

Планіметрія-1: Трикутник

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

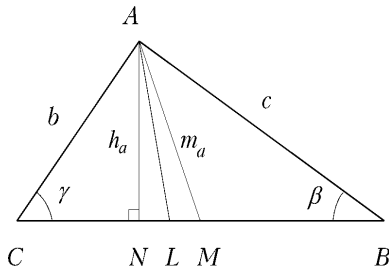
Урок 5 (частина перша)



Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

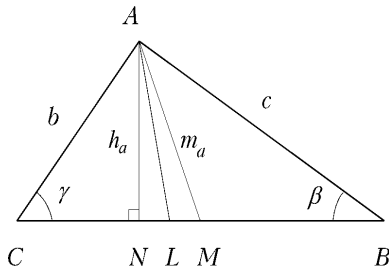
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

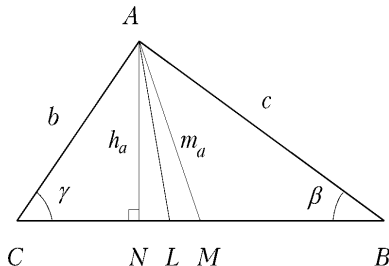
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

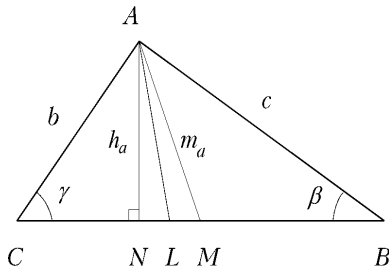
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

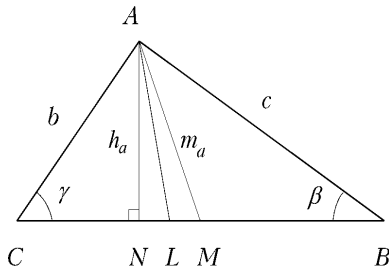
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

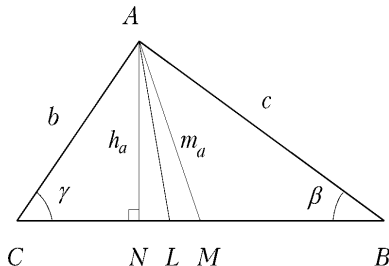
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

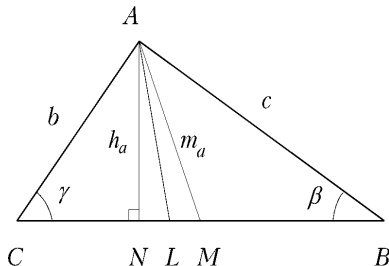
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

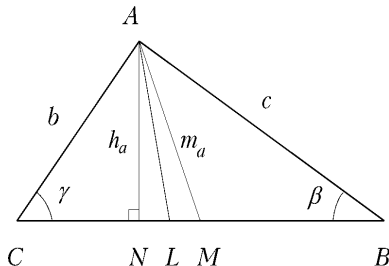
Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

Трикутник (основні параметри)



Використовуються
стандартні позначення
основних параметрів
трикутника ABC :

- a ($a = BC$), b , c – сторони трикутника,
- α ($\alpha = \angle A$), β , γ – протилежні їм кути,
- h_a, m_a, l_a ($l_a = AL$) – відповідно висота, медіана і бісектриса, проведені до сторони a ,
- P, p – відповідно периметр і напівпериметр трикутника,
- S – його площа,
- r – радіус кола, вписаного в трикутник,
- R – радіус кола, описаного навколо нього.

Трикутник (основні співвідношення)

$$1) \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

$$2) a < b + c \quad (\text{нерівність трикутника}),$$

$$3) P = a + b + c, \quad p = \frac{1}{2}P,$$

$$4) S = \frac{1}{2}ah_a, \quad S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

$$5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{формула Герона}),$$

$$6) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{теорема косинусів}),$$

$$7) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (\text{теорема синусів}),$$

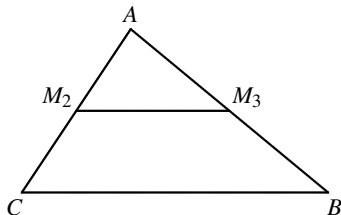
$$8) R = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad R = \frac{abc}{4S},$$

$$9) r = \frac{2S}{P}.$$

Трикутник (важливі властивості)

Відзначимо наступні властивості трикутника:

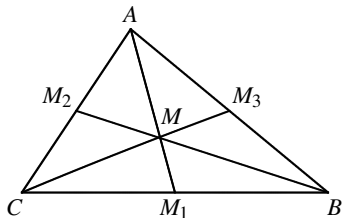
- середня лінія трикутника паралельна відповідній основі і дорівнює половині цієї основи, тобто



$$M_2M_3 = \frac{1}{2}BC;$$

Трикутник (важливі властивості)

- медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожную з них у відношенні 2:1, починаючи від відповідної вершини, тобто



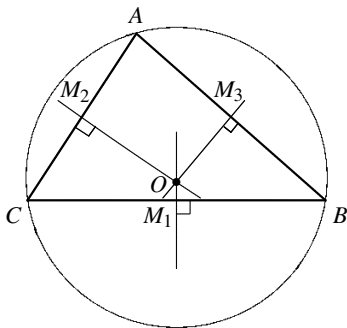
$$AM : MM_1 = 2 : 1 ,$$

$$BM : MM_2 = 2 : 1 ,$$

$$CM : MM_3 = 2 : 1 ;$$

Трикутник (важливі властивості)

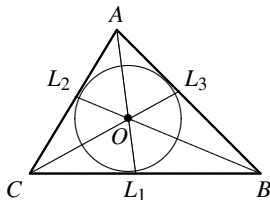
- серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром кола, описаного навколо трикутника;



O – центр описаного
кола

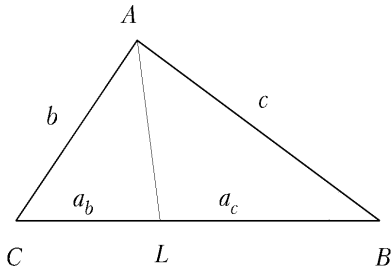
Трикутник (важливі властивості)

- бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром кола, вписанного в трикутник.



O – центр вписанного
кола

Трикутник (важливі властивості)



Відзначимо також **основну властивість бісектриси AL трикутника ABC** :

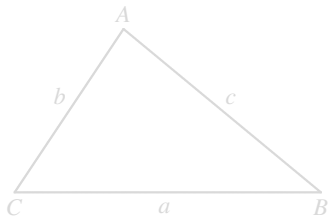
- бісектриса ділить сторону на відрізки, пропорційні прилеглим бічним сторонам, тобто

$$\boxed{\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}},$$

де $a_b = CL$, $a_c = BL$.

Трикутник (стандартні задачі)

Трикутник **повністю визначений** (або **повністю заданий**), якщо за заданими параметрами однозначно визначаються всі його параметри. Як правило, трикутник повністю визначається **трьома** своїми параметрами, з яких хоча б один не є кутом.



Приклад 1. Задано сторони a, b, c трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо периметр

$P = a + b + c$ і напівпериметр $p = (a + b + c)/2$.

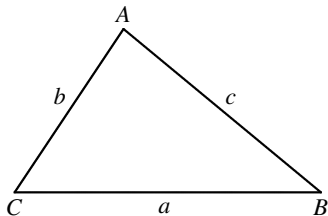
Тепер площа знаходиться за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

після чого знаходимо радіуси r і R : $r = \frac{2S}{P}$ і $R = \frac{abc}{4S}$.

Трикутник (стандартні задачі)

Трикутник **повністю визначений** (або **повністю заданий**), якщо за заданими параметрами однозначно визначаються всі його параметри. Як правило, трикутник повністю визначається **трьома** своїми параметрами, з яких хоча б один не є кутом.



Приклад 1. Задано сторони a, b, c трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо периметр

$P = a + b + c$ і напівпериметр $p = (a + b + c)/2$.

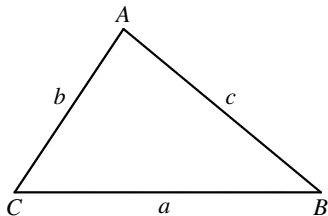
Тепер площа знаходиться за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

після чого знаходимо радіуси r і R : $r = \frac{2S}{P}$ і $R = \frac{abc}{4S}$.

Трикутник (стандартні задачі)

Трикутник **повністю визначений** (або **повністю заданий**), якщо за заданими параметрами однозначно визначаються всі його параметри. Як правило, трикутник повністю визначається **трьома** своїми параметрами, з яких хоча б один не є кутом.



Приклад 1. Задано сторони a, b, c трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо периметр

$P = a + b + c$ і напівпериметр $p = (a + b + c)/2$.

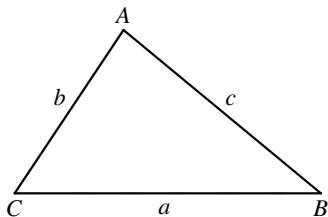
Тепер площа знаходиться за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

після чого знаходимо радіуси r і R : $r = \frac{2S}{P}$ і $R = \frac{abc}{4S}$.

Трикутник (стандартні задачі)

Трикутник **повністю визначений** (або **повністю заданий**), якщо за заданими параметрами однозначно визначаються всі його параметри. Як правило, трикутник повністю визначається **трьома** своїми параметрами, з яких хоча б один не є кутом.



Приклад 1. Задано сторони a, b, c трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо периметр

$P = a + b + c$ і напівпериметр $p = (a + b + c)/2$.

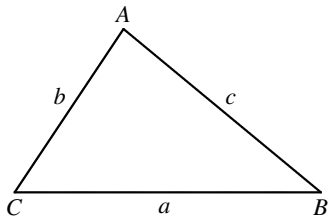
Тепер площа знаходиться за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

після чого знаходимо радіуси r і R : $r = \frac{2S}{P}$ і $R = \frac{abc}{4S}$.

Трикутник (стандартні задачі)

Трикутник **повністю визначений** (або **повністю заданий**), якщо за заданими параметрами однозначно визначаються всі його параметри. Як правило, трикутник повністю визначається **трьома** своїми параметрами, з яких хоча б один не є кутом.



Приклад 1. Задано сторони a, b, c трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо периметр

$P = a + b + c$ і напівпериметр $p = (a + b + c)/2$.

Тепер площа знаходиться за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

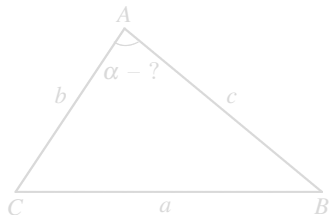
після чого знаходимо радіуси r і R : $r = \frac{2S}{P}$ і $R = \frac{abc}{4S}$.

Трикутник (стандартні задачі)

Використовуючи співвідношення $S = \frac{1}{2}ah_a$ і формулу

Герона, знаходимо висоту:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Кути трикутника знаходяться з використанням теореми косинусів. Наприклад, із співвідношення

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

знаходимо

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ звідки } \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

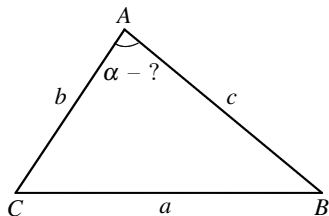
Наведемо формули для знаходження медіани і бісектриси.

Трикутник (стандартні задачі)

Використовуючи співвідношення $S = \frac{1}{2}ah_a$ і формулу

Герона, знаходимо висоту:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Кути трикутника знаходяться з використанням теореми косинусів. Наприклад, із співвідношення

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

знаходимо

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ звідки } \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

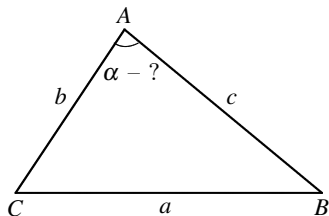
Наведемо формули для знаходження медіани і бісектриси.

Трикутник (стандартні задачі)

Використовуючи співвідношення $S = \frac{1}{2}ah_a$ і формулу

Герона, знаходимо висоту:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Кути трикутника знаходяться з використанням теореми косинусів. Наприклад, із співвідношення

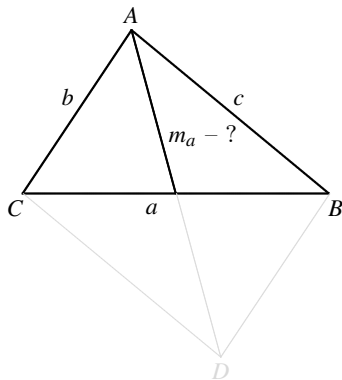
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

знаходимо

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ звідки } \alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Наведемо формули для знаходження медіани і бісектриси.

Трикутник (стандартні задачі)



Для знаходження **медіани** m_a розглянемо паралелограм $ABDC$, побудований на сторонах b і c трикутника.

Скористаємося властивістю: у паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх сторін:

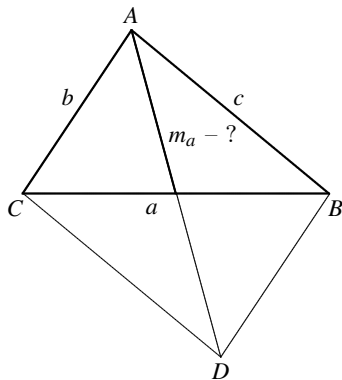
$d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$, де однією діагоналлю паралелограма

$ABDC$ є сторона a , тобто $d_1 = a$, а інша діагональ дорівнює подвоєній медіані m_a , тобто $d_2 = 2m_a$.

Звідси отримуємо формулу для знаходження медіани:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Трикутник (стандартні задачі)



Для знаходження **медіани** m_a розглянемо паралелограм $ABDC$, побудований на сторонах b і c трикутника.

Скористаємося властивістю: у паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх сторін:

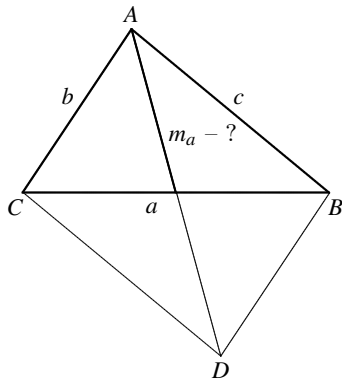
$d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$, де однією діагоналлю паралелограма

$ABDC$ є сторона a , тобто $d_1 = a$, а інша діагональ дорівнює подвоєній медіані m_a , тобто $d_2 = 2m_a$.

Звідси отримуємо формулу для знаходження медіани:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Трикутник (стандартні задачі)



Для знаходження **медіани** m_a розглянемо паралелограм $ABDC$, побудований на сторонах b і c трикутника.

Скористаємося властивістю: **у паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх сторін**:

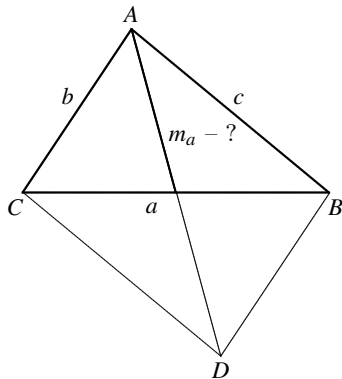
$d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$, де однією діагоналлю паралелограма

$ABDC$ є сторона a , тобто $d_1 = a$, а інша діагональ дорівнює подвоєній медіані m_a , тобто $d_2 = 2m_a$.

Звідси отримуємо формулу для знаходження медіани:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Трикутник (стандартні задачі)



Для знаходження **медіани** m_a розглянемо паралелограм $ABDC$, побудований на сторонах b і c трикутника.

Скористаємося властивістю: **у паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів всіх сторін**:

$d_1^2 + d_2^2 = 2(b^2 + c^2)$, де однією діагоналлю паралелограма

$ABDC$ є сторона a , тобто $d_1 = a$, а інша діагональ дорівнює подвоєній медіані m_a , тобто $d_2 = 2m_a$.

Звідси отримуємо формулу для знаходження медіани:

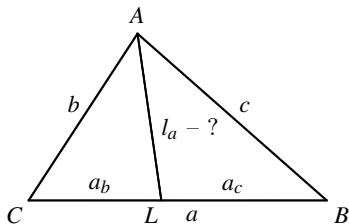
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Трикутник (стандартні задачі)

Для знаходження **бісектриси** l_a ,

спочатку розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}, \\ a_b + a_c = a \end{cases} \quad (1)$$



з невідомими a_b і a_c .

В результаті отримаємо вирази цих відрізків через сторони a, b, c :

$$a_b = \frac{ab}{b+c}, \quad a_c = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

(підставляючи ці вирази в систему (1), легко переконатися, що (2) є її розв'язками).

Тепер бісектриса знаходиться за формулою

$$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c},$$

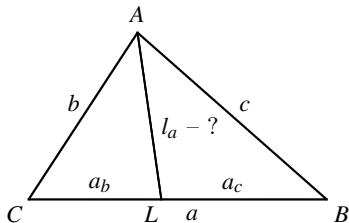
де a_b і a_c виражаються рівностями (2).

Трикутник (стандартні задачі)

Для знаходження **бісектриси** l_a ,

спочатку розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}, \\ a_b + a_c = a \end{cases} \quad (1)$$



з невідомими a_b і a_c .

В результаті отримаємо вирази цих відрізків через сторони a, b, c :

$$a_b = \frac{ab}{b+c}, \quad a_c = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

(підставляючи ці вирази в систему (1), легко переконатися, що (2) є її розв'язками).

Тепер бісектриса знаходиться за формулою

$$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c},$$

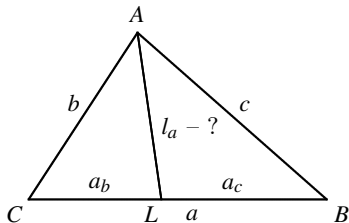
де a_b і a_c виражаються рівностями (2).

Трикутник (стандартні задачі)

Для знаходження **бісектриси** l_a ,

спочатку розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}, \\ a_b + a_c = a \end{cases} \quad (1)$$



з невідомими a_b і a_c .

В результаті отримаємо вирази цих відрізків через сторони a, b, c :

$$a_b = \frac{ab}{b+c}, \quad a_c = \frac{ac}{b+c} \quad (2)$$

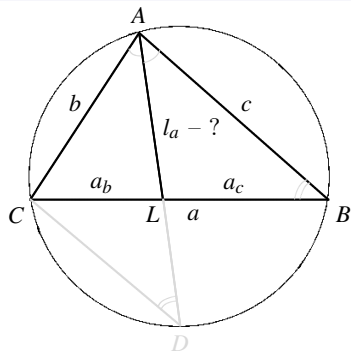
(підставляючи ці вирази в систему (1), легко переконатися, що (2) є її розв'язками).

Тепер бісектриса знаходиться за формулою

$$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c},$$

де a_b і a_c виражаються рівностями (2).

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC ,

продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

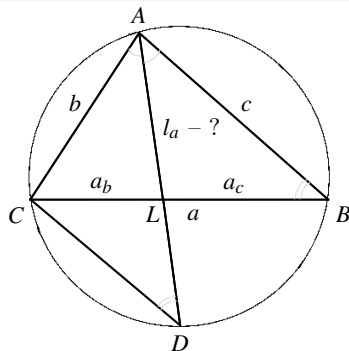
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

Отже, $bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c$,

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC , продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

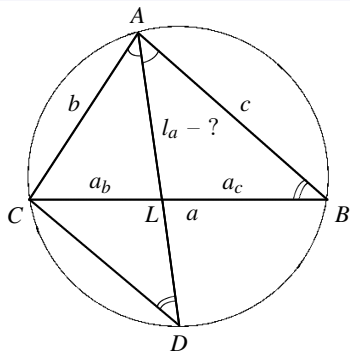
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

$$\text{Отже, } bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c,$$

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC , продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

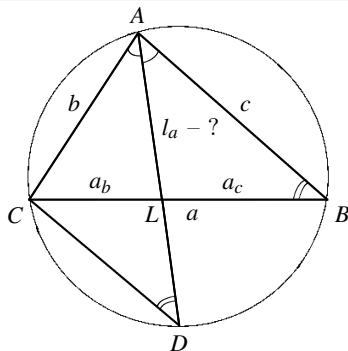
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

Отже, $bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c$,

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC , продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

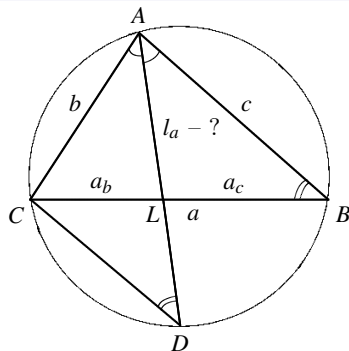
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

Отже, $bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c$,

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC , продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

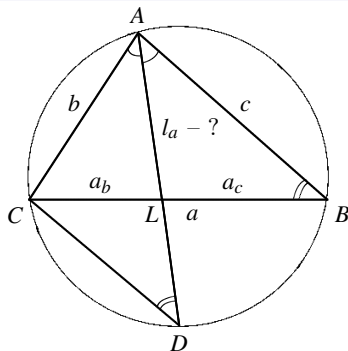
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

$$\text{Отже, } bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c,$$

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Для доведення рівності

$l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$ опишемо коло навколо трикутника ABC , продовжимо бісектрису AL до перетину з колом в точці D і розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle ALB$.

Вони подібні за ознакою подібності трикутників за двома кутами.

Дійсно, $\angle CAL = \angle LAB$, оскільки

LA – бісектриса кута A , і

$\angle ADC = \angle ABC$ як кути, що спираються на одну хорду AC .

Тому

$$\frac{AC}{AL} = \frac{AD}{AB}, \text{ тобто } \frac{b}{l_a} = \frac{l_a + LD}{c} \Leftrightarrow bc = l_a^2 + l_a \cdot LD.$$

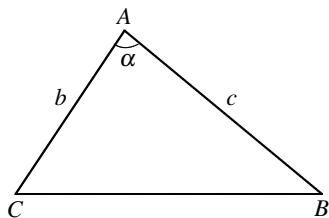
Оскільки хорди AD і CB перетинаються, то $l_a \cdot LD = a_b a_c$.

$$\text{Отже, } bc = l_a^2 + l_a \cdot LD \Leftrightarrow bc = l_a^2 + a_b a_c \Leftrightarrow l_a^2 = bc - a_b a_c,$$

звідки отримуємо формулу $l_a = \sqrt{bc - a_b a_c}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 2. Задано сторони b, c і кут α трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

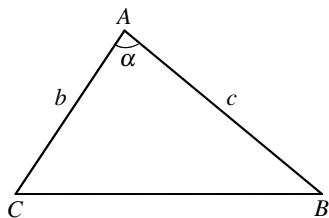
Розв'язання. Перш за все, знаходимо третю сторону за

теоремою косинусів: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

Тепер, коли відомі всі сторони трикутника, можна використовувати всі формули з попереднього прикладу. Проте, для знаходження ряду параметрів є більш зручні в даному випадку співвідношення.

Так, простіше, ніж у попередньому прикладі, знаходиться площа трикутника: $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, а також його висоти і радіус вписаного кола, при знаходженні яких використовується знайдений параметр S .

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 2. Задано сторони b, c і кут α трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

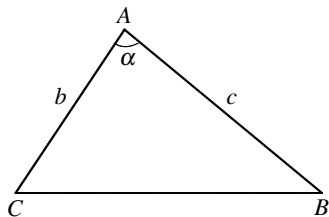
Розв'язання. Перш за все, знаходимо третю сторону за

теоремою косинусів: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

Тепер, коли відомі всі сторони трикутника, можна використовувати всі формули з попереднього прикладу. Проте, для знаходження ряду параметрів є більш зручні в даному випадку співвідношення.

Так, простіше, ніж у попередньому прикладі, знаходиться площа трикутника: $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, а також його висоти і радіус вписаного кола, при знаходженні яких використовується знайдений параметр S .

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 2. Задано сторони b, c і кут α трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Перш за все, знаходимо третю сторону за

теоремою косинусів: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$.

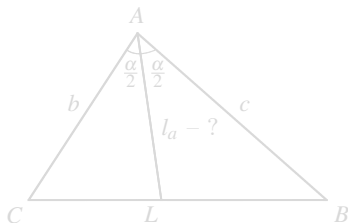
Тепер, коли відомі всі сторони трикутника, можна використовувати всі формули з попереднього прикладу. Проте, для знаходження ряду параметрів є більш зручні в даному випадку співвідношення.

Так, простіше, ніж у попередньому прикладі, знаходиться площа трикутника: $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$, а також його висоти і радіус вписаного кола, при знаходженні яких використовується знайдений параметр S .

Трикутник (стандартні задачі)

Радіус описаного кола знаходимо за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$



Нарешті, легше, ніж у попередньому прикладі, знаходимо бісектрису l_a кута α :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Для доведення формули (3) запишемо площі

трикутників CAL і BAL : $S_{CAL} = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2}$, $S_{BAL} = \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2}$,

які в сумі дають площу трикутника ABC : $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. У такий

спосіб, використовуючи рівність $S_{CAL} + S_{BAL} = S$, отримуємо

$\frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Leftrightarrow l_a(b+c) \sin \frac{\alpha}{2} = bc \sin \alpha$. Звідси, враховуючи формулу синуса подвійного кута: $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

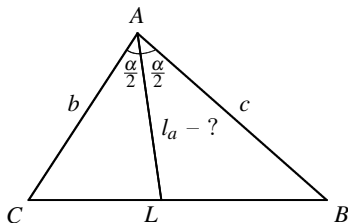
знаходимо бісектрису: $l_a = \frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)

Радіус описаного кола знаходимо за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$



Нарешті, легше, ніж у попередньому прикладі, знаходимо бісектрису l_a кута α :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Для доведення формули (3) запишемо площі

трикутників CAL і BAL : $S_{CAL} = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2}$, $S_{BAL} = \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2}$,

які в сумі дають площу трикутника ABC : $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. У такий

спосіб, використовуючи рівність $S_{CAL} + S_{BAL} = S$, отримуємо

$\frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Leftrightarrow l_a(b+c) \sin \frac{\alpha}{2} = bc \sin \alpha$. Звідси, враховуючи формулу синуса подвійного кута: $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

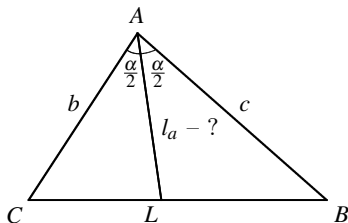
знаходимо бісектрису: $l_a = \frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)

Радіус описаного кола знаходимо за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$



Нарешті, легше, ніж у попередньому прикладі, знаходимо бісектрису l_a кута α :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Для доведення формули (3) запишемо площі

трикутників CAL і BAL : $S_{CAL} = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2}$, $S_{BAL} = \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2}$,

які в сумі дають площу трикутника ABC : $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. У такий

спосіб, використовуючи рівність $S_{CAL} + S_{BAL} = S$, отримуємо

$\frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Leftrightarrow l_a(b+c) \sin \frac{\alpha}{2} = bc \sin \alpha$. Звідси, враховуючи формулу синуса подвійного кута: $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

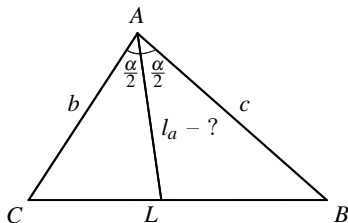
знаходимо бісектрису: $l_a = \frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)

Радіус описаного кола знаходимо за формулою

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$



Нарешті, легше, ніж у попередньому прикладі, знаходимо бісектрису l_a кута α :

$$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Для доведення формули (3) запишемо площі

трикутників CAL і BAL : $S_{CAL} = \frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2}$, $S_{BAL} = \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2}$,

які в сумі дають площу трикутника ABC : $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. У такий

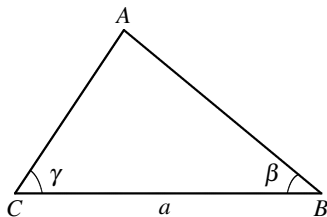
спосіб, використовуючи рівність $S_{CAL} + S_{BAL} = S$, отримуємо

$\frac{1}{2}bl_a \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}cl_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Leftrightarrow l_a(b+c) \sin \frac{\alpha}{2} = bc \sin \alpha$. Звідси, враховуючи формулу синуса подвійного кута: $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

знаходимо бісектрису: $l_a = \frac{bc \sin \alpha}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(b+c) \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 3. Задано сторона a і кути β, γ трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Спочатку знаходимо третій **кут**: $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

У відповідності з формулою зведення маємо

$\sin \alpha = \sin(\pi - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma)$. Тому, використовуючи

теорему синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$,

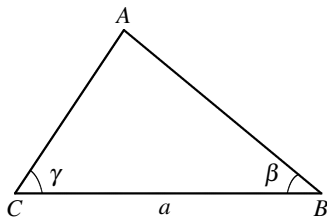
знаходимо інші **сторони** трикутника:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Тепер, коли відомі всі сторони і кути трикутника, можна використати будь-яку формулу з прикладів 1 і 2.

Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 3. Задано сторона a і кути β, γ трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Спочатку знаходимо третій **кут**: $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

У відповідності з формулою зведення маємо

$\sin \alpha = \sin(\pi - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma)$. Тому, використовуючи

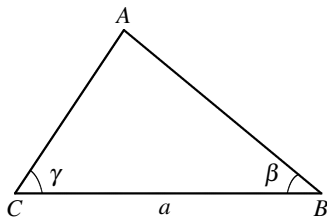
теорему синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$,

знаходимо інші **сторони** трикутника:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Тепер, коли відомі всі сторони і кути трикутника, можна використати будь-яку формулу з прикладів 1 і 2. Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 3. Задано сторона a і кути β, γ трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Спочатку знаходимо третій **кут**: $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

У відповідності з формулою зведення маємо

$\sin \alpha = \sin(\pi - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma)$. Тому, використовуючи

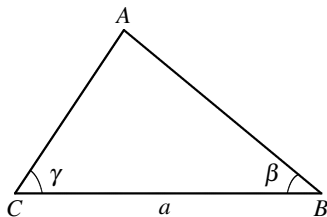
теорему синусів: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$,

знаходимо інші **сторони** трикутника:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Тепер, коли відомі всі сторони і кути трикутника, можна використати будь-яку формулу з прикладів 1 і 2. Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)



Приклад 3. Задано сторона a і кути β, γ трикутника. Знайти основні параметри цього трикутника.

Розв'язання. Спочатку знаходимо третій **кут**: $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

У відповідності з формулою зведення маємо

$\sin \alpha = \sin(\pi - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma)$. Тому, використовуючи

теорему синусів:
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

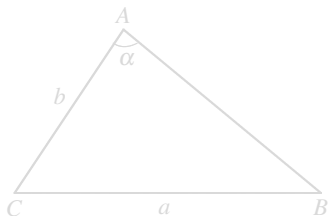
знаходимо інші **сторони** трикутника:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Тепер, коли відомі всі сторони і кути трикутника, можна використати будь-яку формулу з прикладів 1 і 2. Розв'язання закінчено.

Трикутник (стандартні задачі)

Зазначимо, що сторони a, b і кут α , взагалі кажучи, не визначають трикутник (див. наступний приклад), тобто його **параметри знаходяться не однозначно**.



Приклад 4. Задано сторони $a = 7$, $b = 8$ і кут $\alpha = \pi/3$ трикутника. Знайти третю сторону цього трикутника.

Розв'язання. Підставляючи в теорему косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

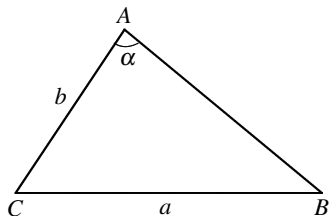
задані параметри і враховуючи, що $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, отримуємо рівність $7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8c \cdot \frac{1}{2}$, яка після зведення подібних доданків зводиться до квадратного рівняння $c^2 - 8c + 15 = 0$ з невідомою c .

Отже, $c = 3$ або $c = 5$.

Відповідь: 3 або 5.

Трикутник (стандартні задачі)

Зазначимо, що сторони a, b і кут α , взагалі кажучи, не визначають трикутник (див. наступний приклад), тобто його **параметри знаходяться не однозначно**.



Приклад 4. Задано сторони $a = 7$, $b = 8$ і кут $\alpha = \pi/3$ трикутника. Знайти третю сторону цього трикутника.

Розв'язання. Підставляючи в теорему косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

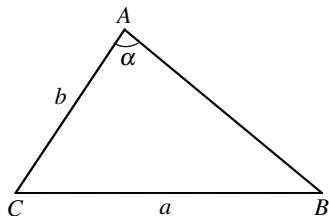
задані параметри і враховуючи, що $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, отримуємо рівність $7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8c \cdot \frac{1}{2}$, яка після зведення подібних доданків зводиться до квадратного рівняння $c^2 - 8c + 15 = 0$ з невідомою c .

Отже, $c = 3$ або $c = 5$.

Відповідь: 3 або 5.

Трикутник (стандартні задачі)

Зазначимо, що сторони a, b і кут α , взагалі кажучи, не визначають трикутник (див. наступний приклад), тобто його **параметри знаходяться не однозначно**.



Приклад 4. Задано сторони $a = 7$, $b = 8$ і кут $\alpha = \pi/3$ трикутника. Знайти третю сторону цього трикутника.

Розв'язання. Підставляючи в теорему косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

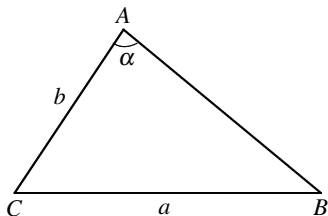
задані параметри і враховуючи, що $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, отримуємо рівність $7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8c \cdot \frac{1}{2}$, яка після зведення подібних доданків зводиться до квадратного рівняння $c^2 - 8c + 15 = 0$ з невідомою c .

Отже, $c = 3$ або $c = 5$.

Відповідь: 3 або 5.

Трикутник (стандартні задачі)

Зазначимо, що сторони a, b і кут α , взагалі кажучи, не визначають трикутник (див. наступний приклад), тобто його **параметри знаходяться не однозначно**.



Приклад 4. Задано сторони $a = 7$, $b = 8$ і кут $\alpha = \pi/3$ трикутника. Знайти третю сторону цього трикутника.

Розв'язання. Підставляючи в теорему косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

задані параметри і враховуючи, що $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, отримуємо рівність $7^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8c \cdot \frac{1}{2}$, яка після зведення подібних доданків зводиться до квадратного рівняння $c^2 - 8c + 15 = 0$ з невідомою c .

Отже, $c = 3$ або $c = 5$.

Відповідь: 3 або 5.