MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2};$$

3) в трикутнику MSB знаходимо SB (стандартна задача 2 з Уроку 19):

$$b = SB = \frac{OB \cdot MB}{NB} = \frac{OB \cdot MB}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{\sqrt{\frac{3}{4} a^2 - \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2(3 - (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}))}{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \\ &= \frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2(3 - (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}))}{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \\ &= \frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2(3 - (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}))}{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \\ &= \frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3} a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Приклади

$$= \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}};$$

4) в трикутнику SAS' , повторюючи розв'язання розглянутої стандартної задачі 3, отримуємо

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{1}{2} SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \\ &= \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2(3 - (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}))}{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \frac{\frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3(3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})}}} = \\ &= \frac{a^2}{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{2a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}. \end{aligned}$$

Приклади

Цілком природньо, що отримані при різних способах розв'язання вирази R_K відрізняються лише формою запису, що можна підтвердити тотожними перетвореннями відповідних тригонометричних виразів. Для запису відповіді ми використаємо один з отриманих виразів.

$$\text{Відповідь: } R_K = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Приклад 3. Радіус описаної навколо правильної трикутної піраміди кулі R_K , а двогранний кут при бічному ребрі піраміди – φ . Знайти площу перерізу піраміди, що проходить через ребро основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра.

Приклади

Цілком природньо, що отримані при різних способах розв'язання вирази R_K відрізняються лише формою запису, що можна підтвердити тотожними перетвореннями відповідних тригонометричних виразів. Для запису відповіді ми використаємо один з отриманих виразів.

$$\text{Відповідь: } R_K = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Приклад 3. Радіус описаної навколо правильної трикутної піраміди кулі R_K , а двогранний кут при бічному ребрі піраміди – φ . Знайти площу перерізу піраміди, що проходить через ребро основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра.

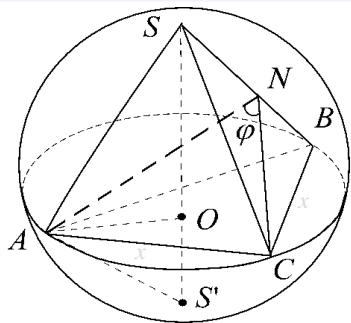
Приклади

Цілком природньо, що отримані при різних способах розв'язання вирази R_K відрізняються лише формою запису, що можна підтвердити тотожними перетвореннями відповідних тригонометричних виразів. Для запису відповіді ми використаємо один з отриманих виразів.

$$\text{Відповідь: } R_K = \frac{\sqrt{3}a}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Приклад 3. Радіус описаної навколо правильної трикутної піраміди кулі R_K , а двогранний кут при бічному ребрі піраміди – φ . Знайти площу перерізу піраміди, що проходить через ребро основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра.

Приклади



Розв'язання. Перерізом, про який йде мова в умові задачі, є рівнобедрений $\triangle ANC$, у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB .

Відзначимо, що в даній задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника.

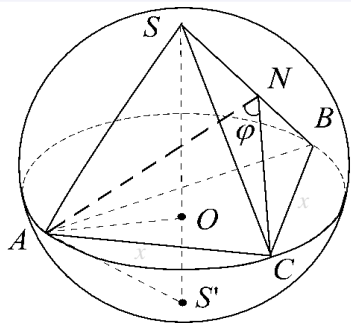
Для розв'язання задачі використаємо метод введення допоміжної невідомої.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Виражаючи R_K через сторону основи, отримуємо рівняння для знаходження x :

$$R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{мы скористались виразом, отриманим}$$

при розв'язання попереднього прикладу).

Приклади



Розв'язання. Перерізом, про який йде мова в умові задачі, є рівнобедрений $\triangle ANC$, у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB .

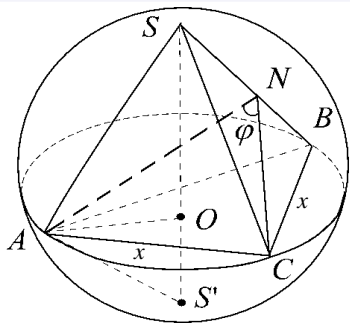
Відзначимо, що в даній задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника.

Для розв'язання задачі використаємо **метод введення допоміжної невідомої**.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Виражаючи R_K через сторону основи, отримуємо **рівняння** для знаходження x :

$$R_K = \frac{\sqrt{3}x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{мы скористались виразом, отриманим при розв'язання попереднього прикладу}).$$

Приклади



Розв'язання. Перерізом, про який йде мова в умові задачі, є рівнобедрений $\triangle ANC$, у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB .

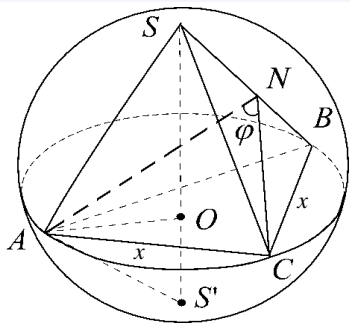
Відзначимо, що в даній задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника.

Для розв'язання задачі використаємо метод введення допоміжної невідомої.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Виражаючи R_K через сторону основи, отримуємо рівняння для знаходження x :

$$R_K = \frac{\sqrt{3}x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{мы скористались виразом, отриманим при розв'язання попереднього прикладу}).$$

Приклади



Розв'язання. Перерізом, про який йде мова в умові задачі, є рівнобедрений $\triangle ANC$, у якому $\angle ANC = \varphi$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SB .

Відзначимо, що в даній задачі не можна виділити жодного повністю визначеного трикутника.

Для розв'язання задачі використаємо **метод введення допоміжної невідомої**.

Нехай сторона основи піраміди $AC = x$. Виражаючи R_K через сторону основи, отримуємо **рівняння** для знаходження x :

$$R_K = \frac{\sqrt{3}x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}} \quad (\text{мы скористались виразом, отриманим}$$

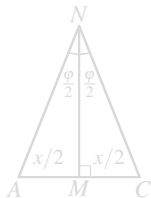
при розв'язання попереднього прикладу).

Приклади

Розв'язуючи рівняння $R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$,

отримуємо

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} R_K \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$



Площа перерізу ANC :

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MN, \text{ де } M - \text{середина } AC.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, то

$$MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Тоді площа перерізу

$$\begin{aligned} S_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

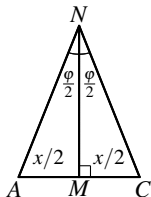
Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})$.

Приклади

Розв'язуючи рівняння $R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$,

отримуємо

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} R_K \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$



Площа перерізу ANC :

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MN, \text{ де } M - \text{середина } AC.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, то

$$MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Тоді площа перерізу

$$\begin{aligned} S_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

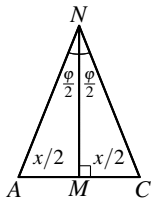
Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})$.

Приклади

Розв'язуючи рівняння $R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$,

отримуємо

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} R_K \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$



Площа перерізу ANC :

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MN, \text{ де } M - \text{середина } AC.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, то

$$MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Тоді площа перерізу

$$\begin{aligned} S_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

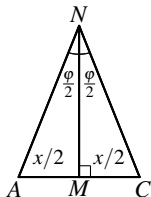
Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})$.

Приклади

Розв'язуючи рівняння $R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$,

отримуємо

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} R_K \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$



Площа перерізу ANC :

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MN, \text{ де } M - \text{середина } AC.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, то

$$MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Тоді площа перерізу

$$\begin{aligned} S_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

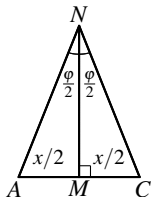
Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})$.

Приклади

Розв'язуючи рівняння $R_K = \frac{\sqrt{3} x}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}}$,

отримуємо

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} R_K \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}}.$$



Площа перерізу ANC :

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{2} AC \cdot MN, \text{ де } M - \text{середина } AC.$$

Оскільки $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, то

$$MN = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

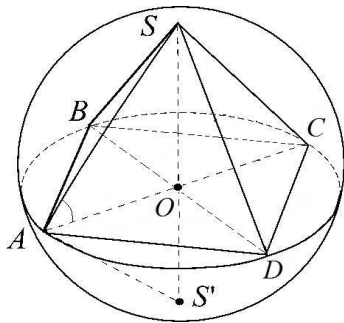
Тоді площа перерізу

$$\begin{aligned} S_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} AC \cdot MN = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

Відповідь: $S_{\text{пер}} = \frac{1}{3} (R_K)^2 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} (3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2})$.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2010 р.). Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом 60° . Обчисліть площу S сфери, описаної навколо піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

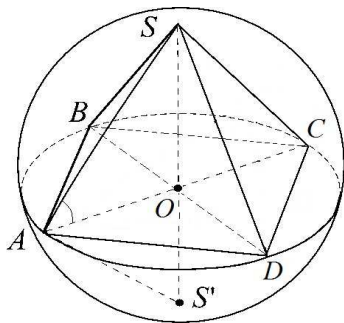


Розв'язання. Основою піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = 6$. Висота піраміди опускається в точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ – точку O . Кут нахилу бічного ребра SA до площини основи піраміди – це $\angle SAO = 60^\circ$.

Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди.

Приклади із ЗНО

Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2010 р.). Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом 60° . Обчисліть площу S сфери, описаної навколо піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

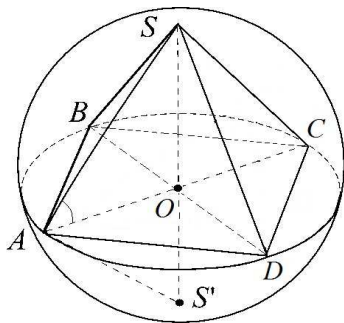


Розв'язання. Основою піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = 6$. Висота піраміди опускається в точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ – точку O . Кут нахилу бічного ребра SA до площини основи піраміди – це $\angle SAO = 60^\circ$.

Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди.

Приклади із ЗНО

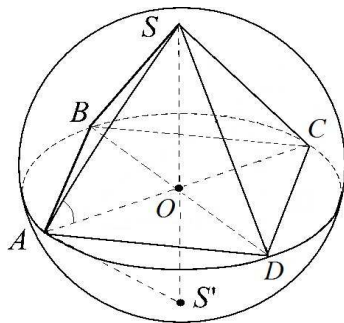
Приклад 4 (Пробне тестування ЗНО, 2010 р.). Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6. Бічне ребро піраміди нахилене до площини її основи під кутом 60° . Обчисліть площу S сфери, описаної навколо піраміди. У відповідь запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.



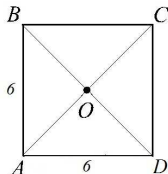
Розв'язання. Основою піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = 6$. Висота піраміди опускається в точку перетину діагоналей квадрата $ABCD$ – точку O . Кут нахилу бічного ребра SA до площини основи піраміди – це $\angle SAO = 60^\circ$.

Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди.

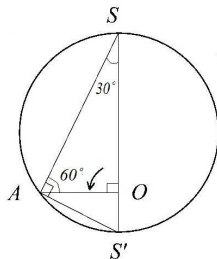
Приклади із ЗНО



Позначимо через S' другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі. Тоді SS' – діаметр кулі. Будемо шукати $R_K = \frac{1}{2}SS'$ в прямокутному трикутнику SAS' , у якому $\angle SAS' = 90^\circ$. Для цього необхідно спочатку знайти половину OA діагоналі квадрата $ABCD$.

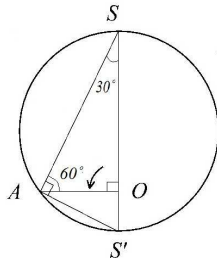
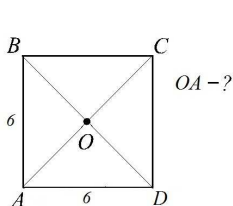


$OA = ?$



$$R_K = \frac{1}{2}SS' - ?$$

Приклади із ЗНО



$$R_K = \frac{1}{2} SS' - ?$$

Отже, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} AB = 3\sqrt{2}$.

Оскільки $\angle ASO = 30^\circ$, то $SA = 2 OA = 6\sqrt{2}$. Далі, використовуючи співвідношення $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$,

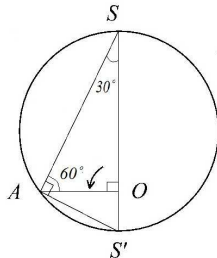
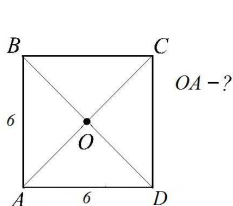
$$\text{отримуємо } SS' = \frac{SA}{\cos 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}.$$

Отже, $R_K = \frac{1}{2} SS' = 2\sqrt{6}$.

Нарешті, площа сфери $S = 4\pi (R_K)^2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 6 = 96\pi$ і $\frac{S}{\pi} = 96$.

Відповідь: 96.

Приклади із ЗНО



$$R_K = \frac{1}{2} SS' - ?$$

Отже, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} AB = 3\sqrt{2}$.

Оскільки $\angle ASO = 30^\circ$, то $SA = 2OA = 6\sqrt{2}$. Далі, використовуючи співвідношення $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$,

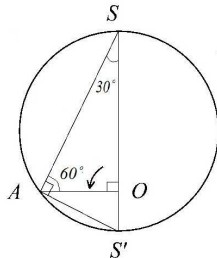
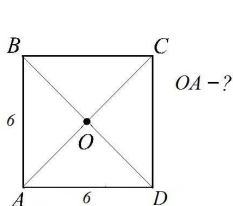
$$\text{отримуємо } SS' = \frac{SA}{\cos 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}.$$

Отже, $R_K = \frac{1}{2} SS' = 2\sqrt{6}$.

Нарешті, площа сфери $S = 4\pi(R_K)^2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 6 = 96\pi$ і $\frac{S}{\pi} = 96$.

Відповідь: 96.

Приклади із ЗНО



$$R_K = \frac{1}{2} SS' - ?$$

Отже, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} AB = 3\sqrt{2}$.

Оскільки $\angle ASO = 30^\circ$, то $SA = 2OA = 6\sqrt{2}$. Далі, використовуючи співвідношення $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$,

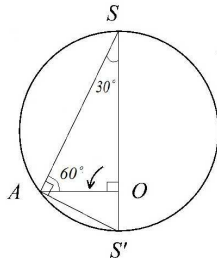
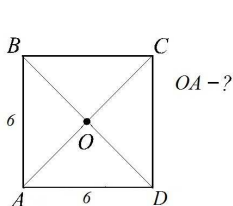
$$\text{отримуємо } SS' = \frac{SA}{\cos 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}.$$

Отже, $R_K = \frac{1}{2} SS' = 2\sqrt{6}$.

Нарешті, площа сфери $S = 4\pi(R_K)^2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 6 = 96\pi$ і $\frac{S}{\pi} = 96$.

Відповідь: 96.

Приклади із ЗНО



$$R_K = \frac{1}{2} SS' - ?$$

Отже, $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{2} AB = 3\sqrt{2}$.

Оскільки $\angle ASO = 30^\circ$, то $SA = 2OA = 6\sqrt{2}$. Далі, використовуючи співвідношення $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$,

$$\text{отримуємо } SS' = \frac{SA}{\cos 30^\circ} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 4\sqrt{6}.$$

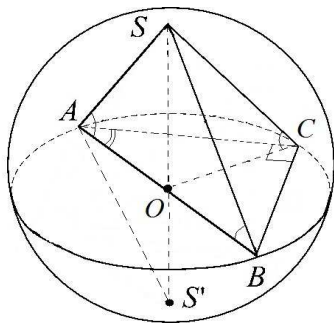
Отже, $R_K = \frac{1}{2} SS' = 2\sqrt{6}$.

Нарешті, площа сфери $S = 4\pi(R_K)^2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 6 = 96\pi$ і $\frac{S}{\pi} = 96$.

Відповідь: 96.

Приклади із ЗНО

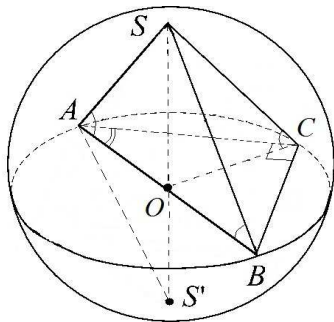
Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом 15° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6. Обчисліть об'єм піраміди (в см^3).



Розв'язання. Нехай в основі піраміди $SABC$ лежить прямокутний $\triangle ACB$, у якому $\angle C = 90^\circ$ і $\angle A = 15^\circ$. Оскільки всі бокові ребра піраміди нахилені до площини основи під одним кутом, то висота піраміди SO опускається в центр описаного навколо основи кола – середину гіпотенузи – точку O . Тому $\angle SAO = 60^\circ$ і $\angle ASO = 30^\circ$.

Приклади із ЗНО

Приклад 5 (Пробне тестування ЗНО, 2011 р.). В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з кутом 15° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Радіус кулі, описаної навколо піраміди, дорівнює 6. Обчисліть об'єм піраміди (в см^3).

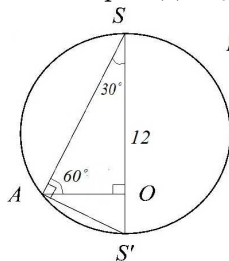
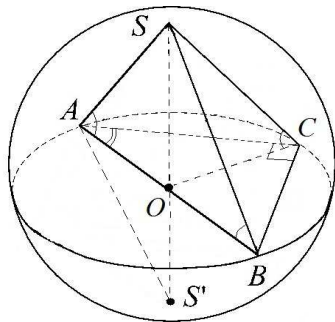


Розв'язання. Нехай в основі піраміди $SABC$ лежить прямокутний $\triangle ACB$, у якому $\angle C = 90^\circ$ і $\angle A = 15^\circ$. Оскільки всі бокові ребра піраміди нахилені до площини основи під одним кутом, то висота піраміди SO опускається в центр описаного навколо основи кола – середину гіпотенузи – точку O . Тому $\angle SAO = 60^\circ$ і $\angle ASO = 30^\circ$.

Приклади із ЗНО

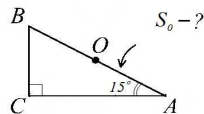
Центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту SO піраміди. Позначимо через S'

другу точку перетину прямої SO з поверхнею кулі. Тоді діаметр кулі $SS' = 12$. Використаємо прямокутний $\triangle SAS'$, де $\angle SAS' = 90^\circ$, для знаходження висоти піраміди $H = SO$ і відрізка AO , після чого обчислимо площу основи піраміди S_0 .

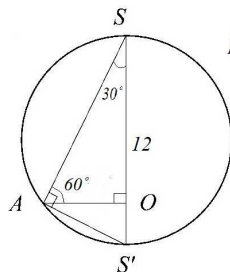


$$H = SO = ?$$

$$OA = ?$$



Приклади із ЗНО



$H=SO-?$
 $OA-?$

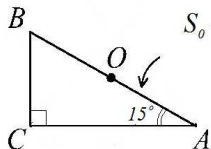
В $\triangle SAS'$ маємо співвідношення
 $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$, звідки знаходимо

$$SA = SS' \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Тепер в $\triangle SOA$ обчислюємо катети:

$$\cos 30^\circ = \frac{SO}{SA}, \text{ звідки } SO = SA \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (см);}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{OA}{SA}, \text{ звідки } OA = SA \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$



$S_0-?$

Тоді в $\triangle ACB$ гіпотенуза

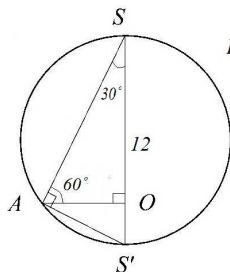
$$AB = 2 OA = 6\sqrt{3} \text{ (см)} \text{ і катети}$$

$$BC = AB \sin 15^\circ = 6\sqrt{3} \sin 15^\circ \text{ (см),}$$

$$AC = AB \cos 15^\circ = 6\sqrt{3} \cos 15^\circ \text{ (см). Тому}$$

$$S_0 = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \sin 15^\circ \cdot 6\sqrt{3} \cos 15^\circ = 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \sin 30^\circ = 27 \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{2} \text{ (см}^2\text{).}$$

Приклади із ЗНО



$H=SO-?$
 $OA-?$

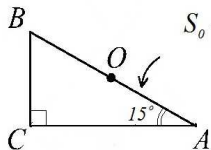
В $\triangle SAS'$ маємо співвідношення
 $\cos 30^\circ = \frac{SA}{SS'}$, звідки знаходимо

$$SA = SS' \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см).}$$

Тепер в $\triangle SOA$ обчислюємо катети:

$$\cos 30^\circ = \frac{SO}{SA}, \text{ звідки } SO = SA \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9 \text{ (см);}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{OA}{SA}, \text{ звідки } OA = SA \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (см).}$$



$S_0-?$

Тоді в $\triangle ACB$ гіпотенуза

$$AB = 2 OA = 6\sqrt{3} \text{ (см)} \text{ і катети}$$

$$BC = AB \sin 15^\circ = 6\sqrt{3} \sin 15^\circ \text{ (см),}$$

$$AC = AB \cos 15^\circ = 6\sqrt{3} \cos 15^\circ \text{ (см). Тому}$$

$$S_0 = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \sin 15^\circ \cdot 6\sqrt{3} \cos 15^\circ = 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \sin 30^\circ = 27 \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{2} \text{ (см}^2\text{).}$$

Приклади із ЗНО

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 40,5 .

Приклади із ЗНО

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{2} \cdot 9 = \frac{81}{2} = 40,5 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 40,5 .