

Стереометрія-1: Метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 7 (частина перша)

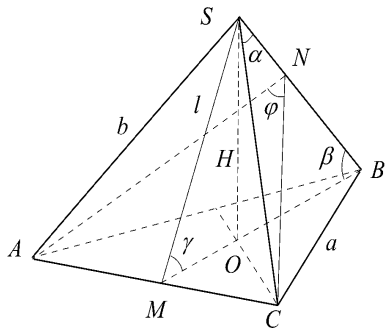


Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Правильна трикутна піраміда

Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а висота опускається в центр основи.

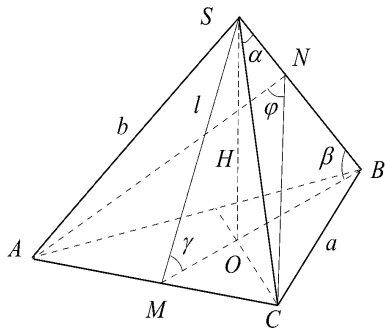


Розглянемо основні параметри правильної трикутної піраміди:

- a — сторона основи ($AB = BC = AC = a$),
- b — бічне ребро ($SA = SB = SC = b$),
- H — висота ($H = SO$, O — центр основи),
- l — апофема ($l = SM$, M — середина AC),

Правильна трикутна піраміда

Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а висота опускається в центр основи.

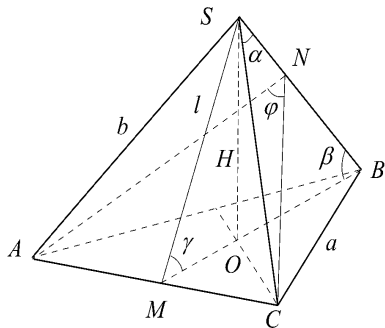


Розглянемо основні параметри правильної трикутної піраміди:

- a — сторона основи ($AB = BC = AC = a$),
- b — бічне ребро ($SA = SB = SC = b$),
- H — висота ($H = SO$, O — центр основи),
- l — апофема ($l = SM$, M — середина AC),

Правильна трикутна піраміда

Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а висота опускається в центр основи.

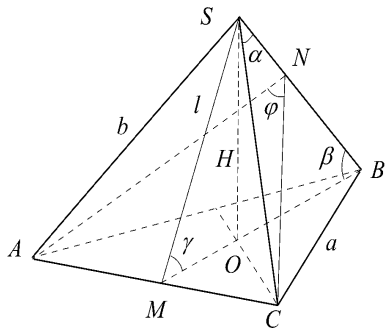


Розглянемо основні параметри правильної трикутної піраміди:

- a — сторона основи ($AB = BC = AC = a$),
- b — бічне ребро ($SA = SB = SC = b$),
- H — висота ($H = SO$, O — центр основи),
- l — апофема ($l = SM$, M — середина AC),

Правильна трикутна піраміда

Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а висота опускається в центр основи.

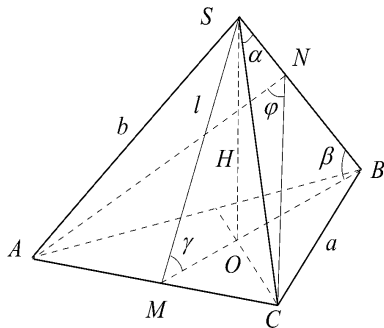


Розглянемо основні параметри правильної трикутної піраміди:

- a — сторона основи ($AB = BC = AC = a$),
- b — бічне ребро ($SA = SB = SC = b$),
- H — висота ($H = SO$, O — центр основи),
- l — апофема ($l = SM$, M — середина AC),

Правильна трикутна піраміда

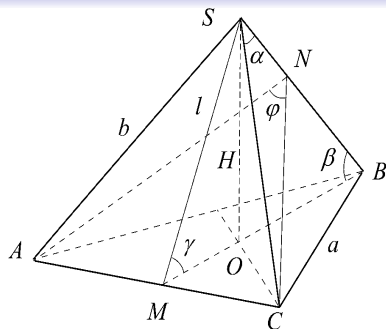
Піраміда називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник, а висота опускається в центр основи.



Розглянемо основні параметри правильної трикутної піраміди:

- a — сторона основи ($AB = BC = AC = a$),
- b — бічне ребро ($SA = SB = SC = b$),
- H — висота ($H = SO$, O — центр основи),
- l — апофема ($l = SM$, M — середина AC),

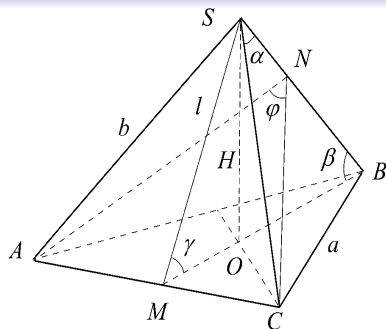
Правильна трикутна піраміда



- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$),

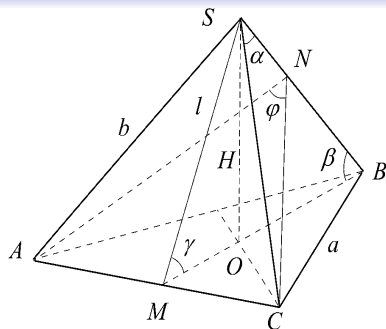
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN , проведеними на бічне ребро SB , які у правильній піраміді мають спільну точку N),

Правильна трикутна піраміда



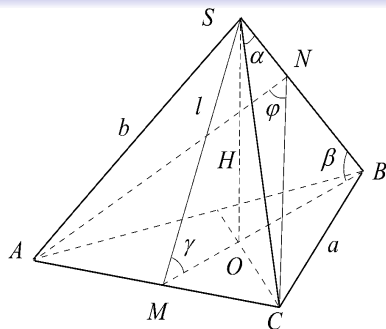
- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN , проведеними на бічне ребро SB , які у правильній піраміді мають спільну точку N),

Правильна трикутна піраміда



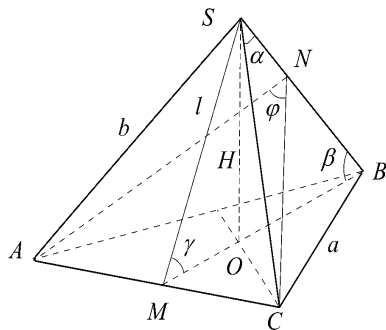
- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN , проведеними на бічне ребро SB , які у правильній піраміді мають спільну точку N),

Правильна трикутна піраміда



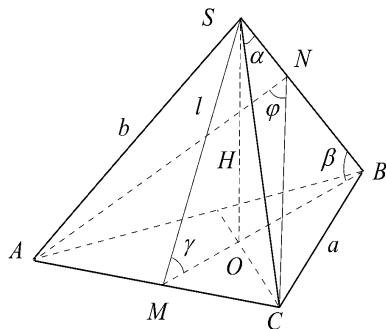
- α — плоский кут при вершині ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$),
- β — кут нахилу бічного ребра до площини основи ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$),
- γ — двогранний кут при ребрі основи (лінійний кут одного з цих двогранних кутів $\angle SMO = \gamma$),
- φ — двогранний кут при бічному ребрі (лінійний кут одного з цих двогранних кутів утворюється перпендикулярами AN і CN , проведеними на бічне ребро SB , які у правильній піраміді мають спільну точку N),

Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,
- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- r_k — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- R_k — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

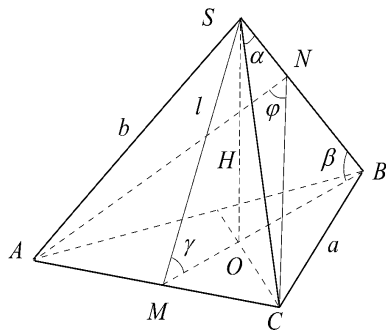
Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,

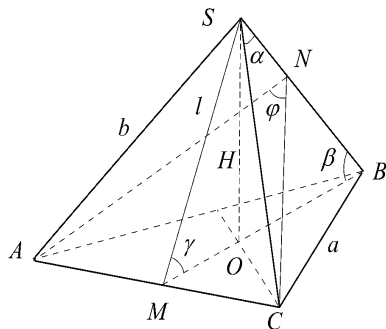
- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- $r_{\text{к}}$ — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- $R_{\text{к}}$ — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,
- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- $r_{\text{к}}$ — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- $R_{\text{к}}$ — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

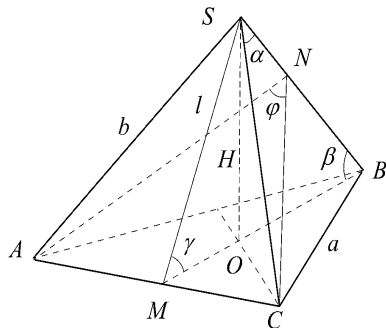
Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,

- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- r_k — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- R_k — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

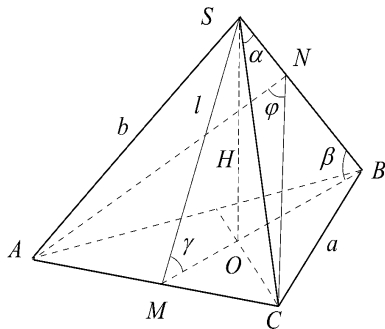
Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,

- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- $r_{\text{к}}$ — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- $R_{\text{к}}$ — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

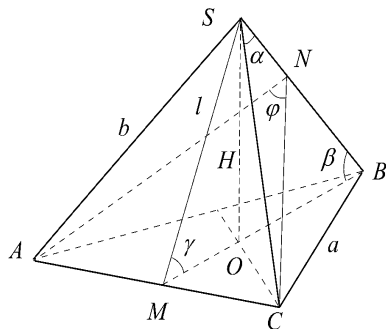
Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,

- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- $r_{\text{к}}$ — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- $R_{\text{к}}$ — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

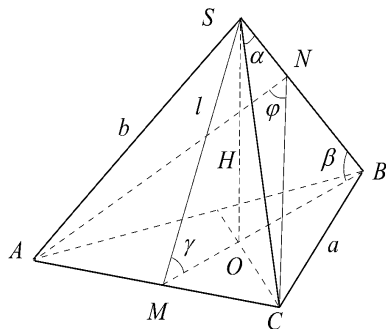
Правильна трикутна піраміда



- P і S_0 — відповідно периметр і площа основи,
- r — радіус кола, вписаного в основу,
- R — радіус кола, описаного навколо основи,

- V — об'єм піраміди,
- $S_{\text{біч}}$ і $S_{\text{п}}$ — відповідно бічна і повна поверхні піраміди,
- $r_{\text{к}}$ — радіус кулі, вписаної в піраміду,
- $R_{\text{к}}$ — радіус кулі, описаної навколо піраміди.

Правильна піраміда (основні співвідношення)



Для довільної правильної піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_0 H, \quad S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} P l, \quad S_{\Pi} = S_0 + S_{\text{біч}}.$$

Основні методи розв'язання геометричних задач

Підкреслимо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (виключення складають, очевидно, випадки, в яких обидва заданих параметри характеризують основу піраміди, наприклад, P і S_0).

Крім того, за заданим кутом (α або β , або γ , або φ) правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної змінної.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Підкреслимо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (виключення складають, очевидно, випадки, в яких обидва заданих параметри характеризують основу піраміди, наприклад, P і S_0).

Крім того, за заданим кутом (α або β , або γ , або φ) правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної змінної.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Підкреслимо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (виключення складають, очевидно, випадки, в яких обидва заданих параметри характеризують основу піраміди, наприклад, P і S_0).

Крім того, за заданим кутом (α або β , або γ , або φ) правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної змінної.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Підкреслимо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (виключення складають, очевидно, випадки, в яких обидва заданих параметри характеризують основу піраміди, наприклад, P і S_0).

Крім того, за заданим кутом (α або β , або γ , або φ) правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної змінної.

Основні методи розв'язання геометричних задач

Підкреслимо, що в правильній піраміді, як правило, за заданими двома основними параметрами, один з яких не є кутом, можна знайти будь-який інший з основних параметрів (виключення складають, очевидно, випадки, в яких обидва заданих параметри характеризують основу піраміди, наприклад, P і S_0).

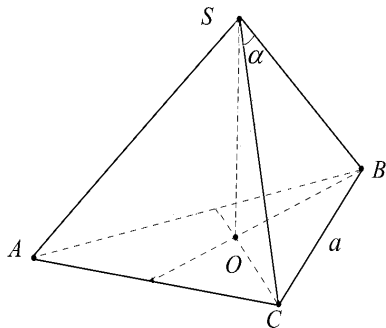
Крім того, за заданим кутом (α або β , або γ , або φ) правильної піраміди можна знайти будь-який інший з цих кутів.

При цьому використовуються два основних методи розв'язання геометричних задач:

- метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач;
- метод введення допоміжної змінної.

Метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач

Необхідною умовою застосування цього методу є наявність плоских фігур, повністю визначених заданими параметрами.



Приклад 1. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і α – плоский кут при вершині. Знайти об'єм піраміди.

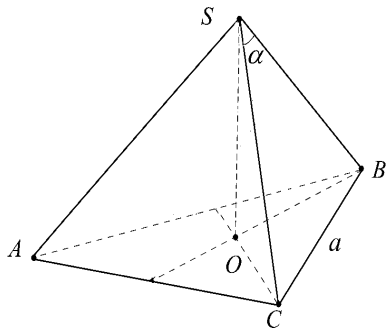
Розв'язання.

Зазначимо, що при заданих параметрах піраміди

рівносторонній трикутник ABC і рівнобедрений трикутник CSB є повністю визначеними.

Метод послідовного розв'язання кількох стандартних планіметричних задач

Необхідною умовою застосування цього методу є наявність плоских фігур, повністю визначених заданими параметрами.



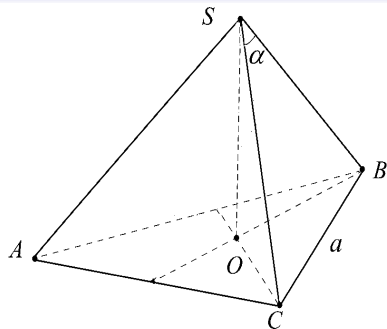
Приклад 1. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і α – плоский кут при вершині. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання.

Зазначимо, що при заданих параметрах піраміди

рівносторонній трикутник ABC і рівнобедрений трикутник CSB є повністю визначеними.

Метод ... стандартних планіметричних задач

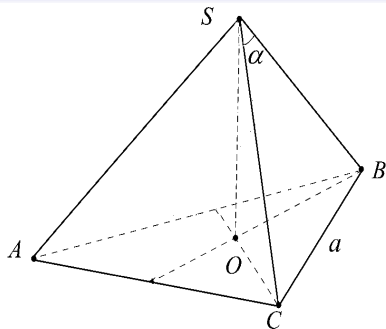


Оскільки об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_0 H$, а площа основи піраміди S_0 знаходиться просто, то найбільш істотною ланкою процесу розв'язання задачі є знаходження висоти піраміди H .

Для знаходження висоти $H = SO$ використаємо $\triangle SOB$.

Зазначимо, що при зображенні заданої піраміди на площині (див. мал.) відбуваються істотні спотворення довжин відрізків і кутів. Тому доцільно робити окремо зображення тих плоских елементів піраміди, які використовуються в процесі розв'язання.

Метод ... стандартних планіметричних задач

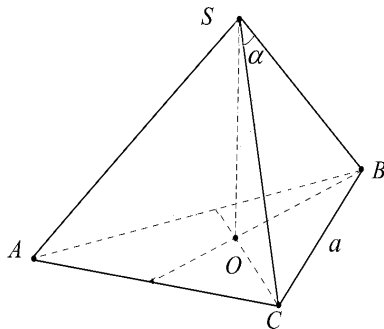


Оскільки об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_0 H$, а площа основи піраміди S_0 знаходиться просто, то найбільш істотною ланкою процесу розв'язання задачі є знаходження висоти піраміди H .

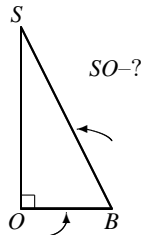
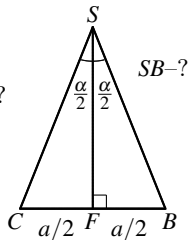
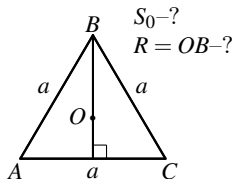
Для знаходження висоти $H = SO$ використаємо $\triangle SOB$.

Зазначимо, що при зображенні заданої піраміди на площині (див. мал.) відбуваються істотні спотворення довжин відрізків і кутів. Тому доцільно робити окремо зображення тих плоских елементів піраміди, які використовуються в процесі розв'язання.

Метод ... стандартних планіметричних задач

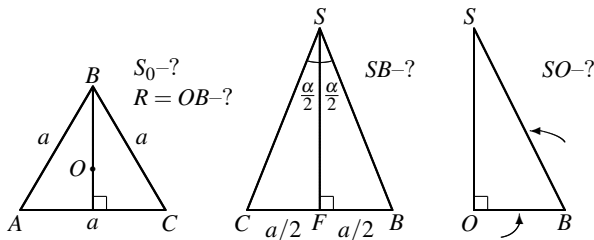


Отже, зобразимо повністю задані $\triangle ABC$ і $\triangle CSB$, а також вибраний $\triangle SOB$ для знаходження висоти $H = SO$. Необхідні для знаходження SO елементи OB і SB відмічені на нижньому мал. стрілочками. Вони можуть бути знайдені відповідно в $\triangle ABC$ і $\triangle CSB$:



Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання цієї стереометричної задачі зводиться до **послідовного розв'язання трьох стандартних планіметричних задач**:



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і R :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a;$$

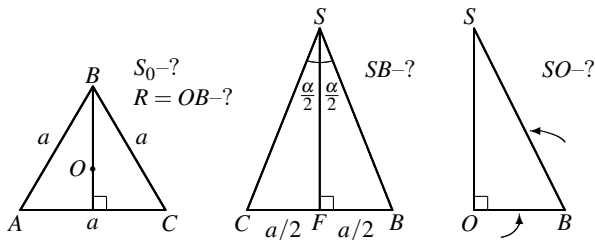
2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{FB}{SB}, \text{ звідки } SB = \frac{FB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = FB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

3) в прямокутному $\triangle SOB$ знаходимо катет SO за теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$.

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання цієї стереометричної задачі зводиться до **послідовного розв'язання трьох стандартних планіметричних задач**:



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і R :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a;$$

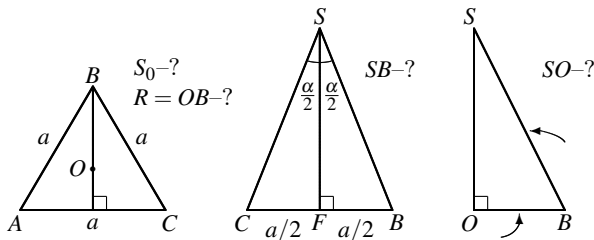
2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{FB}{SB}, \text{ звідки } SB = \frac{FB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = FB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

3) в прямокутному $\triangle SOB$ знаходимо катет SO за теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$.

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання цієї стереометричної задачі зводиться до **послідовного розв'язання трьох стандартних планіметричних задач**:



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і R :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a;$$

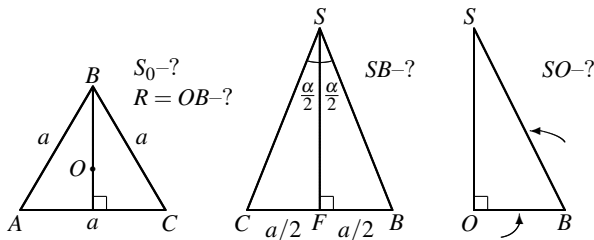
2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{FB}{SB}, \text{ звідки } SB = \frac{FB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = FB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

3) в прямокутному $\triangle SOB$ знаходимо катет SO за теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$.

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання цієї стереометричної задачі зводиться до **послідовного розв'язання трьох стандартних планіметричних задач**:



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і R :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OB = R = \frac{\sqrt{3}}{3} a;$$

2) в рівнобедреному $\triangle CSB$ знаходимо бічну сторону SB :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{FB}{SB}, \text{ звідки } SB = \frac{FB}{\sin \frac{\alpha}{2}} = FB \cdot \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}};$$

3) в прямокутному $\triangle SOB$ знаходимо катет SO за теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$.

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$ знайдені вирази $SB = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ і $OB = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2})}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$ знайдені вирази $SB = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ і $OB = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2})}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$ знайдені вирази $SB = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ і $OB = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2})}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

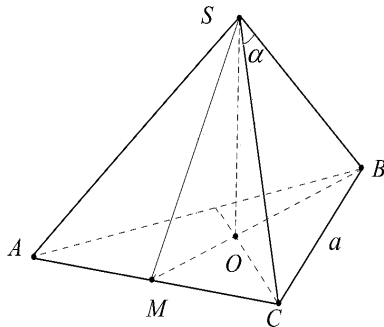
Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

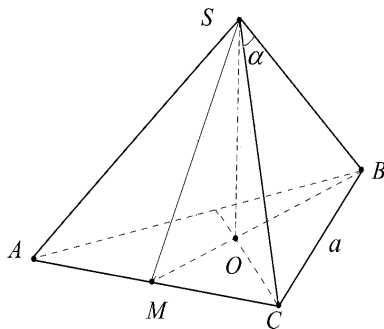
Зазначимо, що знайти висоту піраміди в розглянутому прикладі можна, використовуючи інший трикутник, гіпотенузою якого є апогея піраміди.



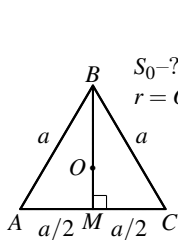
Розв'язання (2-й спосіб). При заданій стороні основи піраміди a і плоскому куті при вершині α **повністю визначені** основа піраміди – рівносторонній $\triangle ABC$ і бічна грань – рівнобедрений $\triangle ASC$.

Для знаходження висоти $H = SO$ використаємо $\triangle SOM$, де M – середина AC .

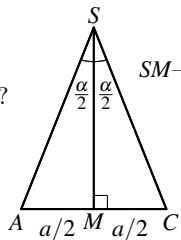
Метод ... стандартних планіметричних задач



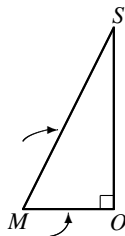
Зобразимо вказані $\triangle ABC$, $\triangle ASC$ і $\triangle SOM$. Необхідні для знаходження SO елементи OM і SM відмічені на нижньому мал. стрілочками. Вони можуть бути знайдені відповідно в $\triangle ABC$ і $\triangle ASC$:



$S_0-?$
 $r = OM-?$



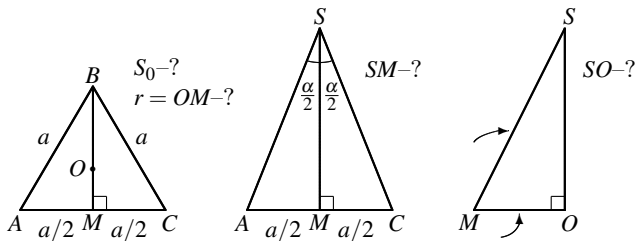
$SM-?$



$SO-?$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і r :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6} a;$$

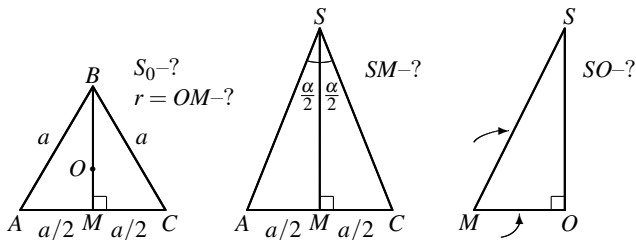
2) в рівнобедреному $\triangle ASC$ знаходимо висоту SM :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{MC}{SM}, \text{ звідки } SM = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

3) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо катет SO за
 теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$.

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і r :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6} a;$$

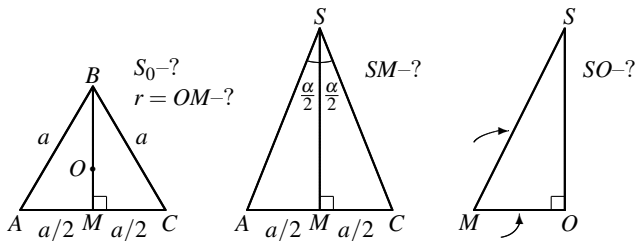
2) в рівнобедреному $\triangle ASC$ знаходимо висоту SM :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{MC}{SM}, \text{ звідки } SM = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

3) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо катет SO за
 теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і r :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6} a;$$

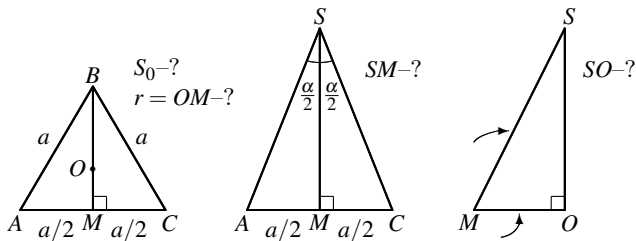
2) в рівнобедреному $\triangle ASC$ знаходимо висоту SM :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{MC}{SM}, \text{ звідки } SM = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

3) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо катет SO за
 теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**



1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо S_0 і r :

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad OM = r = \frac{\sqrt{3}}{6} a;$$

2) в рівнобедреному $\triangle ASC$ знаходимо висоту SM :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{MC}{SM}, \text{ звідки } SM = \frac{MC}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = MC \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2};$$

3) в прямокутному $\triangle SOM$ знаходимо катет SO за
 теоремою Піфагора: $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$ знайдені вирази $SM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ і $OM = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{12}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\ &= \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$ знайдені вирази $SM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ і $OM = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{12}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\ &= \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Підставляючи в рівність $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2}$ знайдені вирази $SM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ і $OM = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, знаходимо висоту піраміди:

$$\begin{aligned} H = SO &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{12}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо об'єм піраміди:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_0 H = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \\ &= \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $V = \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Цілком природньо, що отримані вирази V при різних способах розв'язання:

$$V = \frac{a^3}{24 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (1\text{-й спосіб}),$$

$$V = \frac{a^3}{24} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \quad (2\text{-й спосіб})$$

відрізняються лише формою запису, що можна підтвердити тотожними перетвореннями відповідних тригонометричних виразів.

Дійсно, враховуючи тотожність

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1, \text{ отримуємо}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} &= \sqrt{3 \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 \right) - 1} = \sqrt{\frac{3}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 4} = \\ &= \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

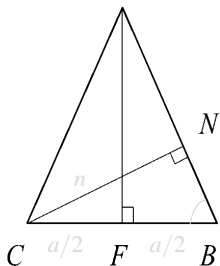
звідки випливає рівність записаних вище виразів об'єму піраміди V .

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з довільною правильною пірамідою

Розглянемо одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з **двогранним кутом при бічному ребрі** довільної правильної піраміди.

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.

S



Задача 1. Дано: $\triangle BSC$, $SB = SC$, SF і CN – висоти, $BC = a$, $CN = n$.
Знайти SF (апофема піраміди) і SB (бічне ребро).

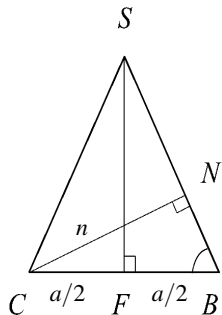
Розв'язання. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SFB .

Розглянемо також подібний йому трикутник CNB , який є **повністю визначеним**.

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з довільною правильною пірамідою

Розглянемо одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з **двогранним кутом при бічному ребрі** довільної правильної піраміди.

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.



Задача 1. Дано: $\triangle BSC$, $SB = SC$, SF і CN – висоти, $BC = a$, $CN = n$.
Знайти SF (**апофема піраміди**) і SB (**бічне ребро**).

Розв'язання. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SFB .

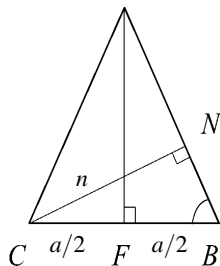
Розглянемо також подібний йому трикутник CNB , який є **повністю визначеним**.

Стандартна планіметрична задача, зв'язана з довільною правильною пірамідою

Розглянемо одну стандартну планіметричну задачу, зв'язану з **двогранним кутом при бічному ребрі** довільної правильної піраміди.

Використаємо скорочений запис умови задачі і назви відповідних елементів піраміди.

S

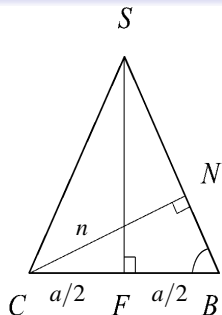


Задача 1. Дано: $\triangle BSC$, $SB = SC$, SF і CN – висоти, $BC = a$, $CN = n$.
Знайти SF (**апофема піраміди**) і SB (**бічне ребро**).

Розв'язання. Зазначимо, що шукані відрізки є елементами трикутника SFB .

Розглянемо також подібний йому трикутник CNB , який є **повністю визначеним**.

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SFB$ з $\triangle CNB$

$$\frac{SF}{FB} = \operatorname{tg} \angle NBF = \frac{CN}{NB},$$

з яких випливає рівність

$$SF = \frac{FB \cdot CN}{NB} = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{an}{2\sqrt{a^2 - n^2}}.$$

Аналогічно маємо:

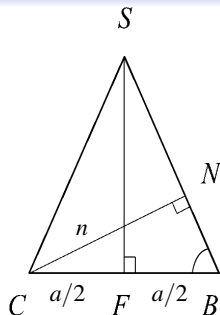
з $\triangle SFB$ з $\triangle CNB$

$$\frac{FB}{SB} = \cos \angle NBF = \frac{NB}{BC},$$

звідки отримуємо

$$SB = \frac{FB \cdot BC}{NB} = \frac{FB \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - n^2}}.$$

Стандартна планіметрична задача



Маємо співвідношення:

з $\triangle SFB$ з $\triangle CNB$

$$\frac{SF}{FB} = \operatorname{tg} \angle NBF = \frac{CN}{NB},$$

з яких випливає рівність

$$SF = \frac{FB \cdot CN}{NB} = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{an}{2\sqrt{a^2 - n^2}}.$$

Аналогічно маємо:

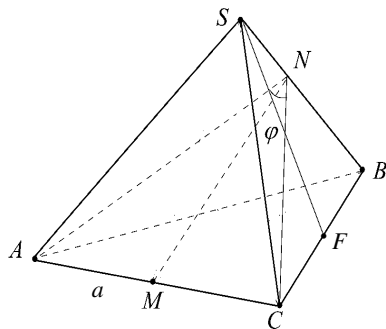
з $\triangle SFB$ з $\triangle CNB$

$$\frac{FB}{SB} = \cos \angle NBF = \frac{NB}{BC},$$

звідки отримуємо

$$SB = \frac{FB \cdot BC}{NB} = \frac{FB \cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - n^2}}.$$

Метод ... стандартних планіметричних задач



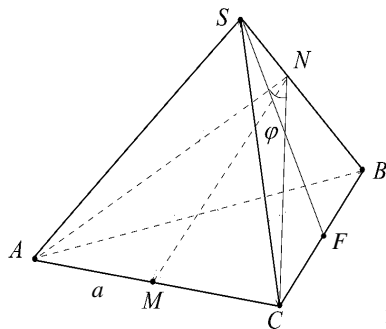
Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Зазначимо, що при заданих параметрах піраміди рівносторонній

$\triangle ABC$ і рівнобедрений $\triangle ANC$ є повністю визначеними.

Оскільки бічна поверхня $S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}Pl$ і периметр основи $P = 3a$, то для розв'язання задачі необхідно знайти апофему $l = SF$ (де F – середина BC), яка знаходиться в $\triangle CSB$ в результаті розв'язання розглянутої стандартної планіметричної задачі 1.

Метод ... стандартних планіметричних задач



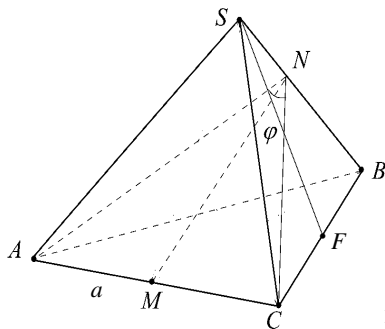
Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Зазначимо, що при заданих параметрах піраміди рівносторонній

$\triangle ABC$ і рівнобедрений $\triangle ANC$ є **повністю визначеними**.

Оскільки бічна поверхня $S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}Pl$ і периметр основи $P = 3a$, то для розв'язання задачі необхідно знайти **апофему** $l = SF$ (де F – середина BC), яка знаходиться в $\triangle CSB$ в результаті розв'язання розглянутої стандартної планіметричної задачі 1.

Метод ... стандартних планіметричних задач



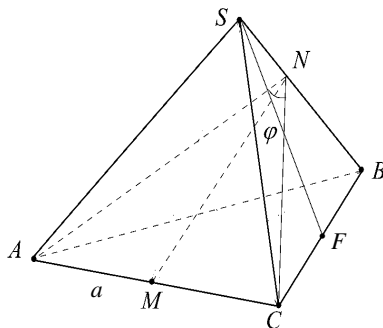
Приклад 2. В правильній трикутній піраміді a – сторона основи і φ – двогранний кут при бічному ребрі. Знайти площу бічної поверхні піраміди.

Розв'язання. Зазначимо, що при заданих параметрах піраміди рівносторонній

$\triangle ABC$ і рівнобедрений $\triangle ANC$ є повністю визначеними.

Оскільки бічна поверхня $S_{\text{біч}} = \frac{1}{2}Pl$ і периметр основи $P = 3a$, то для розв'язання задачі необхідно знайти апофему $l = SF$ (де F – середина BC), яка знаходиться в $\triangle CSB$ в результаті розв'язання розглянутої стандартної планіметричної задачі 1.

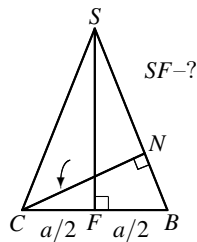
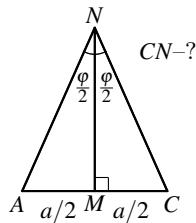
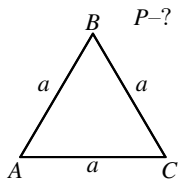
Метод ... стандартних планіметричних задач



В результаті розв'язання стандартної задачі 1 маємо

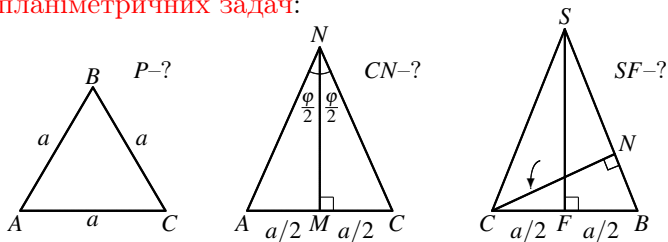
$$l = SF = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}},$$

тобто для знаходження апофеми l необхідно спершу знайти CN (цей необхідний елемент відмічено на нижньому мал. стрілочкою). Це можна зробити в $\triangle ANC$.



Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**

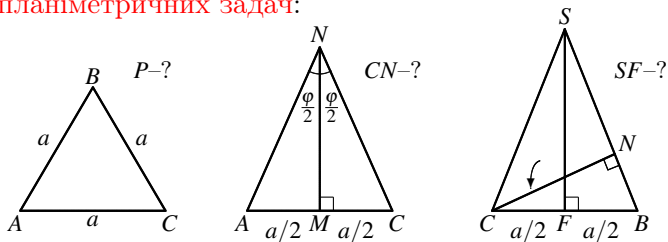


- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $P = 3a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо бічну сторону CN : $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}$, звідки $CN = \frac{NC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = NC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$;
- 3) в $\triangle BSC$ знаходимо SF (див. задачу 1):

$$l = SF = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2}} =$$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**

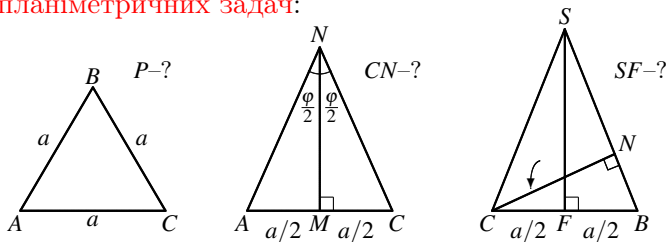


- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $P = 3a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо бічну сторону CN : $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}$, звідки $CN = \frac{NC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = NC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$;
- 3) в $\triangle BSC$ знаходимо SF (див. задачу 1):

$$l = SF = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2}} =$$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
**послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:**

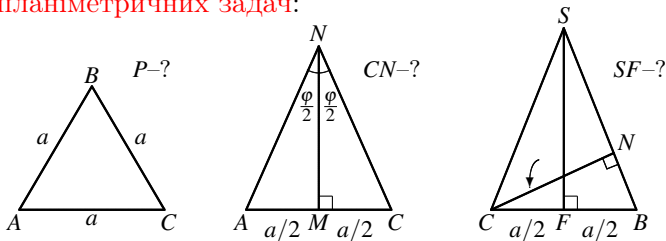


- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $P = 3a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо бічну сторону CN : $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}$, звідки $CN = \frac{NC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = NC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$;
- 3) в $\triangle BSC$ знаходимо SF (див. задачу 1):

$$l = SF = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2}} =$$

Метод ... стандартних планіметричних задач

Отже, розв'язання задачі отримаємо шляхом
 послідовного розв'язання трьох стандартних
 планіметричних задач:



- 1) в рівносторонньому $\triangle ABC$ знаходимо $P = 3a$;
- 2) в рівнобедреному $\triangle ANC$ знаходимо бічну сторону CN : $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{CN}$, звідки $CN = \frac{NC}{\sin \frac{\varphi}{2}} = NC \cdot \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$;
- 3) в $\triangle BSC$ знаходимо SF (див. задачу 1):

$$l = SF = \frac{FB \cdot CN}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}\right)^2}} =$$

Метод ... стандартних планіметричних задач

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{a^2(4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.
 \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо бічну поверхню:

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} Pl = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$$

Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{a^2(4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.
 \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо бічну поверхню:

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} Pl = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$$

Відповідь: $S_{\text{біч}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$

Метод ... стандартних планіметричних задач

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{\frac{a^2(4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1)}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}}{\frac{a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \\
 &= \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.
 \end{aligned}$$

Нарешті, знаходимо бічну поверхню:

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} Pl = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$$

$$\text{Відповідь: } S_{\text{біч}} = \frac{3a^2}{4 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 1}}.$$