

•

5.243. Вершина правильної трикутної піраміди є центром сфери, а вершини основи піраміди лежать на поверхні цієї сфери. Відношення площі повної поверхні піраміди до площі сфери дорівнює k/π . Знайти плоский кут при вершині піраміди.

Відповідь: $\alpha = \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{8k - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ при $k \in (0; 3\sqrt{38})$.

5.244. Відношення об'єму конуса до об'єму вписаної в нього кулі дорівнює k . Знайти кут між твірною конуса і площею основи конуса.

Відповідь: $\gamma = 2\arctg \sqrt{\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k}}{2k}}$ при $k \geq 2$.

5.3. Елементи аналітичної геометрії на площині

Група А

Записати рівняння прямої l_1 , яка паралельна прямій l , і прямої l_2 , яка перпендикулярна прямій l , за умови, що l_1 і l_2 проходять через точку M (завдання **5.245** – **5.252**), якщо:

5.245. $l : y = 2x + 15, M(1; -2)$. Відповідь: $l_1 : y = 2x - 4; l_2 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

5.245.* [1, § 33, приклад 1, с. 184] $l : y = 4x + 3, M(3; -2)$.

Відповідь: $l_1 : y = 4x - 14; l_2 : y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$.

5.246. $l : y = 3x + 17, M(2; -1)$. Відповідь: $l_1 : y = 3x - 7; l_2 : y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

5.247. $l : y = -2x + 8, M(-2; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = -2x - 3; l_2 : y = \frac{1}{2}x + 2$.

5.248. $l : y = -3x - 7, M(-3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = -3x - 5; l_2 : y = \frac{1}{3}x + 5$.

5.249. $l : 2y - x + 12 = 0, M(4; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = \frac{1}{2}x - 1; l_2 : y = 9 - 2x$.

5.250. $l : 2y + x - 6 = 0, M(4; 1)$. Відповідь: $l_1 : y = 3 - \frac{1}{2}x; l_2 : y = 2x - 7$.

5.251. $l : 3y + x - 5 = 0, M(3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = 5 - \frac{1}{3}x; l_2 : y = 3x - 5$.

5.252. $l : 3y - x + 8 = 0, M(3; 4)$. Відповідь: $l_1 : y = \frac{1}{3}x + 3; l_2 : y = 13 - 3x$.

•

5.253. Записати рівняння прямої, що проходить через центри заданих кіл:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x - 12y - 46 = 0$. Відповідь: $y = x + 3$.

б) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 11 = 0$ і $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 24 = 0$. Відповідь: $y = -x - 2$.

в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x + 12y - 4 = 0$. Відповідь: $y = 2x - 4$.

г) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$ і $x^2 + y^2 - 4x + 10y - 7 = 0$. Відповідь: $y = 1 - 3x$.

5.253.* [1, § 33, приклад 4, с. 187] Знайти радіус і центр кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0.$$

Відповідь: центр кола – точка $(3; -2)$, а її радіус $R = 1$.

5.254. Знайти відстань від точки M до прямої l , якщо:

а) $M(4; -2), l : 3x - 4y - 5 = 0$. Відповідь: $\rho(M, l) = 3$;

б) $M(3; 4), l : 5x + 12y - 11 = 0$. Відповідь: $\rho(M, l) = 4$.

5.254.* [1, § 33, приклад 3, с. 186] Знайти відстань від точки $M(3; -2)$ до прямої $l: y = 4x + 3$. Відповідь: $\rho(M, l) = \sqrt{17}$.

5.255. Знайти відстань між паралельними прямими l_1 і l_2 , якщо:

а) $l_1 : 3x + 4y - 8 = 0, l_2 : 3x + 4y + 12 = 0$. Відповідь: $d(l_1, l_2) = 4$;

б) $l_1 : 4x + 3y - 5 = 0, l_2 : 8x + 6y - 3 = 0$. Відповідь: $d(l_1, l_2) = 7/10$.

5.256. Задано пряму $l : -2x + y - 1 = 0$ і точку $M(-1; 2)$. Обчислити відстань від точки M до прямої l . Записати рівняння прямої l_1 , що проходить через M паралельно прямій l , і рівняння прямої l_2 , що проходить через M перпендикулярно прямій l .

Відповідь: $\rho(M, l) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$; $l_1 : y = 2x + 4$; $l_2 : x + 2y - 3 = 0$.

5.257. Записати рівняння прямих, що проходять паралельно прямій $2x + 5y - 7 = 0$ відповідно через початок координат і точку $(7; -1)$.

Відповідь: $2x + 5y = 0, 2x + 5y - 9 = 0$.

5.258. Записати рівняння прямих, що проходять перпендикулярно прямій $3x + 4y + 5 = 0$ відповідно через початок координат і точку $(-1; 2)$.

Відповідь: $4x - 3y = 0, 4x - 3y + 10 = 0$.

•

Знайти координати точки N , що симетрична точці M відносно прямої AB (завдання **5.259** – **5.265**), якщо:

5.259. $A(2; 1), B(0; -1), M(2; 3)$. Відповідь: $N(4; 1)$;

5.259.* [1, § 33, приклад 2, с. 184] Знайти координати точки K , яка симетрична точці $M(3; -2)$ відносно прямої $l: y = 4x + 3$.

Відповідь: $K(-5; 0)$.

5.260. $A(4; 2), B(2; 0), M(4; 4)$. Відповідь: $N(6; 2)$;

5.261. $A(-2; 1), B(4; 3), M(-1; 8)$. Відповідь: $N(3; -4)$;

5.262. $A(-3; -1), B(1; 1), M(-2; 2)$. Відповідь: $N(0; -2)$;

5.263. $A(-2; 3), B(4; 1), M(-1; -4)$. Відповідь: $N(3; 8)$;

5.264. $A(-3; 1), B(1; -1), M(0; 2)$. Відповідь: $N(-2; -2)$;

5.265. $A(3; -4), B(-1; -2), M(8; -9)$. Відповідь: $N(10; -5)$.

•

5.266. Записати рівняння серединного перпендикуляра до відрізка AB , якщо $A(-2; 3), B(4; -7)$.

Відповідь: $3x - 5y - 13 = 0$.

5.267. Знайти координати точок перетину кола $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 12$ з осями координат.

Відповідь: $(-3 \pm 2\sqrt{2}; 0), (0; -2 \pm \sqrt{3})$.

5.268. Записати рівняння кола з центром у точці $(-1; 1)$, що дотикається до кола $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$.

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$; $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 36$.

5.269. Записати рівняння кола з центром у точці $(-1; 5)$, що дотикається до кола $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$; $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

5.270. Знайти координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:

а) $A(4; -4)$, $B(6; -2)$, $C(0; 4)$. Відповідь: $D(-2; 2)$;

б) $A(-1; 3)$, $B(1; 1)$, $C(5; 3)$. Відповідь: $D(3; 5)$.

5.271. В коло $x^2 + y^2 = 169$ вписаний квадрат $ABCD$. Знайти координати вершин B , C і D , якщо $A(5; -12)$.

Відповідь: $B(12; 5)$, $C(-5; 12)$, $D(-12; -5)$.

5.272. Записати рівняння прямої, яка паралельна осі Ox і перетинає коло $x^2 + y^2 = 4$ у точках M і N таких, що $MN = 1$.

Відповідь: $y = \pm\sqrt{15}/2$.

•

5.273. Виразити вектор \vec{c} через вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо:

а) $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (3; 5)$, $\vec{c} = (1; -7)$. Відповідь: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$;

б) $\vec{a} = (5; 4)$, $\vec{b} = (-3; 0)$, $\vec{c} = (19; 8)$. Відповідь: $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

в) $\vec{a} = (-6; 2)$, $\vec{b} = (4; 7)$, $\vec{c} = (9; -3)$. Відповідь: $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a}$;

г) $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (-1; 2)$, $\vec{c} = (4; -5)$. Відповідь: $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

5.274. Задано точки $A(0; 2)$, $B(3; 1)$, $C(-5; 3)$, $D(2; 4)$. Знайти координати точки Q такої, що $\vec{QA} + \vec{QB} + \vec{QC} + \vec{QD} = \vec{0}$.

Відповідь: $Q(0; 5/2)$.

•

5.275. Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , а їх модулі відповідно рівні $a = 3$ і $b = 4$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$ і $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$.

Відповідь: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$, $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 13$, $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 37$ і $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 12$.

5.275.* [1, § 33, приклад 8, с. 193] Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. Знайти: а) скалярний добуток векторів $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$; б) кут між векторами $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{b} - \vec{a}$; в) проекцію вектора $\vec{b} - \vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Відповідь: а) -1 ; б) $\pi - \arccos \frac{\sqrt{7}}{14}$; в) $-1/2$.

5.276. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = (2; 1)$ і $\vec{b} = (1; -2)$, а також довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} як на сторонах.

Відповідь: 90° , $\sqrt{10}$.

5.277. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ як на сторонах, якщо кут між векторами \vec{p} і \vec{q} дорівнює 45° , а модулі цих векторів відповідно рівні $p = 2\sqrt{2}$ і $q = 3$.
Відповідь: $15; \sqrt{593}$.

5.278. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де \vec{p} і \vec{q} – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.
Відповідь: 45° .

5.279. Знайти проекцію вектора \vec{AB} на напрямок вектора \vec{CD} , якщо:

а) $A(-3; 0), B(6; 3), C(1; -2), D(4; 2)$. Відповідь: $39/5$;

б) $A(-2; 1), B(8; 3), C(1; -3), D(-4; 9)$. Відповідь: -2 ;

в) $A(1; -1), B(5; 1), C(3; 2), D(11; -4)$. Відповідь: 2 ;

г) $A(1; -1), B(5; 0), C(-8; 2), D(7; -6)$. Відповідь: $52/17$.

•
5.280. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{a} + \alpha\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярні, якщо модулі векторів \vec{a} і \vec{b} відповідно рівні $a = 3$ і $b = 5$.
Відповідь: $\pm 3/5$.

5.280.* [1, § 33, приклад 9, с. 194] Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , а їх модулі $a = 2$ і $b = 1$. При якому значенні λ вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ є перпендикулярним до вектора \vec{a} ?
Відповідь: $\lambda = 4$.

5.281. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярні, якщо кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 60° , а їх модулі відповідно рівні $a = 2$ і $b = 1$.
Відповідь: $8/7$.

5.282. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ і $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні, якщо кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 120° , а їх модулі відповідно рівні $a = 2$ і $b = 5$.
Відповідь: 40 .

5.283. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \alpha\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярні, якщо кут між векторами \vec{a} і \vec{b} дорівнює 60° , а їх модулі відповідно рівні $a = 1$ і $b = 2$.
Відповідь: $14/5$.

•
5.284. Знайти кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} за умови, що вектори $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярні.
Відповідь: 60° .

5.285. Знайти кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} за умови, що вектори $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні.
Відповідь: $\arccos \frac{1}{5}$.

5.286. Знайти кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} за умови, що вектори $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ перпендикулярні.

Відповідь: 90° .

5.287. Знайти кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} за умови, що вектори $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{q} = 4\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні.

Відповідь: 120° .

•

5.288. При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ і \vec{c} колінеарні (паралельні), якщо:

а) $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (3; 5)$, $\vec{c} = (-1; 3)$. Відповідь: $-9/14$;

б) $\vec{a} = (1; 0)$, $\vec{b} = (2; 2)$, $\vec{c} = (3; -5)$. Відповідь: $-5/16$;

в) $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (1; 1)$, $\vec{c} = (0; 5)$. Відповідь: -3 .

5.288.* [1, § 33, приклад 10, с. 194] При яких значеннях x вектори

$\vec{a} = (\cos \frac{3x}{2}; \sin \frac{x}{2})$ і $\vec{b} = (\sin \frac{9x}{2}; \cos \frac{5x}{2})$ паралельні?

Відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Група Б

5.289. Задано точки $A(0; 4)$, $B(3; 0)$, $C(0; 0)$. Записати рівняння висоти CN , медіани CM , бісектриси трикутника CL і рівняння кіл, вписаного в трикутник ABC і описаного навколо нього.

Відповідь: $CN: y = \frac{3}{4}x$; $CM: y = \frac{4}{3}x$; $CL: y = x$;

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-1, 5)^2 + (y-2)^2 = 6, 25$.

5.289.* [1, § 33, приклад 5, с. 186] Задано точки $A(-4; 0)$, $B(0; 3)$, $C(0; 0)$. Записати рівняння бісектриси AL трикутника ABC . Знайти координати центра O кола, вписаного в трикутник ABC .

Відповідь: $AL: y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$; $O(-1; -1)$.

5.290. Задано точки $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(0; 0)$. Записати рівняння висоти, медіани і бісектриси трикутника ABC , що проведені з вершини A . Записати рівняння кіл, вписаного в трикутник ABC і описаного навколо нього.

Відповідь: $x = 0$; $y = 3 - \frac{3}{2}x$; $y = 3 - 2x$; $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$,

$(x-2)^2 + (y-1, 5)^2 = 6, 25$.

5.291. Задано точки $A(1; 5)$, $B(4; 1)$, $C(1; 1)$. Записати рівняння медіан, висот, бісектрис трикутника ABC , а також кіл, вписаного в трикутник ABC і описаного навколо нього.

Відповідь: медіани: $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$, $y = -\frac{8}{3}x + \frac{23}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$; висоти:

$x = 1$, $y = 1$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$; бісектриси: $y = x$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$, $y = -3x + 8$;

кола: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$, $(x-2,5)^2 + (y-3)^2 = 6$, 25.

5.292. Записати рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $A(2;1)$, $B(4;0)$, $C(5;-1)$.

Відповідь: $(x-0,5)^2 + (y+4,5)^2 = 65/2$.

5.293. Записати рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $A(-5;5)$, $B(2;6)$, $C(3;5)$.

Відповідь: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

5.294. Записати рівняння кола, вписаного в трикутник ABC , якщо $A(-2;-2)$, $B(12;0)$, $C(0;12)$.

Відповідь: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 18$.

5.295. Записати рівняння кола, вписаного в трикутник ABC , якщо $A(4;4)$, $B(5;-3)$, $C(1;1)$.

Відповідь: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$.

•

5.296. Задано середини $A_1(2;-1)$, $B_1(-1;4)$, $C_1(-2;2)$ сторін трикутника ABC . Знайти координати вершин A , B і C .

Відповідь: $(1;-3)$, $(3;1)$, $(-5;7)$.

5.297. Задано середини $A_1(1;1)$, $B_1(0;0)$, $C_1(-1;-3)$ сторін трикутника ABC . Знайти координати вершин A , B і C .

Відповідь: $(2;4)$, $(0;-2)$, $(-2;-4)$.

5.298. Задано вершини $A(3;1)$, $B(-2;2)$ трикутника ABC і $D(1;1)$ – точка перетину його висот. Знайти координати вершини C і рівняння сторін трикутника ABC .

Відповідь: $AB : y = -\frac{x}{5} + \frac{8}{5}$; $BC : x = -2$; $AC : y = 3x - 8$; $C(-2;-14)$.

5.299. Задано вершини $A(5;2)$, $B(-3;4)$ трикутника ABC і $D(3;1)$ – точка перетину його медіан. Знайти координати точки C і рівняння прямих AB , BC , AC .

Відповідь: $AB : 4y + x - 13 = 0$; $BC : 10y + 7x - 19 = 0$;

$AC : 2y + 5x - 29 = 0$; $C(7;-3)$.

5.300. Задано вершини $A(0;0)$, $B(3;9)$ трикутника ABC і $D(2;2)$ – точка перетину його бісектрис. Знайти координати точки C , рівняння прямих AB , BC , AC і радіус кола, вписаного в трикутник ABC .

Відповідь: $AB : y = 3x$; $BC : y = -\frac{79}{3}x + 88$; $AC : y = \frac{1}{3}x$; $C(3,3;1,1)$;

$r = 2\sqrt{10}/5$.

5.301. Задано вершину $A(-4;-5)$ і рівняння висот $5x + 3y - 4 = 0$, $3x + 8y + 13 = 0$ трикутника ABC . Записати координати його вершин B , C і рівняння його сторін.

Відповідь: $AB : 3x - 5y = 13$; $BC : 5x + 2y = 1$; $AC : 3y - 8x = 17$; $B(1;-2)$; $C(-1;3)$.

5.302. Задано вершину $A(1;3)$ і рівняння медіан $2y - x = 1, y = 1$ трикутника ABC . Записати координати його вершин B, C і рівняння його сторін.

Відповідь: $AB : 2y + x = 7; BC : x - 4y = 1; AC : y = x + 2; B(5;1); C(-3;-1)$.

•

5.303. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно осі ординат.

Відповідь: $2x + y - 1 = 0$.

5.304. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно осі абсцис.

Відповідь: $2x + y + 1 = 0$.

5.305. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно початку координат.

Відповідь: $2x - y - 1 = 0$.

5.306. Записати рівняння прямої, що симетрична прямій $2x - y + 1 = 0$ відносно прямої $y = x$.

Відповідь: $x - 2y - 1 = 0$.

5.307. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -1)$ і перетинає осі координат у точках, рівновіддалених від початку координат.

Відповідь: $x + y - 2 = 0, x - y - 4 = 0$.

5.308. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(8; 6)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 12 кв. од.

Відповідь: $3x - 2y - 12 = 0, 3x - 8y + 24 = 0$.

5.309. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 1)$ під кутом $\pi/4$ до прямої $2x + 3y + 4 = 0$.

Відповідь: $x - 5y + 3 = 0, 5x + y - 11 = 0$.

•

5.310. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, що проведені з точки $M(0, 5; 0)$.

Відповідь: $y = 0; y = 2x - 1$.

5.310.* [1, § 33, приклад 6, с. 188] Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2$, що проведені з точки $M(1; -1)$, і знайти точки дотику.

Відповідь: дотичні $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ і $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ дотикаються до параболи $y = x^2$ відповідно в точках $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2})$ і $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

5.311. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 + 2x + 3$, що проведені з точки $M(0; 2)$.

Відповідь: $y = 2; y = 4x + 2$.

5.312. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 4x + 3$, що проведені з точки $M(2; -5)$.

Відповідь: $y = 4x - 13$; $y = -4x + 3$.

5.313. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 3x + 4$, що проходять через початок координат.

Відповідь: $y = x$; $y = -7x$.

5.314. Записати рівняння дотичних до параболи $y = x^2 + 2x + 3$, що проходять через початок координат.

Відповідь: $y = 2(1 \pm \sqrt{3})x$.

5.315. Записати рівняння дотичних до кола $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$, що проходять через початок координат.

Відповідь: $y = \frac{5 \pm 3\sqrt{2}}{4}x$.

5.316. Записати рівняння дотичних до кола $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$, що проведені з точки $M(1; 0)$.

Відповідь: $y = 0$; $4x - 3y = 4$.

5.317. Записати рівняння дотичних до гіперболи $y = \frac{4}{x}$, що проведені з точки $M(1; -1)$.

Відповідь: $y = (4\sqrt{5} - 9)x + 8 - 4\sqrt{5}$; $y = -(9 + 4\sqrt{5})x + 8 + 4\sqrt{5}$.

5.318. Записати рівняння дотичної до гіперболи $y = \frac{4}{x}$, що проведена з точки $M(1; 0)$.

Відповідь: $y = -16x + 16$.

•

5.319. Знайти кут між дотичними до параболи $y = 2x^2$, що проведені з точки $M(0; -2)$.

Відповідь: $\pi - 2\arctg 4$.

5.320. Знайти кут між дотичними до параболи $y = 1 - 2x^2$, що проведені з точки $M(0; 3)$.

Відповідь: $2\arctg \frac{1}{4}$.

5.321. До параболи $y = x^2 - 4x + 2$ з точки $M(1; -4)$ проведено дотичні. Знайти відстань між точками дотику.

Відповідь: $2\sqrt{15}$.

5.322. До параболи $y = -x^2 + 2x + 3$ з точки $M(0; 5)$ проведено дотичні. Знайти відстань між точками дотику.

Відповідь: $2\sqrt{10}$.

5.323. Записати рівняння дотичної до параболи $y = 2x^2 - 4x$, що проходить через точку $M(-1; -2)$. Записати також рівняння дотичної, яка симетрична вказаній дотичній відносно осі параболи.

Відповідь: через точку M проходять дві дотичні $y = -2$ і $y = -16x - 18$, їм симетричні відносно осі параболи – дотичні $y = -2$ і $y = 16x - 50$.

•

5.324. Записати рівняння кола, що проходить через точку $A(2;1)$ і дотикається до осей координат.

Відповідь: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

5.325. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(2;0)$, $B(5;0)$ і дотикається до осі Oy .

Відповідь: $(x - \frac{7}{2})^2 + (y \pm \sqrt{10})^2 = \frac{49}{4}$.

5.326. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(-4;0)$, $B(0;4)$ має зовнішній дотик з колом $x^2 + y^2 = 9$.

Відповідь: шукане коло не існує.

5.327. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(-6;0)$, $B(0;6)$ і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

Відповідь: $(x + \frac{18+9\sqrt{2}}{4})^2 + (y - \frac{18+9\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{9(3\sqrt{2}+1)^2}{4}$;

$(x + \frac{18-9\sqrt{2}}{4})^2 + (y - \frac{18-9\sqrt{2}}{4})^2 = \frac{9(3\sqrt{2}-1)^2}{4}$.

5.328. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(-4;0)$, $B(4;0)$ і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

Відповідь: $x^2 + (y \pm \frac{7}{6})^2 = \frac{625}{36}$.

5.329. Записати рівняння кола, що проходить через початок координат, точку $A(1;0)$ і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

Відповідь: $(x - \frac{1}{2})^2 + (y \pm \sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}$.

•

5.330. Знайти суму $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, де O – точка перетину медіан трикутника ABC .

Відповідь: $\vec{0}$.

5.331. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли модулі векторів \vec{a} і \vec{b} рівні.

5.332. Модулі векторів \vec{a} , \vec{b} і $\vec{a} + \vec{b}$ рівні 1. Знайти кути між векторами:

а) \vec{a} і \vec{b} ; б) \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$; в) \vec{b} і $\vec{a} - \vec{b}$; г) $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$.

Відповідь: а) 120° ; б) 150° ; в) 150° ; г) 90° .

5.333. У паралелограмі $ABCD$ довжини відрізків AB , AD і AC рівні a . Знайти $\vec{DB} \cdot \vec{AB}$.

Відповідь: $3a^2/2$.

5.334. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC дорівнює c . Знайти $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.

Відповідь: c^2 .

•

5.335. Знайти координати векторів довжини 1, що перпендикулярні вектору $\vec{a} = (3; 4)$.

Відповідь: $(4/5; -3/5)$ і $(-4/5; 3/5)$.

5.336. При яких значеннях x вектори $\vec{c} = (3 + 2x - x^2)\vec{a}$ і $\vec{b} = (x^3 + x)\vec{a}$, де $\vec{a} \neq \vec{0}$, однаково спрямовані?

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$.

5.337. При яких значеннях x вектори $\vec{c} = (x^2 + x^3)\vec{a}$ і $\vec{b} = (x^3 - 1)\vec{a}$, де $\vec{a} \neq \vec{0}$, протилежно спрямовані?

Відповідь: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

§ 6. Елементи математичного аналізу

6.1. Перетворення графіків та їх застосування до розв'язання рівнянь і нерівностей

Розв'язати рівняння і нерівності (завдання **6.1** – **6.30**):

Група А

6.1. $\sqrt{x+4} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 2$. Відповідь: $x = 0$.

6.2. $\sqrt{x} = 2x^2 - 1$. Відповідь: $x = 1$.

6.2.* [1, § 34, приклад 8, с. 212] $\sqrt{x + \frac{1}{2}} = x^2 - \frac{1}{2}$. Відповідь: $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

6.3. $\sqrt{x} = 2 - x^2$. Відповідь: $x = 1$.

6.4. $2 \cdot 5^{|x|} = 2 - 9\sqrt[3]{|x|}$. Відповідь: $x = 0$.

6.4.* [1, § 34, приклад 3, с. 203] $||x| - 1| = 1 - \sqrt[3]{|x|}$. Відповідь: $x \in \{0; -1; 1\}$.

6.5. $2 \cdot 3^{|x|} = 7 - \sqrt{|x|}$. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$.

6.6. $3 \cdot 2^{|x|} = 2 - 4\sqrt[4]{|x|}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

6.7. $\sin x = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$.

6.7.* [1, § 48, приклад 1, с. 305] $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$. Відповідь: $x = 1$.

6.8. $2 \cos \frac{\pi x}{3} = x^2$. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$.

6.8.* [1, § 39, приклад 6, с. 231] $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2$. Відповідь: $x \in \{0; 1\}$.

6.9. $\cos \frac{\pi x}{2} = 2x^2 - 3x + 1$. Відповідь: $x \in \{0; 1\}$.

6.10. $2 \sin x = 2x^2 + 4x + 1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

6.11. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \sqrt{x + \frac{1}{2}}$. Відповідь: $x \in (0; 1/2]$.

6.12. $3 \log_4 x \leq 3x^2 - 14x + 11$. Відповідь: $x \in (0; 1] \cup [4; \infty)$.