Ірраціональні рівняння і нерівності

С.А. Плакса, В.В. Шпирко
Заочна фізико-математична школа

Урок 9 (частина друга)

Мій намір полягає не в тому, щоб навчати тут методу, якому кожний має слідувати, щоб правильно спрямовувати свій розум, а тільки в тому, щоб показати, яким чином спрямовував я свій власний розум.

Рене Декарт, "Міркування про метод"

Означення кореня парного степеня

На множині дійсних чисел корінь парного степеня визначений тільки з невід'ємних чисел.

- Нехай $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.
  Арифметичним коренем степеня $2n$ з числа a називається невід'ємний корінь рівняння $x^{2n} = a$, тобто таке число $b \geq 0$, для якого $b^{2n} = a$:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = 2$, хоча рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = \pm 2$ (в позначенні квадратного кореня показник степеня 2 опускають, тобто пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$).
Отже, $\sqrt[2n]{a}$ виражається невід'ємним числом для будь-якого невід'ємного числа a, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

Корінь парного степеня з від'ємних чисел не визначений. Наприклад, $\sqrt{-2}$ не визначений.

Означення кореня парного степеня

На множині дійсних чисел корінь парного степеня визначений тільки з невід'ємних чисел.

- Нехай $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.
  Арифметичним коренем степеня $2n$ з числа a називається невід'ємний корінь рівняння $x^{2n} = a$, тобто таке число $b \geq 0$, для якого $b^{2n} = a$:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = 2$, хоча рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = \pm 2$ (в позначенні квадратного кореня показник степеня 2 опускають, тобто пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$).

Отже, $\sqrt[2n]{a}$ виражається невід'ємним числом для будь-якого невід'ємного числа a, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

Корінь парного степеня з від'ємних чисел не визначений. Наприклад, $\sqrt{-2}$ не визначений.

Означення кореня парного степеня

На множині дійсних чисел корінь парного степеня визначений тільки з невід'ємних чисел.

- Нехай $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.
  Арифметичним коренем степеня $2n$ з числа a називається невід'ємний корінь рівняння $x^{2n} = a$, тобто таке число $b \geq 0$, для якого $b^{2n} = a$:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = 2$, хоча рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = \pm 2$ (в позначенні квадратного кореня показник степеня 2 опускають, тобто пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$).

Отже, $\sqrt[2n]{a}$ виражається невід'ємним числом для будь-якого невід'ємного числа a, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

Корінь парного степеня з від'ємних чисел не визначений. Наприклад, $\sqrt{-2}$ не визначений.

Означення кореня парного степеня

На множині дійсних чисел корінь парного степеня визначений тільки з невід'ємних чисел.

- Нехай $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.
  Арифметичним коренем степеня $2n$ з числа a називається невід'ємний корінь рівняння $x^{2n} = a$, тобто таке число $b \geq 0$, для якого $b^{2n} = a$:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = 2$, хоча рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = \pm 2$ (в позначенні квадратного кореня показник степеня 2 опускають, тобто пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$).

Отже, $\sqrt[2n]{a}$ виражається невід'ємним числом для будь-якого невід'ємного числа a, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

Корінь парного степеня з від'ємних чисел не визначений. Наприклад, $\sqrt{-2}$ не визначений.

Означення кореня парного степеня

На множині дійсних чисел корінь парного степеня визначений тільки з невід'ємних чисел.

- Нехай $a \geq 0$, $n \in \mathbf{N}$.
  Арифметичним коренем степеня $2n$ з числа a називається невід'ємний корінь рівняння $x^{2n} = a$, тобто таке число $b \geq 0$, для якого $b^{2n} = a$:

$$\sqrt[2n]{a} = b \Longleftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = 2$, хоча рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = \pm 2$ (в позначенні квадратного кореня показник степеня 2 опускають, тобто пишуть $\sqrt{a}$ замість $\sqrt[2]{a}$).
Отже, $\sqrt[2n]{a}$ виражається невід'ємним числом для будь-якого невід'ємного числа a, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$.

Корінь парного степеня з від'ємних чисел не визначений. Наприклад, $\sqrt{-2}$ не визначений.

Означення кореня непарного степеня

На відміну від кореня парного степеня корінь непарного степеня визначений з будь-якого дійсного числа, у тому числі з від'ємного.

- Нехай $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.
  Коренем степеня $2n+1$ з числа a називається корінь рівняння $x^{2n+1} = a$, тобто

$$\sqrt[2n+1]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^{2n+1}.$$

Наприклад, $\sqrt[3]{-8} = -2$, оскільки $-8 = (-2)^3$.

Означення кореня непарного степеня

На відміну від кореня парного степеня корінь непарного степеня визначений з будь-якого дійсного числа, у тому числі з від'ємного.

- Нехай $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.
  Коренем степеня $2n+1$ з числа a називається корінь рівняння $x^{2n+1} = a$, тобто

$$\sqrt[2n+1]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^{2n+1}.$$

Наприклад, $\sqrt[3]{-8} = -2$, оскільки $-8 = (-2)^3$.

Означення кореня непарного степеня

На відміну від кореня парного степеня корінь непарного степеня визначений з будь-якого дійсного числа, у тому числі з від'ємного.

- Нехай $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.
  Коренем степеня $2n+1$ з числа a називається корінь рівняння $x^{2n+1} = a$, тобто

$$\sqrt[2n+1]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^{2n+1}.$$

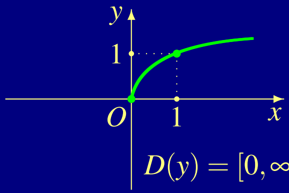
Наприклад, $\sqrt[3]{-8} = -2$, оскільки $-8 = (-2)^3$.

Основні властивості коренів парного і непарного степеня

корінь парного степеня	корінь непарного степеня
1) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$ при $a \geq 0$;	1) $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$;
2) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a\rvert$;	2) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$;
3) $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{\lvert a\rvert}\,\sqrt[2n]{\lvert b\rvert}$ при $ab \geq 0$;	3) $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a}\,\sqrt[2n+1]{b}$;
4) $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2n]{\lvert b\rvert}}$ при $\dfrac{a}{b} \geq 0$;	4) $\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}$ при $b \neq 0$;
5) $\sqrt[2n]{a} \geq 0$ при $a \geq 0$;	5) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$.

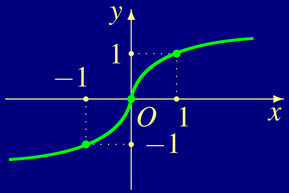
Графіки функцій коренів парного і непарного степеня

$y = \sqrt[2n]{x}, \quad n \in \mathbf{N}$



Функція визначена на проміжку $[0, \infty)$, де вона є зростаючою і опуклою догори. Графік проходить через точки $(0;0)$ і $(1;1)$.

$y = \sqrt[2n+1]{x}, \quad n \in \mathbf{N}$



Функція визначена скрізь на $\mathbf{R}$, непарна і зростає на всій числовій прямій. На проміжку $(0, \infty)$ вона є опуклою догори, а на проміжку $(-\infty, 0)$ – опуклою донизу. Графік проходить через точки $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$ і має перегин у початку координат.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональними називаються рівняння і нерівності, які містять невідому під знаком кореня.

Найпростіше рівняння $\sqrt[n]{x} = b$, де $n = 2; 3; \ldots$, розв'язується за означенням кореня (парного або непарного степеня).

Наприклад, $\sqrt[3]{x} = -4 \Longleftrightarrow x = (-4)^3 = -64;$

$$\sqrt{x} = 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 0 \text{ (істина)}, \\ 3^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x = 9;$$

$$\sqrt{x} = -3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -3 \geq 0 \text{ (хибна нерівність)}, \\ (-3)^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \varnothing,$$

тобто останнє з цих рівнянь розв'язків не має, оскільки при всіх x з області визначення (ОДЗ) рівняння виконується нерівність $\sqrt{x} \geq 0$. У той же час, піднесення до квадрату обох частин рівняння $\sqrt{x} = -3$ приводить до появи зайвого кореня $x = 9$.

Отже, $\sqrt{x} = -3 \not\Longleftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (-3)^2$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональними називаються рівняння і нерівності, які містять невідому під знаком кореня.

Найпростіше рівняння $\sqrt[n]{x}=b$, де $n=2;3;\ldots$, розв'язується за означенням кореня (парного або непарного степеня).

Наприклад, $\sqrt[3]{x}=-4 \Longleftrightarrow x=(-4)^3=-64$;

$$\sqrt{x}=3 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\geq 0 \text{ (істина)}, \\ 3^2=x, \end{cases} \Longleftrightarrow x=9;$$

$$\sqrt{x}=-3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -3\geq 0 \text{ (хибна нерівність)}, \\ (-3)^2=x, \end{cases} \Longleftrightarrow x\in\varnothing,$$

тобто останнє з цих рівнянь розв'язків не має, оскільки при всіх x з області визначення (ОДЗ) рівняння виконується нерівність $\sqrt{x}\geq 0$. У той же час, піднесення до квадрату обох частин рівняння $\sqrt{x}=-3$ приводить до появи зайвого кореня $x=9$.

Отже, $\sqrt{x}=-3 \not\Longleftrightarrow (\sqrt{x})^2=(-3)^2$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональними називаються рівняння і нерівності, які містять невідому під знаком кореня.

Найпростіше рівняння $\sqrt[n]{x} = b$, де $n = 2; 3; \ldots$, розв'язується за означенням кореня (парного або непарного степеня).

Наприклад, $\sqrt[3]{x} = -4 \iff x = (-4)^3 = -64;$

$$\sqrt{x} = 3 \iff \begin{cases} 3 \geq 0 \text{ (істина)}, \\ 3^2 = x, \end{cases} \iff x = 9;$$

$$\sqrt{x} = -3 \iff \begin{cases} -3 \geq 0 \text{ (хибна нерівність)}, \\ (-3)^2 = x, \end{cases} \iff x \in \varnothing,$$

тобто останнє з цих рівнянь розв'язків не має, оскільки при всіх x з області визначення (ОДЗ) рівняння виконується нерівність $\sqrt{x} \geq 0$. У той же час, піднесення до квадрату обох частин рівняння $\sqrt{x} = -3$ приводить до появи зайвого кореня $x = 9$.

Отже, $\sqrt{x} = -3 \not\iff (\sqrt{x})^2 = (-3)^2$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональними називаються рівняння і нерівності, які містять невідому під знаком кореня.

Найпростіше рівняння $\sqrt[n]{x} = b$, де $n = 2; 3; \ldots$, розв'язується за означенням кореня (парного або непарного степеня).

Наприклад, $\sqrt[3]{x} = -4 \Longleftrightarrow x = (-4)^3 = -64;$

$$\sqrt{x} = 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 0 \text{ (істина)}, \\ 3^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x = 9;$$

$$\sqrt{x} = -3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -3 \geq 0 \text{ (хибна нерівність)}, \\ (-3)^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \varnothing,$$

тобто останнє з цих рівнянь розв'язків не має, оскільки при всіх x з області визначення (ОДЗ) рівняння виконується нерівність $\sqrt{x} \geq 0$. У той же час, піднесення до квадрату обох частин рівняння $\sqrt{x} = -3$ приводить до появи зайвого кореня $x = 9$.

Отже, $\sqrt{x} = -3 \not\Longleftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (-3)^2$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Ірраціональними називаються рівняння і нерівності, які містять невідому під знаком кореня.

Найпростіше рівняння $\sqrt[n]{x} = b$, де $n = 2; 3; \ldots$, розв'язується за означенням кореня (парного або непарного степеня).

Наприклад, $\sqrt[3]{x} = -4 \Longleftrightarrow x = (-4)^3 = -64;$

$$\sqrt{x} = 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 0 \text{ (істина)}, \\ 3^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x = 9;$$

$$\sqrt{x} = -3 \Longleftrightarrow \begin{cases} -3 \geq 0 \text{ (хибна нерівність)}, \\ (-3)^2 = x, \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \varnothing,$$

тобто останнє з цих рівнянь розв'язків не має, оскільки при всіх x з області визначення (ОДЗ) рівняння виконується нерівність $\sqrt{x} \geq 0$. У той же час, піднесення до квадрату обох частин рівняння $\sqrt{x} = -3$ приводить до появи зайвого кореня $x = 9$.

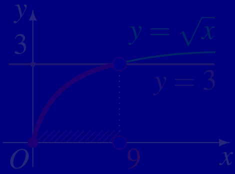
Отже, $\sqrt{x} = -3 \not\Longleftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (-3)^2$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Крім того, зазначимо, що бездумне піднесення до квадрату обох частин ірраціональних нерівностей приводить, як правило, не тільки до появи зайвих розв'язків, але також і до втрати розв'язків. Розглянемо два простих приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < 3$.

Розв'язання. Застосуємо графічний метод. Відмітимо



частину кривої $y = \sqrt{x}$, розміщену нижче прямої $y = 3$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in [0;9)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності з'являється нескінченна множина зайвих розв'язків, тобто $\sqrt{x} < 3 \not\Longleftrightarrow x < 9$.

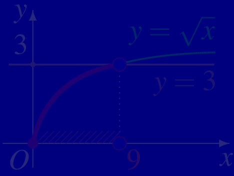
Відповідь: $x \in [0;9)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Крім того, зазначимо, що бездумне піднесення до квадрату обох частин ірраціональних нерівностей приводить, як правило, не тільки до появи зайвих розв'язків, але також і до втрати розв'язків.
Розглянемо два простих приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < 3$.

Розв'язання. Застосуємо графічний метод. Відмітимо



частину кривої $y=\sqrt{x}$, розміщену нижче прямої $y=3$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in [0;9)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності з'являється нескінченна множина зайвих розв'язків, тобто $\sqrt{x} < 3 \not\Longleftrightarrow x < 9$.

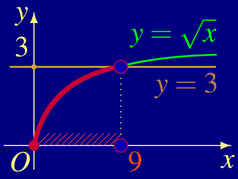
Відповідь: $x \in [0;9)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Крім того, зазначимо, що бездумне піднесення до квадрату обох частин ірраціональних нерівностей приводить, як правило, не тільки до появи зайвих розв'язків, але також і до втрати розв'язків. Розглянемо два простих приклади.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < 3$.

Р о з в' я з а н н я. Застосуємо графічний метод. Відмітимо



частину кривої $y = \sqrt{x}$, розміщену нижче прямої $y = 3$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in [0;9)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності з'являється нескінченна множина зайвих розв'язків, тобто $\sqrt{x} < 3 \not\Longleftrightarrow x < 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;9)$.

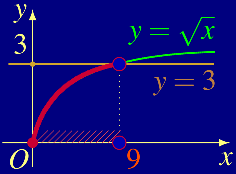
Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Крім того, зазначимо, що бездумне піднесення до квадрату обох частин ірраціональних нерівностей приводить, як правило, не тільки до появи зайвих розв'язків, але також і до втрати розв'язків.

Розглянемо два простих приклади.

П р и к л а д 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < 3$.

Р о з в' я з а н н я. Застосуємо графічний метод. Відмітимо



частину кривої $y = \sqrt{x}$, розміщену нижче прямої $y = 3$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in [0;9)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності з'являється нескінченна множина зайвих розв'язків, тобто $\sqrt{x} < 3 \not\Longleftrightarrow x < 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;9)$.

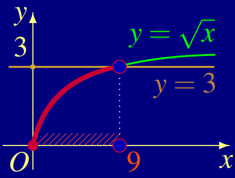
Найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності

Крім того, зазначимо, що бездумне піднесення до квадрату обох частин ірраціональних нерівностей приводить, як правило, не тільки до появи зайвих розв'язків, але також і до втрати розв'язків.

Розглянемо два простих приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} < 3$.

Розв'язання. Застосуємо графічний метод. Відмітимо



частину кривої $y = \sqrt{x}$, розміщену нижче прямої $y = 3$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in [0;9)$.

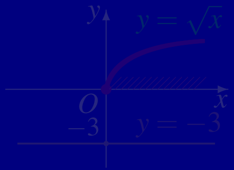
У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності з'являється нескінченна множина зайвих розв'язків, тобто $\sqrt{x} < 3 \not\Leftrightarrow x < 9$.

Відповідь: $x \in [0;9)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння и нерівності

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > -3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що при всіх x з області визначення (ОДЗ) нерівності виконуються співвідношення $\sqrt{x} \geq 0 > -3$. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є ОДЗ: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0; \infty)$, див. також розв'язання нерівності графічним методом.



Крива $y = \sqrt{x}$ повністю лежить вище прямої $y = -3$. Проектуючи відмічену криву на вісь Ox, отримуємо проміжок $[0; \infty)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності отримаємо $x > 9$, і тим самим нескінченна множина розв'язків нерівності буде втрачена. Отже, $\sqrt{x} > -3 \not\Longleftrightarrow x > 9$.

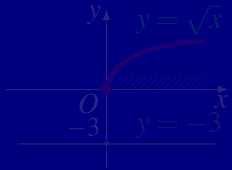
В і д п о в і д ь: $x \in [0; \infty)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння и нерівності

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > -3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що при всіх x з області визначення (ОДЗ) нерівності виконуються співвідношення $\sqrt{x} \geq 0 > -3$. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є ОДЗ: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0;\infty)$,

див. також розв'язаня нерівності графічним методом.



Крива $y = \sqrt{x}$ повністю лежить вище прямої $y = -3$. Проектуючи відмічену криву на вісь Ox, отримуємо проміжок $[0;\infty)$.

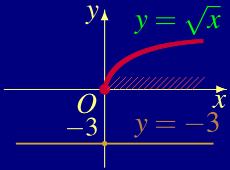
У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності отримаємо $x > 9$, і тим самим нескінченна множина розв'язків нерівності буде втрачена. Отже, $\sqrt{x} > -3 \not\Longleftrightarrow x > 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;\infty)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння и нерівності

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > -3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що при всіх x з області визначення (ОДЗ) нерівності виконуються співвідношення $\sqrt{x} \geq 0 > -3$. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є ОДЗ: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0;\infty)$,
див. також розв'язання нерівності графічним методом.



Крива $y = \sqrt{x}$ повністю лежить вище прямої $y = -3$. Проектуючи відмічену криву на вісь Ox, отримуємо проміжок $[0;\infty)$.

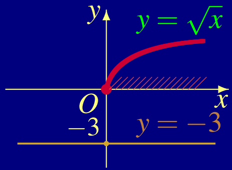
У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності отримаємо $x > 9$, і тим самим нескінченна множина розв'язків нерівності буде втрачена. Отже, $\sqrt{x} > -3 \not\Longleftrightarrow x > 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;\infty)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння и нерівності

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > -3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що при всіх x з області визначення (ОДЗ) нерівності виконуються співвідношення $\sqrt{x} \geq 0 > -3$. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є ОДЗ: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0;\infty)$,
див. також розв'язаня нерівності графічним методом.



Крива $y = \sqrt{x}$ повністю лежить вище прямої $y = -3$. Проектуючи відмічену криву на вісь Ox, отримуємо проміжок $[0;\infty)$.

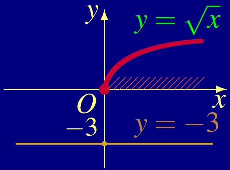
У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності отримаємо $x > 9$, і тим самим нескінченна множина розв'язків нерівності буде втрачена. Отже, $\sqrt{x} > -3 \not\Longleftrightarrow x > 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;\infty)$.

Найпростіші ірраціональні рівняння и нерівності

П р и к л а д 2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x} > -3$.

Р о з в' я з а н н я. Зазначимо, що при всіх x з області визначення (ОДЗ) нерівності виконуються співвідношення $\sqrt{x} \geq 0 > -3$. Тому множиною розв'язків цієї нерівності є ОДЗ: $x \geq 0 \Longleftrightarrow x \in [0;\infty)$,
див. також розв'язання нерівності графічним методом.



Крива $y = \sqrt{x}$ повністю лежить вище прямої $y = -3$. Проектуючи відмічену криву на вісь Ox, отримуємо проміжок $[0;\infty)$.

У той же час після піднесення до квадрату обох частин початкової нерівності отримаємо $x > 9$, і тим самим нескінченна множина розв'язків нерівності буде втрачена. Отже, $\sqrt{x} > -3 \not\Longleftrightarrow x > 9$.

В і д п о в і д ь: $x \in [0;\infty)$.

Звідки з'являються зайві корені

Отже, після піднесення до степеня $2n$ рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \qquad (1)$$

отримаємо рівняння

$$f(x) = (g(x))^{2n}, \qquad (2)$$

коренями якого є також всі корені рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -g(x). \qquad (3)$$

Дійсно, після піднесення до степеня $2n$ рівняння (3) отримаємо також рівняння (2). Тому корені рівняння (2) включають в себе як корені рівняння (1), так і зайві для рівняння (1) корені рівняння (3).

При цьому всі корені рівняння (2) належать області визначення рівнянь (1), (3), оскільки з (2) випливає $f(x) \geq 0$, а тому і існування кореня $\sqrt[2n]{f(x)}$.

Отже, врахування ОДЗ рівняння (1) не позбавляє від зайвих коренів, набутих в рівнянні (2).

Звідки з'являються зайві корені

Отже, після піднесення до степеня $2n$ рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \tag{1}$$

отримаємо рівняння

$$f(x) = (g(x))^{2n}, \tag{2}$$

коренями якого є також всі корені рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -g(x). \tag{3}$$

Дійсно, після піднесення до степеня $2n$ рівняння (3) отримаємо також рівняння (2). Тому корені рівняння (2) включають в себе як корені рівняння (1), так і зайві для рівняння (1) корені рівняння (3).

При цьому всі корені рівняння (2) належать області визначення рівнянь (1), (3), оскільки з (2) випливає $f(x) \geq 0$, а тому і існування кореня $\sqrt[2n]{f(x)}$.

Отже, врахування ОДЗ рівняння (1) не позбавляє від зайвих коренів, набутих в рівнянні (2).

Звідки з'являються зайві корені

Отже, після піднесення до степеня $2n$ рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \tag{1}$$

отримаємо рівняння

$$f(x) = (g(x))^{2n}, \tag{2}$$

коренями якого є також всі корені рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -g(x). \tag{3}$$

Дійсно, після піднесення до степеня $2n$ рівняння (3) отримаємо також рівняння (2). Тому корені рівняння (2) включають в себе як корені рівняння (1), так і зайві для рівняння (1) корені рівняння (3).

При цьому всі корені рівняння (2) належать області визначення рівнянь (1), (3), оскільки з (2) випливає $f(x) \geq 0$, а тому і існування кореня $\sqrt[2n]{f(x)}$.

Отже, врахування ОДЗ рівняння (1) не позбавляє від зайвих коренів, набутих в рівнянні (2).

Звідки з'являються зайві корені

Отже, після піднесення до степеня $2n$ рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \tag{1}$$

отримаємо рівняння

$$f(x) = (g(x))^{2n}, \tag{2}$$

коренями якого є також всі корені рівняння

$$\sqrt[2n]{f(x)} = -g(x). \tag{3}$$

Дійсно, після піднесення до степеня $2n$ рівняння (3) отримаємо також рівняння (2). Тому корені рівняння (2) включають в себе як корені рівняння (1), так і зайві для рівняння (1) корені рівняння (3).

При цьому всі корені рівняння (2) належать області визначення рівнянь (1), (3), оскільки з (2) випливає $f(x) \geq 0$, а тому і існування кореня $\sqrt[2n]{f(x)}$.

Отже, врахування ОДЗ рівняння (1) не позбавляє від зайвих коренів, набутих в рівнянні (2).

Перевірка коренів

Часто зайві корені можна виявити після підстановки знайдених коренів в початкове рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1}=1-x$.

Розв'язання. Після піднесення до квадрату обох частин рівняння будемо мати

$$x+1=(1-x)^2 \iff x+1=1-2x+x^2 \iff 0=x^2-3x \iff$$
$$\iff x(x-3)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Виконуємо перевірку, підставляючи знайдені корені в початкове рівняння:

1) при $x=0$ отримуємо $\sqrt{0+1}=1-0$, тобто $\sqrt{1}=1$ (істина);

2) при $x=3$ отримуємо $\sqrt{3+1}=1-3$, тобто $\sqrt{4}=-2$ (хибна рівність).

Отже, рівняння має лише корінь $x=0$.

Відповідь: $x=0$.

Перевірка коренів

Часто зайві корені можна виявити після підстановки знайдених коренів в початкове рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = 1 - x$.

Розв'язання. Після піднесення до квадрату обох частин рівняння будемо мати

$$x+1 = (1-x)^2 \iff x+1 = 1-2x+x^2 \iff 0 = x^2-3x \iff$$

$$\iff x(x-3) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Виконуємо перевірку, підставляючи знайдені корені в початкове рівняння:

1) при $x=0$ отримуємо $\sqrt{0+1} = 1-0$, тобто $\sqrt{1} = 1$ (істина);

2) при $x=3$ отримуємо $\sqrt{3+1} = 1-3$, тобто $\sqrt{4} = -2$ (хибна рівність).

Отже, рівняння має лише корінь $x=0$.

Відповідь: $x=0$.

Перевірка коренів

Часто зайві корені можна виявити після підстановки знайдених коренів в початкове рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = 1 - x$.

Розв'язання. Після піднесення до квадрату обох частин рівняння будемо мати

$$x+1=(1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1=1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0=x^2-3x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x(x-3)=0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Виконуємо перевірку, підставляючи знайдені корені в початкове рівняння:

1) при $x=0$ отримуємо $\sqrt{0+1}=1-0$,
тобто $\sqrt{1}=1$ (істина);

2) при $x=3$ отримуємо $\sqrt{3+1}=1-3$,
тобто $\sqrt{4}=-2$ (хибна рівність).

Отже, рівняння має лише корінь $x=0$.

Відповідь: $x=0$.

Перевірка коренів

Часто зайві корені можна виявити після підстановки знайдених коренів в початкове рівняння.

П р и к л а д 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = 1 - x$.

Р о з в' я з а н н я. Після піднесення до квадрату обох частин рівняння будемо мати

$$x+1 = (1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1 = 1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0 = x^2-3x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x(x-3) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Виконуємо перевірку, підставляючи знайдені корені в початкове рівняння:

1) при $x = 0$ отримуємо $\sqrt{0+1} = 1-0$, тобто $\sqrt{1} = 1$ (істина);

2) при $x = 3$ отримуємо $\sqrt{3+1} = 1-3$, тобто $\sqrt{4} = -2$ (хибна рівність).

Отже, рівняння має лише корінь $x = 0$.

В і д п о в і д ь: $x = 0$.

Перевірка коренів

Часто зайві корені можна виявити після підстановки знайдених коренів в початкове рівняння.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = 1 - x$.

Розв'язання. Після піднесення до квадрату обох частин рівняння будемо мати

$$x+1 = (1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1 = 1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0 = x^2-3x \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x(x-3) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Виконуємо перевірку, підставляючи знайдені корені в початкове рівняння:

1) при $x=0$ отримуємо $\sqrt{0+1} = 1-0$,
тобто $\sqrt{1} = 1$ (істина);

2) при $x=3$ отримуємо $\sqrt{3+1} = 1-3$,
тобто $\sqrt{4} = -2$ (хибна рівність).

Отже, рівняння має лише корінь $x=0$.

Відповідь: $x=0$.

Про піднесення до парного степеня

Підкреслимо, що піднесення нерівностей до парного степеня може привести не тільки до появи зайвих розв'язків, але і до втрати розв'язків, що підтверджує розглянутий приклад 2.

Рівняння (і навіть нерівності) можна піднести до парного степеня на ОДЗ, якщо точно відомо, що обидві частини рівняння (чи нерівності) є невід'ємними.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+2} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається умовою $x+2 \geq 0$. Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності є невід'ємними, то їх можна піднести до квадрату. При цьому отримаємо нерівність $x+2 \geq 9$, з якої автоматично випливає виконання умови $x+2 \geq 0$, тобто всі розв'язки нерівності $x+2 \geq 9$ належать ОДЗ. Отже, $\sqrt{x+2} \geq 3 \Longleftrightarrow x+2 \geq 9 \Longleftrightarrow x \geq 7$.

Відповідь: $x \in [7, \infty)$.

Про піднесення до парного степеня

Підкреслимо, що піднесення нерівностей до парного степеня може привести не тільки до появи зайвих розв'язків, але і до втрати розв'язків, що підтверджує розглянутий приклад 2.

Рівняння (і навіть нерівності) можна піднести до парного степеня на ОДЗ, якщо точно відомо, що обидві частини рівняння (чи нерівності) є невід'ємними.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+2} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається умовою $x+2 \geq 0$. Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності є невід'ємними, то їх можна піднести до квадрату. При цьому отримаємо нерівність $x+2 \geq 9$, з якої автоматично випливає виконання умови $x+2 \geq 0$, тобто всі розв'язки нерівності $x+2 \geq 9$ належать ОДЗ.
Отже, $\sqrt{x+2} \geq 3 \Longleftrightarrow x+2 \geq 9 \Longleftrightarrow x \geq 7$.

Відповідь: $x \in [7, \infty)$.

Про піднесення до парного степеня

Підкреслимо, що піднесення нерівностей до парного степеня може привести не тільки до появи зайвих розв'язків, але і до втрати розв'язків, що підтверджує розглянутий приклад 2.

Рівняння (і навіть нерівності) можна піднести до парного степеня на ОДЗ, якщо точно відомо, що обидві частини рівняння (чи нерівності) є невід'ємними.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+2} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається умовою $x+2 \geq 0$. Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності є невід'ємними, то їх можна піднести до квадрату. При цьому отримаємо нерівність $x+2 \geq 9$, з якої автоматично випливає виконання умови $x+2 \geq 0$, тобто всі розв'язки нерівності $x+2 \geq 9$ належать ОДЗ.
Отже, $\sqrt{x+2} \geq 3 \Longleftrightarrow x+2 \geq 9 \Longleftrightarrow x \geq 7$.

Відповідь: $x \in [7, \infty)$.

Про піднесення до парного степеня

Підкреслимо, що піднесення нерівностей до парного степеня може привести не тільки до появи зайвих розв'язків, але і до втрати розв'язків, що підтверджує розглянутий приклад 2.
Рівняння (і навіть нерівності) можна піднести до парного степеня на ОДЗ, якщо точно відомо, що обидві частини рівняння (чи нерівності) є невід'ємними.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+2} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається умовою $x+2 \geq 0$. Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності є невід'ємними, то їх можна піднести до квадрату. При цьому отримаємо нерівність $x+2 \geq 9$, з якої автоматично випливає виконання умови $x+2 \geq 0$, тобто всі розв'язки нерівності $x+2 \geq 9$ належать ОДЗ.
Отже, $\sqrt{x+2} \geq 3 \Longleftrightarrow x+2 \geq 9 \Longleftrightarrow x \geq 7$.

Відповідь: $x \in [7, \infty)$.

Про піднесення до парного степеня

Підкреслимо, що піднесення нерівностей до парного степеня може привести не тільки до появи зайвих розв'язків, але і до втрати розв'язків, що підтверджує розглянутий приклад 2.

Рівняння (і навіть нерівності) можна піднести до парного степеня на ОДЗ, якщо точно відомо, що обидві частини рівняння (чи нерівності) є невід'ємними.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+2} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ нерівності визначається умовою $x+2 \geq 0$. Оскільки на ОДЗ обидві частини нерівності є невід'ємними, то їх можна піднести до квадрату. При цьому отримаємо нерівність $x+2 \geq 9$, з якої автоматично випливає виконання умови $x+2 \geq 0$, тобто всі розв'язки нерівності $x+2 \geq 9$ належать ОДЗ. Отже, $\sqrt{x+2} \geq 3 \Longleftrightarrow x+2 \geq 9 \Longleftrightarrow x \geq 7$.

Відповідь: $x \in [7, \infty)$.

Про піднесення до непарного степеня

Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до непарного степеня є рівносильним перетворенням.

Наприклад,

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1},$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow f(x) < (g(x))^{2n+1} \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt[5]{x+2} \le \sqrt[5]{3-2x}$.

Розв'язання. Наступні перетворення нерівності є рівносильними:

$$\sqrt[5]{x+2} \le \sqrt[5]{3-2x} \Longleftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^5 \le (\sqrt[5]{3-2x})^5 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x+2 \le 3-2x \Longleftrightarrow 3x \le 1 \Longleftrightarrow x \le 1/3.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1/3]$.

Про піднесення до непарного степеня

Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до непарного степеня є рівносильним перетворенням.

Наприклад,

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1},$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow f(x) < (g(x))^{2n+1} \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x}$.

Розв'язання. Наступні перетворення нерівності є рівносильними:

$$\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x} \Longleftrightarrow (\sqrt[5]{x+2})^5 \leq (\sqrt[5]{3-2x})^5 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x+2 \leq 3-2x \Longleftrightarrow 3x \leq 1 \Longleftrightarrow x \leq 1/3.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1/3]$.

Про піднесення до непарного степеня

Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до непарного степеня є рівносильним перетворенням.

Наприклад,

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^{2n+1},$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \iff f(x) < (g(x))^{2n+1} \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x}$.

Розв'язання. Наступні перетворення нерівності є рівносильними:

$$\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x} \iff (\sqrt[5]{x+2})^5 \leq (\sqrt[5]{3-2x})^5 \iff$$

$$\iff x+2 \leq 3-2x \iff 3x \leq 1 \iff x \leq 1/3.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1/3]$.

Про піднесення до непарного степеня

Піднесення обох частин рівняння чи нерівності до непарного степеня є рівносильним перетворенням.

Наприклад,

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^{2n+1},$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \iff f(x) < (g(x))^{2n+1} \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x}$.

Розв'язання. Наступні перетворення нерівності є рівносильними:

$$\sqrt[5]{x+2} \leq \sqrt[5]{3-2x} \iff (\sqrt[5]{x+2})^5 \leq (\sqrt[5]{3-2x})^5 \iff$$

$$\iff x+2 \leq 3-2x \iff 3x \leq 1 \iff x \leq 1/3.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1/3]$.

Теореми про корінь парного степеня

Для перетворення рівнянь і нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, де $n \in \mathbf{N}$, і т.п. в загальному випадку застосовуються теореми про рівносильні перетворення.

Наступна теорема випливає безпосередньо з означення кореня парного степеня.

Теорема 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 1 є незамінною, зокрема, в ситуаціях, коли перевірку коренів виконати важко (наприклад, якщо корені рівняння — ірраціональні числа).

П р и к л а д 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося теоремою 1:

$$\sqrt{x+2} = 1 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x+2 = (1-x)^2. \end{cases}$$

Теореми про корінь парного степеня

Для перетворення рівнянь і нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, де $n \in \mathbf{N}$, і т.п. в загальному випадку застосовуються теореми про рівносильні перетворення.

Наступна теорема випливає безпосередньо з означення кореня парного степеня.

Теорема 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 1 є незамінною, зокрема, в ситуаціях, коли перевірку коренів виконати важко (наприклад, якщо корені рівняння — ірраціональні числа).

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 1:

$$\sqrt{x+2} = 1 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 2 = (1-x)^2. \end{cases}$$

Теореми про корінь парного степеня

Для перетворення рівнянь і нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, де $n \in \mathbf{N}$, і т.п. в загальному випадку застосовуються теореми про рівносильні перетворення.

Наступна теорема випливає безпосередньо з означення кореня парного степеня.

Теорема 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 1 є незамінною, зокрема, в ситуаціях, коли перевірку коренів виконати важко (наприклад, якщо корені рівняння — ірраціональні числа).

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 1:

$$\sqrt{x+2} = 1 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 2 = (1-x)^2. \end{cases}$$

Теореми про корінь парного степеня

Для перетворення рівнянь і нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, де $n \in \mathbf{N}$, і т.п. в загальному випадку застосовуються теореми про рівносильні перетворення.

Наступна теорема випливає безпосередньо з означення кореня парного степеня.

Теорема 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 1 є незамінною, зокрема, в ситуаціях, коли перевірку коренів виконати важко (наприклад, якщо корені рівняння — ірраціональні числа).

П р и к л а д 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося теоремою 1:

$$\sqrt{x+2} = 1 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 2 = (1-x)^2. \end{cases}$$

Теореми про корінь парного степеня

Для перетворення рівнянь і нерівностей виду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, де $n \in \mathbf{N}$, і т.п. в загальному випадку застосовуються теореми про рівносильні перетворення.

Наступна теорема випливає безпосередньо з означення кореня парного степеня.

Теорема 1.

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 1 є незамінною, зокрема, в ситуаціях, коли перевірку коренів виконати важко (наприклад, якщо корені рівняння — ірраціональні числа).

П р и к л а д 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} = 1 - x$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося теоремою 1:

$$\sqrt{x+2} = 1 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ x + 2 = (1 - x)^2. \end{cases}$$

Теореми про корінь парного степеня

Розв'язуючи квадратне рівняння системи
$x+2=(1-x)^2 \iff x+2=1-2x+x^2 \iff$

$$\iff x^2-3x-1=0 \iff x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

і нерівність $1-x\geq 0 \iff 1\geq x \iff x\leq 1$,
приходимо до системи

$$\begin{cases} x\leq 1, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

розв'язком якої є корінь квадратного рівняння, не більший одиниці, тобто $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Відповідь: $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Теореми про корінь парного степеня

Розв'язуючи квадратне рівняння системи

$$x+2=(1-x)^2 \Longleftrightarrow x+2=1-2x+x^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^2-3x-1=0 \Longleftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$$

і нерівність $1-x\geq 0 \Longleftrightarrow 1\geq x \Longleftrightarrow x\leq 1$,

приходимо до системи

$$\begin{cases} x\leq 1, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

розв'язком якої є корінь квадратного рівняння, не більший одиниці, тобто $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Відповідь: $x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$.

Теореми про корінь парного степеня

Теорема 2.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 2.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) \leq 0$, а на іншій – виконується нерівність $g(x) > 0$. Оскільки корінь $\sqrt[2n]{f(x)}$ не набуває від'ємних значень за означенням арифметичного кореня парного степеня, то очевидно, що нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) \leq 0$. На іншій її частині, де $g(x) > 0$, необхідно, перш за все, врахувати область визначення функції $\sqrt[2n]{f(x)}$, тобто нерівність $f(x) \geq 0$. Потім з урахуванням того, що тепер обидві частини нерівності є невід'ємними, після піднесення їх до степеня $2n$ отримаємо третю нерівність системи: $f(x) < (g(x))^{2n}$. Теорему доведено.

Теореми про корінь парного степеня

Теорема 2.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Наведемо доведення теореми 2.
Розділимо числову пряму на дві частини, на одній з яких $g(x) \leq 0$, а на іншій – виконується нерівність $g(x) > 0$. Оскільки корінь $\sqrt[2n]{f(x)}$ не набуває від'ємних значень за означенням арифметичного кореня парного степеня, то очевидно, що нерівність $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ не має розв'язків на тій частині числової прямої, де $g(x) \leq 0$. На іншій її частині, де $g(x) > 0$, необхідно, перш за все, врахувати область визначення функції $\sqrt[2n]{f(x)}$, тобто нерівність $f(x) \geq 0$. Потім з урахуванням того, що тепер обидві частини нерівності є невід'ємними, після піднесення їх до степеня $2n$ отримаємо третю нерівність системи: $f(x) < (g(x))^{2n}$. Теорему доведено.

Теореми про корінь парного степеня

П р и к л а д 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} < 1-x$.

Р о з в' я з а н н я. Теорема 2 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} < 1-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+1 < (1-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи лінійні нерівності системи, отримуємо

$$1-x > 0 \Longleftrightarrow x < 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Перетворимо квадратну нерівність системи:

$x+1 < (1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1 < 1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0 < x^2-3x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2-3x > 0$ і розв'яжемо її графічним методом:

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} < 1 - x$.

Розв'язання. Теорема 2 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} < 1 - x \iff \begin{cases} 1 - x > 0, \\ x + 1 \geq 0, \\ x + 1 < (1 - x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи лінійні нерівності системи, отримуємо

$$1 - x > 0 \iff x < 1 \iff x \in (-\infty, 1),$$
$$x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1 \iff x \in [-1, \infty).$$

Перетворимо квадратну нерівність системи:

$$x + 1 < (1 - x)^2 \iff x + 1 < 1 - 2x + x^2 \iff 0 < x^2 - 3x \iff$$
$$\iff x^2 - 3x > 0$$ і розв'яжемо її графічним методом:

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} < 1 - x$.

Розв'язання. Теорема 2 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} g(x) > 0\,, \\ f(x) \geq 0\,, \\ f(x) < (g(x))^2\,. \end{cases}$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} < 1 - x \iff \begin{cases} 1 - x > 0\,, \\ x + 1 \geq 0\,, \\ x + 1 < (1-x)^2\,. \end{cases}$$

Розв'язуючи лінійні нерівності системи, отримуємо

$$1 - x > 0 \iff x < 1 \iff x \in (-\infty, 1)\,,$$
$$x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1 \iff x \in [-1, \infty)\,.$$

Перетворимо квадратну нерівність системи:

$x + 1 < (1-x)^2 \iff x + 1 < 1 - 2x + x^2 \iff 0 < x^2 - 3x \iff$
$\iff x^2 - 3x > 0$ і розв'яжемо її графічним методом:

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} < 1-x$.

Розв'язання. Теорема 2 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} < 1-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+1 < (1-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи лінійні нерівності системи, отримуємо

$$1-x > 0 \Longleftrightarrow x < 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Перетворимо квадратну нерівність системи:
$x+1 < (1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1 < 1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0 < x^2-3x \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-3x > 0$ і розв'яжемо її графічним методом:

Теореми про корінь парного степеня

П р и к л а д 7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} < 1-x$.

Р о з в' я з а н н я. Теорема 2 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

У відповідності з цією теоремою маємо

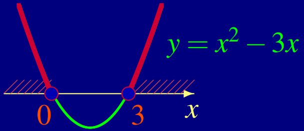
$$\sqrt{x+1} < 1-x \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x+1 < (1-x)^2. \end{cases}$$

Розв'язуючи лінійні нерівності системи, отримуємо

$$1-x > 0 \Longleftrightarrow x < 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Перетворимо квадратну нерівність системи:
$x+1 < (1-x)^2 \Longleftrightarrow x+1 < 1-2x+x^2 \Longleftrightarrow 0 < x^2-3x \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2-3x > 0$ і розв'яжемо її графічним методом:

Теореми про корінь парного степеня



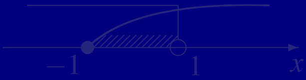
$x^2-3x>0 \iff$

$\iff x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$

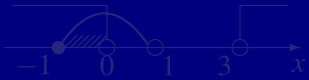
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ x+1\geq 0, \\ x+1<(1-x)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-\infty,1), & \mathrm{I} \\ x\in[-1,\infty), & \mathrm{II} \\ x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty). & \mathrm{III} \end{cases}$$

Перетинаємо спочатку множини $\mathrm{I}=(-\infty,1)$ і $\mathrm{II}=[-1,\infty)$ (див. мал. зліва). Отриману множину $\mathrm{IV}=[-1;1)$ потім перетинаємо з множиною $\mathrm{III}=(-\infty,0)\cup(3,\infty)$ (див. мал. справа) і отримуємо множину $[-1;0)$.



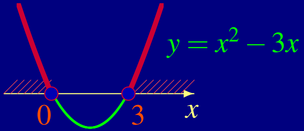
$\mathrm{I}\cap\mathrm{II}=[-1;1)=\mathrm{IV}$



$\mathrm{IV}\cap\mathrm{III}=[-1;0)$

Відповідь: $x\in[-1;0)$.

Теореми про корінь парного степеня



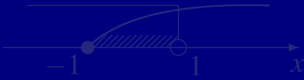
$x^2 - 3x > 0 \iff$

$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

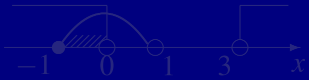
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\begin{cases} 1 - x > 0, \\ x + 1 \geq 0, \\ x + 1 < (1 - x)^2, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 1), & \mathrm{I} \\ x \in [-1, \infty), & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty). & \mathrm{III} \end{cases}$$

Перетинаємо спочатку множини $\mathrm{I} = (-\infty, 1)$ і $\mathrm{II} = [-1, \infty)$ (див. мал. зліва). Отриману множину $\mathrm{IV} = [-1; 1)$ потім перетинаємо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ (див. мал. справа) і отримуємо множину $[-1; 0)$.



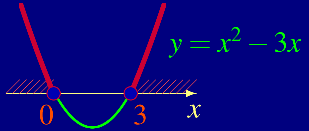
$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-1; 1) = \mathrm{IV}$



$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-1; 0)$

Відповідь: $x \in [-1; 0)$.

Теореми про корінь парного степеня



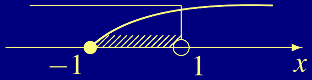
$x^2 - 3x > 0 \iff$

$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

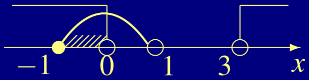
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\begin{cases} 1 - x > 0\,, \\ x + 1 \geq 0\,, \\ x + 1 < (1-x)^2\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 1)\,, & \mathrm{I} \\ x \in [-1, \infty)\,, & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)\,. & \mathrm{III} \end{cases}$$

Перетинаємо спочатку множини $\mathrm{I} = (-\infty, 1)$ і $\mathrm{II} = [-1, \infty)$ (див. мал. зліва). Отриману множину $\mathrm{IV} = [-1; 1)$ потім перетинаємо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ (див. мал. справа) і отримуємо множину $[-1; 0)$.



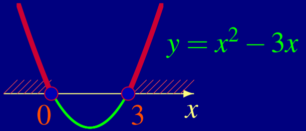
$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-1; 1) = \mathrm{IV}$



$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-1; 0)$

Відповідь: $x \in [-1; 0)$.

Теореми про корінь парного степеня



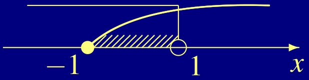
$x^2 - 3x > 0 \iff$

$\iff x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

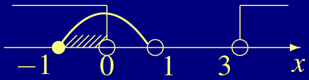
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\begin{cases} 1 - x > 0\,, \\ x + 1 \geq 0\,, \\ x + 1 < (1-x)^2\,, \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 1)\,, & \mathrm{I} \\ x \in [-1, \infty)\,, & \mathrm{II} \\ x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)\,. & \mathrm{III} \end{cases}$$

Перетинаємо спочатку множини $\mathrm{I} = (-\infty, 1)$ і $\mathrm{II} = [-1, \infty)$ (див. мал. зліва). Отриману множину $\mathrm{IV} = [-1; 1)$ потім перетинаємо з множиною $\mathrm{III} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ (див. мал. справа) і отримуємо множину $[-1; 0)$.



$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = [-1; 1) = \mathrm{IV}$



$\mathrm{IV} \cap \mathrm{III} = [-1; 0)$

Відповідь: $x \in [-1; 0)$.

Теореми про корінь парного степеня

Теорема 3.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Наведемо доведення теореми 3.

Розглянемо два випадки: $g(x) \geq 0$ (перша система сукупності) та $g(x) < 0$ (друга система сукупності).

В першому випадку $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \geq 0$, тобто обидві частини початкової нерівності є невід'ємними. Після піднесення їх до степеня $2n$ отримаємо другу нерівність системи: $f(x) > (g(x))^{2n}$.

В другому випадку права частина нерівності від'ємна, тому піднесення нерівності до степеня $2n$ є неприпустимим!

Тут слід врахувати, що на області визначення функції $\sqrt[2n]{f(x)}$ виконується нерівність $f(x) \geq 0$ (друга нерівність системи), при виконанні якої ліва частина початкової нерівності більша від'ємної правої частини. Теорему доведено.

Теореми про корінь парного степеня

Теорема 3.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Наведемо доведення теореми 3.
Розглянемо два випадки: $g(x) \geq 0$ (перша система сукупності) та $g(x) < 0$ (друга система сукупності).
В першому випадку $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \geq 0$, тобто обидві частини початкової нерівності є невід'ємними. Після піднесення їх до степеня $2n$ отримаємо другу нерівність системи: $f(x) > (g(x))^{2n}$.
В другому випадку права частина нерівності від'ємна, тому піднесення нерівності до степеня $2n$ є неприпустимим!
Тут слід врахувати, що на області визначення функції $\sqrt[2n]{f(x)}$ виконується нерівність $f(x) \geq 0$ (друга нерівність системи), при виконанні якої ліва частина початкової нерівності більша від'ємної правої частини. Теорему доведено.

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Розв'язання. Теорема 3 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} > 1-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+1 > (1-x)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x < 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи лінійні нерівності систем, отримуємо

$$1-x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 \quad \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1],$$
$$1-x < 0 \Longleftrightarrow x > 1 \quad \Longleftrightarrow x \in (1, \infty),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Розв'язання. Теорема 3 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} > 1-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 1-x \geq 0, \\ x+1 > (1-x)^2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 1-x < 0, \\ x+1 \geq 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Розв'язуючи лінійні нерівності систем, отримуємо

$$1-x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1],$$
$$1-x < 0 \Longleftrightarrow x > 1 \Longleftrightarrow x \in (1, \infty),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Теореми про корінь парного степеня

П р и к л а д 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Р о з в' я з а н н я. Теорема 3 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} > 1-x \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+1 > (1-x)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x < 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи лінійні нерівності систем, отримуємо

$$1-x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1],$$
$$1-x < 0 \Longleftrightarrow x > 1 \Longleftrightarrow x \in (1, \infty),$$
$$x+1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq -1 \Longleftrightarrow x \in [-1, \infty).$$

Теореми про корінь парного степеня

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Розв'язання. Теорема 3 для квадратного кореня набуває вигляду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

У відповідності з цією теоремою маємо

$$\sqrt{x+1} > 1-x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x+1 > (1-x)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x < 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи лінійні нерівності систем, отримуємо

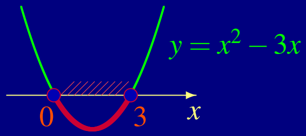
$$1-x \geq 0 \iff x \leq 1 \iff x \in (-\infty, 1],$$
$$1-x < 0 \iff x > 1 \iff x \in (1, \infty),$$
$$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \iff x \in [-1, \infty).$$

Теореми про корінь парного степеня

Перетворимо квадратну нерівність першої системи:

$$x+1>(1-x)^2 \iff x+1>1-2x+x^2 \iff 0>x^2-3x \iff$$

$\iff x^2-3x<0$ і розв'яжемо її графічним методом:



$$x^2-3x<0 \iff x\in(0;3)$$

Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}1-x\geq 0,\\ x+1>(1-x)^2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}1-x<0,\\ x+1\geq 0.\end{array}\right.\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{ll}\left\{\begin{array}{l}x\in(-\infty,1],\\ x\in(0;3),\end{array}\right. & \begin{array}{l}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\end{array}\\ \left\{\begin{array}{l}x\in(1,\infty),\\ x\in[-1,\infty).\end{array}\right. & \begin{array}{l}\mathrm{III}\\ \mathrm{IV}\end{array}\end{array}\right.$$

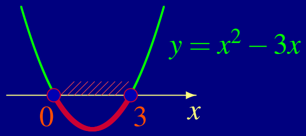
Перетинаючи множини $\mathrm{I}=(-\infty,1]$ і $\mathrm{II}=(0;3)$, а також множини $\mathrm{III}=(1,\infty)$ і $\mathrm{IV}=[-1,\infty)$, знаходимо розв'язки систем:

Теореми про корінь парного степеня

Перетворимо квадратну нерівність першої системи:

$x+1>(1-x)^2 \iff x+1>1-2x+x^2 \iff 0>x^2-3x \iff$

$\iff x^2-3x<0$ і розв'яжемо її графічним методом:



$x^2-3x<0 \iff x\in(0;3)$

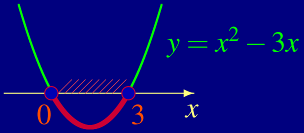
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x\geq 0,\\ x+1>(1-x)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}1-x<0,\\ x+1\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty,1], & \text{I}\\ x\in(0;3), & \text{II}\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,\infty), & \text{III}\\ x\in[-1,\infty). & \text{IV}\end{cases}\end{array}\right.$$

Перетинаючи множини $\text{I}=(-\infty,1]$ і $\text{II}=(0;3)$, а також множини $\text{III}=(1,\infty)$ і $\text{IV}=[-1,\infty)$, знаходимо розв'язки систем:

Теореми про корінь парного степеня

Перетворимо квадратну нерівність першої системи:
$x+1>(1-x)^2 \iff x+1>1-2x+x^2 \iff 0>x^2-3x \iff$
$\iff x^2-3x<0$ і розв'яжемо її графічним методом:



$x^2-3x<0 \iff x\in(0;3)$

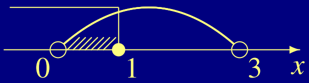
Отже, після розв'язання нерівностей отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x\geq 0,\\ x+1>(1-x)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}1-x<0,\\ x+1\geq 0.\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty,1], & \mathbf{I}\\ x\in(0;3), & \mathbf{II}\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,\infty), & \mathbf{III}\\ x\in[-1,\infty). & \mathbf{IV}\end{cases}\end{array}\right.$$

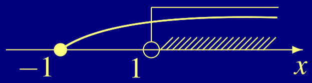
Перетинаючи множини $\mathbf{I}=(-\infty,1]$ і $\mathbf{II}=(0;3)$, а також множини $\mathbf{III}=(1,\infty)$ і $\mathbf{IV}=[-1,\infty)$, знаходимо розв'язки систем:

Теореми про корінь парного степеня

Перетинаючи множини $\mathbf{I} = (-\infty, 1]$ і $\mathbf{II} = (0;3)$, а також множини $\mathbf{III} = (1, \infty)$ і $\mathbf{IV} = [-1, \infty)$, знаходимо розв'язки систем:



$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = (0;1]$

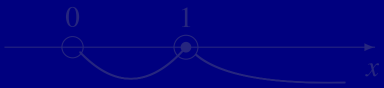


$\mathbf{III} \cap \mathbf{IV} = (1, \infty)$

У такий спосіб отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (0;1], & A \\ x \in (1, \infty). & B \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини $A = (0;1]$ і $B = (1, \infty)$, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності

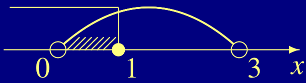


$A \cup B = (0, \infty)$

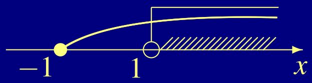
Відповідь: $x \in (0; \infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Перетинаючи множини $\mathbf{I} = (-\infty, 1]$ і $\mathbf{II} = (0;3)$, а також множини $\mathbf{III} = (1, \infty)$ і $\mathbf{IV} = [-1, \infty)$, знаходимо розв'язки систем:



$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = (0;1]$

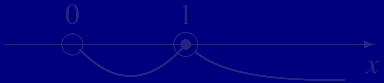


$\mathbf{III} \cap \mathbf{IV} = (1, \infty)$

У такий спосіб отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (0;1], & A \\ x \in (1, \infty). & B \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини $A = (0;1]$ і $B = (1, \infty)$, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності

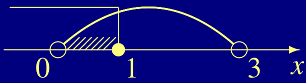


$A \cup B = (0, \infty)$

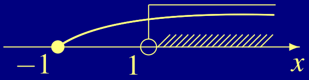
Відповідь: $x \in (0; \infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Перетинаючи множини $\mathbf{I} = (-\infty, 1]$ і $\mathbf{II} = (0;3)$, а також множини $\mathbf{III} = (1, \infty)$ і $\mathbf{IV} = [-1, \infty)$, знаходимо розв'язки систем:



$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = (0;1]$

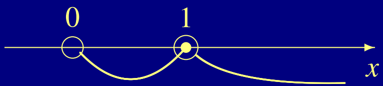


$\mathbf{III} \cap \mathbf{IV} = (1, \infty)$

У такий спосіб отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (0;1]\,, & A \\ x \in (1, \infty)\,. & B \end{array}\right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини $A = (0;1]$ і $B = (1, \infty)$, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності

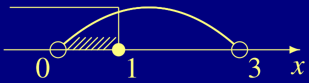


$A \cup B = (0, \infty)$

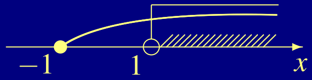
Відповідь: $x \in (0;\infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Перетинаючи множини $\mathbf{I} = (-\infty, 1]$ і $\mathbf{II} = (0; 3)$, а також множини $\mathbf{III} = (1, \infty)$ і $\mathbf{IV} = [-1, \infty)$, знаходимо розв'язки систем:



$\mathbf{I} \cap \mathbf{II} = (0; 1]$

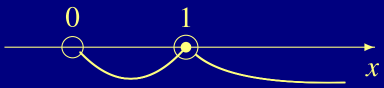


$\mathbf{III} \cap \mathbf{IV} = (1, \infty)$

У такий спосіб отримуємо сукупність

$$\left[\begin{array}{ll} x \in (0; 1]\,, & A \\ x \in (1, \infty)\,. & B \end{array} \right.$$

Нарешті, об'єднуючи множини $A = (0; 1]$ і $B = (1, \infty)$, знаходимо множину розв'язків початкової нерівності



$A \cup B = (0, \infty)$

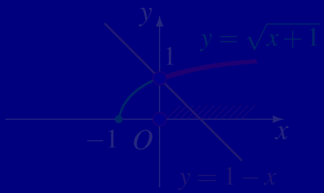
Відповідь: $x \in (0; \infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Розглянемо також розв'язання нерівності з попереднього прикладу графічним методом.

П р и к л а д 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1 - x$.

Р о з в' я з а н н я. Графік функції $y = \sqrt{x+1}$ отримується з графіка функції $y = \sqrt{x}$ зсувом вліво вздовж осі Ox на одиницю. Графік функції $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ і пряма $y = g(x) = 1 - x$ перетинаються в одній точці. Абсциса цієї точки $x = 0$, оскільки $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$ і $g(0) = 1 - 0 = 1$. Відмітимо частину кривої $y = \sqrt{x+1}$,



розміщену вище прямої $y = 1 - x$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x \in (0, \infty)$.

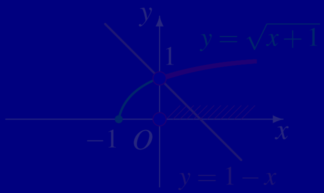
В і д п о в і д ь: $x \in (0, \infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Розглянемо також розв'язання нерівності з попереднього прикладу графічним методом.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Розв'язання. Графік функції $y=\sqrt{x+1}$ отримується з графіка функції $y=\sqrt{x}$ зсувом вліво вздовж осі Ox на одиницю. Графік функції $y=f(x)=\sqrt{x+1}$ і пряма $y=g(x)=1-x$ перетинаються в одній точці. Абсциса цієї точки $x=0$, оскільки $f(0)=\sqrt{0+1}=1$ і $g(0)=1-0=1$. Відмітимо частину кривої $y=\sqrt{x+1}$,



розміщену вище прямої $y=1-x$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x\in(0,\infty)$.

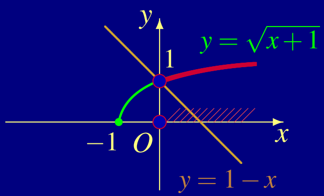
Відповідь: $x\in(0,\infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Розглянемо також розв'язання нерівності з попереднього прикладу графічним методом.

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Розв'язання. Графік функції $y=\sqrt{x+1}$ отримується з графіка функції $y=\sqrt{x}$ зсувом вліво вздовж осі Ox на одиницю. Графік функції $y=f(x)=\sqrt{x+1}$ і пряма $y=g(x)=1-x$ перетинаються в одній точці. Абсциса цієї точки $x=0$, оскільки $f(0)=\sqrt{0+1}=1$ і $g(0)=1-0=1$. Відмітимо частину кривої $y=\sqrt{x+1}$,



розміщену вище прямої $y=1-x$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x\in(0,\infty)$.

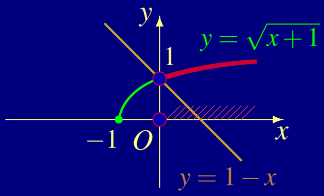
Відповідь: $x\in(0,\infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Розглянемо також розв'язання нерівності з попереднього прикладу графічним методом.

П р и к л а д 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Р о з в' я з а н н я. Графік функції $y=\sqrt{x+1}$ отримується з графіка функції $y=\sqrt{x}$ зсувом вліво вздовж осі Ox на одиницю. Графік функції $y=f(x)=\sqrt{x+1}$ і пряма $y=g(x)=1-x$ перетинаються в одній точці. Абсциса цієї точки $x=0$, оскільки $f(0)=\sqrt{0+1}=1$ і $g(0)=1-0=1$. Відмітимо частину кривої $y=\sqrt{x+1}$,



розміщену вище прямої $y=1-x$, і спроектуємо її на вісь Ox, відмічаючи штриховкою відповідний проміжок. В результаті отримаємо $x\in(0,\infty)$.

В і д п о в і д ь: $x\in(0,\infty)$.

Теореми про корінь парного степеня

Наступні теореми 4 і 5 для нестрогих нерівностей доводяться так само, як відповідно теореми 2 і 3, що встановлюють рівносильні перетворення аналогічних строгих нерівностей.

Теорема 4.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \le (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 5.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (g(x))^{2n}. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Теореми про корінь парного степеня

Наступні теореми 4 і 5 для нестрогих нерівностей доводяться так само, як відповідно теореми 2 і 3, що встановлюють рівносильні перетворення аналогічних строгих нерівностей.

Теорема 4.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \le (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 5.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (g(x))^{2n}. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теореми про корінь парного степеня

Наступні теореми 4 і 5 для нестрогих нерівностей доводяться так само, як відповідно теореми 2 і 3, що встановлюють рівносильні перетворення аналогічних строгих нерівностей.

Теорема 4.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Теорема 5.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq (g(x))^{2n}. \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$