Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x+\dfrac{1}{2}} = x^2 - \dfrac{1}{2}$.

Решение. Изобразив в одной координатной плоскости графики функций $y = \sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ и $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$, заметим, что уравнение имеет единственный положительный корень. Чтобы упростить процедуру его нахождения, заметим еще, что функции $y = g(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$, $x \in [0, \infty)$, и $y = f(x) = \sqrt{x+\dfrac{1}{2}}$ являются взаимно обратными возрастающими функциями, поскольку

$$y = \sqrt{x+\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ x = y^2 - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, единственная точка пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ находится также на прямой $y = x$ при $x > 0$ (см. рис. 6.31).

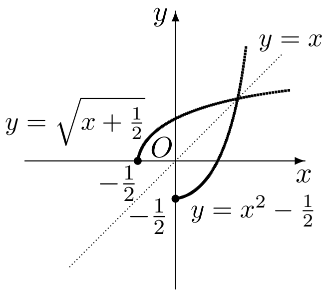


Рис. 6.31

Таким образом, находим единственный корень уравнения, решая систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - \dfrac{1}{2} = x, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

§ 35. О пределе и непрерывности функции

Рассмотрим функцию $y(x) = \dfrac{x^2}{x} + 1$. Эта функция не определена при $x = 0$. В то же время, при $x \neq 0$ имеет место равенство $y(x) = \dfrac{x^2}{x} + 1 = x + 1$. Поэтому графиком функции $y(x) = \dfrac{x^2}{x} + 1$ является прямая $y = x + 1$ с "выколотой" из нее точкой $(0; 1)$, см. рис. 6.32.

Заметим, что в этой точке $(0; 1)$ сходятся обе ветви графика $y(x) = \dfrac{x^2}{x} + 1$: правая и левая. При этом очевидно, что *значения функции приближаются к значению* $y = 1$ ***сколь угодно близко****, если переменная* x ***достаточно близко*** *приближается к точке* $x_0 = 0$ *оси* Ox.

В таком случае говорят, что функция $y(x)$ ***стремится к числу*** 1***, если*** x ***стремится к числу*** 0, а символически записывают так: $y(x) \longrightarrow 1$ при $x \longrightarrow 0$. Другими словами говорят также, что *функция* $y(x)$ *имеет* ***предел*** *в точке* $x_0 = 0$*, равный единице,* и пишут $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 1$.

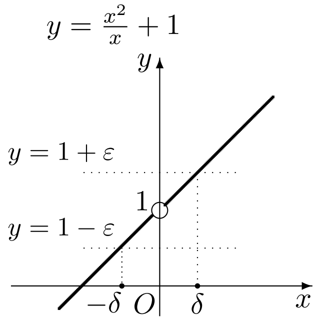


Рис. 6.32

Уточним смысл выделенных выше слов "сколь угодно близко" и "достаточно близко" в следующем определении предела функции $y(x)$ в точке x_0. *Число a называется* ***пределом*** *функции $y(x)$ в точке x_0, если множество решений любого неравенства $a - \varepsilon < y(x) < a + \varepsilon$ с положительным числом ε* (это и означает, что $y(x)$ сколь угодно близко приближается к значению $y = a$) *содержит некоторую окрестность точки x_0, кроме, может быть, самой точки x_0, т.е. содержит множество $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, где δ – некоторое положительное число* (а это и означает, что переменная x достаточно близко приближается к точке x_0) – см. рис. 6.32. Кратко записывают: $\lim\limits_{x\to x_0} y(x) = a$.

Рассмотрим теперь функцию $y(x) = \dfrac{x}{|x|}$, которая также не определена в точке $x = 0$. Учитывая определение модуля (2.7), получаем

$$y(x) = \frac{x}{|x|} = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{при}\, x > 0, \\ -1 & \text{при}\, x < 0. \end{array} \right.$$

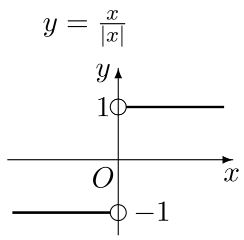


Рис. 6.33

Правая и левая ветви графика этой функции на оси Oy сходятся к разным точкам (см. рис. 6.33). В таком случае говорят, что *функция $y(x)$ в точке $x_0 = 0$ имеет* ***предел справа****, равный единице, и* ***предел слева****, равный минус единице.* Кратко записывают: $\lim\limits_{x\to x_0+0} y(x) = 1$ (предел справа) и $\lim\limits_{x\to x_0-0} y(x) = -1$ (предел слева). В то же время, эта *функция не имеет предела в точке $x_0 = 0$, поскольку* $\lim\limits_{x\to x_0+0} y(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} y(x)$.

Рассмотрим также функцию $y(x) = \dfrac{1}{x}$ и ее график – гиперболу (см. рис. 1.11). При неограниченном возрастании переменной x до плюс бесконечности гипербола приближается к оси Ox, а значения функции $y(x)$ сколь угодно близко приближаются к значению $y = 0$. В таком случае говорят, что *функция $y(x)$ имеет **предел** в плюс бесконечности, равный нулю*, и пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$. Аналогичный смысл вкладывается в понятие предела функции в минус бесконечности. Так, *функция $y(x) = \dfrac{1}{x}$ имеет* также ***предел** в минус бесконечности, равный нулю*, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

В точке 0, в которой функция $y(x) = \dfrac{1}{x}$ не определена, она не имеет предела, а также не имеет конечных односторонних пределов справа и слева от этой точки. В то же время, если x стремится к точке $x_0 = 0$ справа от этой точки, значения функции $y(x)$ неограниченно увеличиваются до плюс бесконечности. В таком случае говорят, что ***предел справа** функции $y(x)$ в точке $x_0 = 0$ равен плюс бесконечности*, и пишут: $\lim\limits_{x\to x_0+0} y(x) = +\infty$.

Заметим также, что ***предел слева*** этой же *функции $y(x)$ в точке $x_0 = 0$ равен минус бесконечности*, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} y(x) = -\infty$.

Наконец, заметим, что *функция может не иметь ни конечных, ни бесконечных односторонних пределов.* Так, функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ не имеют ни конечных, ни бесконечных пределов в плюс бесконечности и в минус бесконечности (см. рис. 3.2).

Обратим внимание на тот факт, что операция нахождения предела функции (предельный переход) обладает хорошими арифметическими свойствами, а именно: *предел суммы, произведения или частного функций равен соответственно сумме, произведению или частному пределов этих функций при условии, что указанные пределы существуют.*

Следует подчеркнуть также, что абсолютное большинство функций, изучаемых в школьном курсе математики, обладает замечательным свойством – они ***непрерывны*** в тех точках, в которых определены. Наглядным отражением свойства непрерывности функции является отсутствие у графика функции, непрерывной на некотором промежутке, разрывов на этом промежутке. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ имеет разрыв в точке $x_0 = 0$, в которой она не определена, но в каждой точке области определения эта функция непрерывна.

Для уточнения наглядных представлений о непрерывности функции используется понятие предела функции в точке. Так, *функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в точке x_0, т.е. если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

§ 36. Производная функции

Пусть функция $f(x)$ является непрерывной на некотором промежутке, который содержит точку x_0. При переходе от точки x_0 к точке x этого промежутка изменение переменной x выражается разностью $x - x_0$, а изменение функции – разностью $f(x) - f(x_0)$. Изменение переменной x называют также ***приращением аргумента*** и обозначают $\Delta x = x - x_0$. Изменение функции называют также ***приращением функции*** и обозначают Δf, т.е. $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

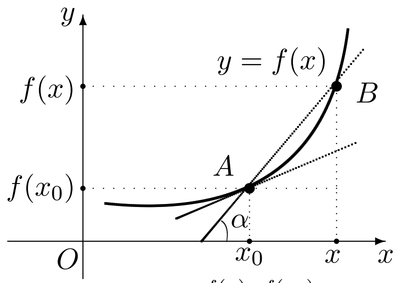
Очевидно, что отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ выражает ***среднюю скорость изменения функции*** на отрезке, соединяющем точки x_0 и x.

Заметим, что численно отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ равно тангенсу угла α между положительным направлением оси Ox и секущей, которая проходит через точки A и B графика функции $f(x)$, абсциссы которых соответственно равны x_0 и x (см. рис. 6.34). Другими словами, *средняя скорость* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ *изменения функции численно равна угловому коэффициенту секущей*, проходящей через точки A и B.

Производной $f'(x_0)$ *функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *называется скорость изменения функции в этой точке, которая находится как предел средней скорости при* $\Delta x \to 0$, *т.е.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

В геометрических терминах этому предельному переходу соответствует переход секущей к своему предельному положению – касательной в точке A при стремлении точки B к точке A вдоль кривой $y = f(x)$ (см. рис. 6.34). Таким образом, *производная функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $A(x_0, f(x_0))$, т.е. угловой коэффициент этой касательной $k_{\text{кас}} = f'(x_0)$.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Рис. 6.34

Рассмотрим уравнение $\sin x = 2x$. Очевидно, что оно имеет корень $x = 0$. Ответ на вопрос, имеются ли другие корни в этом уравнении, естественным образом зависит от взаимного расположения графиков функций $y = f(x) = \sin x$ и $y = g(x) = 2x$. Уточнить взаимное расположение этих графиков можно, используя понятие производной как скорости изменения функции.

Известно, что $g'(x) = 2$ и $f'(x) = \cos x$ (см. правила дифференцирования и таблицу производных от основных элементарных функций в следующем параграфе). Поскольку $g'(0) = 2$, $f'(0) = \cos 0 = 1$ и $g'(0) > f'(0)$, то скорость изменения функции $g(x) = 2x$ в точке $x = 0$ больше скорости изменения функции $f(x) = \sin x$. Это означает, что касательная к графику функции $y = \sin x$ наклонена к оси Ox под более острым углом, чем прямая $y = 2x$. Кроме того, при $x > 0$ имеем соотношения $f'(x) = \cos x \leqslant 1 < 2 = g'(x)$, из которых следует, что на промежутке $(0, \infty)$ графики функций $y = f(x) = \sin x$ и $y = g(x) = 2x$ не могут больше пересекаться, поскольку скорость изменения функции $f(x)$ меньше скорости изменения функции $g(x)$, и, таким образом, функция $f(x)$ не может "догнать убегающую от нее функцию" $g(x)$. Заметим также, что в силу нечетности функций $y = f(x) = \sin x$ и $y = g(x) = 2x$ их графики симметричны относительно начала координат и поэтому при отрицательных x также не имеют точек пересечения. Таким образом, уравнение $\sin x = 2x$ имеет единственный корень $x = 0$ (см. рис. 6.35).

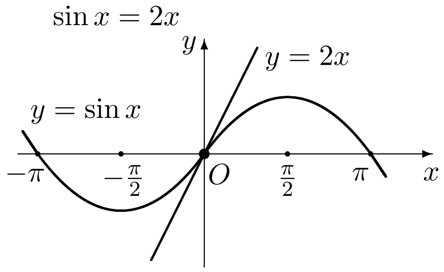


Рис. 6.35

§ 37. Техника дифференцирования

Операцию нахождения производной функции $f(x)$ называют ***дифференцированием*** *функции $f(x)$.*

Дифференцирование функции можно рассматривать как формальную операцию, которая по строго определенным правилам ставит в соответствие функции f некоторую другую функцию f', которую называют производной функции f. Наиболее простые из правил, по которым устанавливается указанное соответствие, составляют таблицу производных от основных элементарных функций.

Таблица производных

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha \in R$	$a^x, a > 0$	e^x	$\log_a x,\ \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$
$f'(x)$	0	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$1/(x \ln a)$
$f(x)$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\text{tg}x$	$\text{ctg}x$
$f'(x)$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$1/\cos^2 x$	$-1/\sin^2 x$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\text{arctg}x$	$\text{arcctg}x$	
$f'(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$1/(x^2+1)$	$-1/(x^2+1)$	

Например, используя формулу производной от степенной функции x^α, получаем

$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

$(\frac{1}{x^2})' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Имеют место также следующие ***правила дифференцирования суммы (разности), произведения и частного*** функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\boxed{\begin{gathered}(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)\,;\\ (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,;\\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,,\qquad g(x)\neq 0\,.\end{gathered}}$$

В частности, если k – некоторое число, не равное нулю, то $(kf(x))'=kf'(x)$.

Пример 1. Найти производную функций: а) $y=(x^3-3x^2+5x-\pi)\cos x$; б) $y=\dfrac{3x+1}{2x-3}$.

Решение. В соответствии с правилами дифференцирования имеем

а) $y'=((x^3-3x^2+5x-\pi)\cos x)'=(x^3-3x^2+5x-\pi)'\cos x+$
$+(x^3-3x^2+5x-\pi)(\cos x)'=(3x^2-6x+5)\cos x-(x^3-3x^2+5x-\pi)\sin x$;

б) $y'=\left(\dfrac{3x+1}{2x-3}\right)'=\dfrac{(3x+1)'(2x-3)-(3x+1)(2x-3)'}{(2x-3)^2}=$
$=\dfrac{3(2x-3)-2(3x+1)}{(2x-3)^2}=-\dfrac{11}{(2x-3)^2}$.

Для ***дифференцирования сложной функции*** $f(g(x))$ имеет место следующее правило:

$$\boxed{[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x).}$$

Пример 2. Найти производные следующих функций:
а) $y(x)=\sqrt{3x^2+5x+1}$; б) $y(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-5}$; в) $y(x)=\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$; г) $y(x)=$ $=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; д) $y(x)=f(kx+b)$, где функция f имеет производную f', а k и b – некоторые постоянные, не равные нулю; е) $y(x)=\sin x^2$; ж) $y(x)=\sin^2 x$; з) $y(x)=\ln^3(x^2+4)$.

Решение. а) Представим сложную функцию $y(x)=\sqrt{3x^2+5x+1}$ в виде $y(x)=f(g(x))$, где $f(t)=\sqrt{t}$ и $t=g(x)=3x^2+5x+1$. Учитывая, что $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ и $t=3x^2+5x+1$, в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции имеем

$$y'(x)=\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}(3x^2+5x+1)'=\frac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+1}}\,.$$

б) Аналогично представим функцию $y(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-5}$ в виде $y(x)=$ $=f(g(x))$, где $f(t)=\sqrt[3]{t}$, $t=g(x)=x^2+3x-5$, и, учитывая, что $f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, получим

$$y'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2+3x-5}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+3x-5)^2}}(x^2+3x-5)'=\frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x-5)^2}}\,.$$

в) Перепишем функцию $y(x)$ в виде $y(x)=5(2x-1)^{-1/2}$. Таким образом, имеем сложную функцию $y(x)=f(g(x))$, где $f(t)=5t^{-1/2}$ и $t=g(x)=2x-1$.

Теперь, учитывая, что $f'(t) = 5\left(-\dfrac{1}{2}\right)t^{-\frac{1}{2}-1} = -\dfrac{5}{2}t^{-3/2}$, получаем

$$y'(x) = \left(5(2x-1)^{-1/2}\right)' = -\frac{5}{2}(2x-1)^{-3/2}(2x-1)' = -5(2x-1)^{-3/2} = -\frac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}\,.$$

г) Здесь $y(x) = f(g(x))$, где $f(t) = \cos t$, $t = g(x) = 3x - \frac{\pi}{4}$. Поэтому

$$y'(x) = \left(\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = -\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' = -3\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).$$

д) Аналогично получаем $y'(x) = (f(kx+b))' = f'(kx+b)(kx+b)' = kf'(kx+b)$.

е) Здесь $y(x) = f(g(x))$, где $f(t) = \sin t$, $t = g(x) = x^2$. Поэтому $y'(x) = (\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$.

ж) Как и у предыдущей функции $y(x)$, здесь выражение $y(x)$ составлено из тех же операций (возведение в квадрат и синус), но порядок этих операций другой. Действительно, имеем $y(x) = f(g(x))$, где $f(t) = t^2$ и $t = g(x) = \sin x$. Поэтому $y'(x) = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x$.

Отметим также здесь еще один способ нахождения производной $y'(x)$, при котором сначала преобразуется выражение $y(x)$:

$$y'(x) = (\sin^2 x)' = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = 0 - \frac{1}{2}(-\sin 2x)(2x)' = \sin 2x\,.$$

Очевидно, что оба рассмотренных способа нахождения производной функции $\sin^2 x$ приводят к одинаковому результату.

з) Здесь сложная функция $y(x) = \ln^3(x^2+4)$ представляется в виде $y(x) = f(g(x))$, где $f(t) = t^3$, а функция $t = g(x) = \ln(x^2+4)$, в свою очередь, является сложной функцией, поскольку $g(x) = h(\varphi(x))$ при $h(z) = \ln z$ и $z = \varphi(x) = x^2+4$. Следовательно, при вычислении производной $y'(x)$ правило дифференцирования сложной функции используется дважды так, что последовательно будем иметь

$$y'(x) = (\ln^3(x^2+4))' = 3\ln^2(x^2+4)g'(x) = 3\ln^2(x^2+4)(\ln(x^2+4))' = 3\ln^2(x^2+4)\frac{1}{x^2+4}(x^2+4)' = \frac{6x}{x^2+4}\,\ln^2(x^2+4)\,.$$

Рассмотрим еще один пример, в котором при вычислении производной используются различные правила дифференцирования.

Пример 3. Найти производную функции $y(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{1-x}$.

Решение. В соответствии с правилом дифференцирования частного имеем

$$y'(x) = \left(\frac{\sqrt{3-x}}{1-x}\right)' = \frac{(\sqrt{3-x})'(1-x) - \sqrt{3-x}(1-x)'}{(1-x)^2}\,. \tag{6.1}$$

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции находим $(\sqrt{3-x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}(3-x)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

Подставляя это найденное выражение в равенство (6.1), далее получаем

$$y'(x) = \frac{-\frac{1-x}{2\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x}}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x) + 2(3-x)}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2} = \frac{5-x}{2\sqrt{3-x}(1-x)^2}\,.$$

§ 38. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной можно выразить следующим образом: *если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то график этой функции в соответствующей точке $(x_0, f(x_0))$ имеет касательную.* При этом, как показано в § 3, угловой коэффициент касательной

$$\boxed{k_{\text{кас}} = f'(x_0)\,.} \tag{6.2}$$

Поэтому ***уравнение касательной*** к графику функции $y = f(x)$ имеет вид:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,,} \tag{6.3}$$

где x_0 – абсцисса точки касания.

Пример 1. Записать уравнения касательной к графику функции $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение. Уравнение касательной имеет вид (6.3), где $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$, а значит, $f(x_0) = f(1) = \dfrac{3+1}{2-3} = -4$. Имеем также $f'(x) = -\dfrac{11}{(2x-3)^2}$ (см. пример 1 из предыдущего параграфа). Поэтому $f'(x_0) = -\dfrac{11}{(2-3)^2} = -11$.

Подставляя $x_0 = 1$ и найденные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение (6.3), получаем искомое уравнение касательной $y = -11(x-1) - 4 = -11x + 7$.

Ответ: $y = -11x + 7$.

Пример 2. Найти площадь треугольника, ограниченного осью Oy, прямой $y = -15$ и касательной к графику функции $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$, проведенной в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

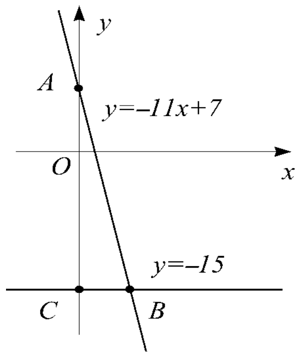


Рис. 6.36

Решение. Касательной к графику функции $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ является прямая $y = -11x + 7$ (см. предыдущий пример), которая пересекает ось Oy в точке $A(0;7)$. Обозначим через $B(x_B, y_B)$ точку пересечения касательной $y = -11x + 7$ с прямой $y = -15$. Тогда $y_B = -15$, а координату x_B находим, решая уравнение $y_B = -11x_B + 7 \Rightarrow x_B = (y_B - 7) : (-11) = (-15 - 7) :$ $: (-11) = 2$.

Таким образом, прямые $y = -11x + 7$, $y = -15$ и ось Oy ограничивают прямоугольный треугольник с вершинами $A(0;7)$, $B(2;-15)$ и $C(0;-15)$ (см. рис. 6.36). Его площадь $S = \dfrac{1}{2}\,BC \cdot AC = \dfrac{1}{2}\,2(7+15) = 22$ (кв. ед.).

Ответ: 22 кв. ед.

Пример 3. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}$, проведенной перпендикулярно прямой $l\,:\,5y - x - 6 = 0$.

Решение. Используем условие перпендикулярности касательной $l_{\text{кас}}$ и прямой l (см. глава 5, п. 33.1) для нахождения углового коэффициента касательной $k_{\text{кас}}$. Имеем $l_{\text{кас}} \perp l \iff k_{\text{кас}} k_l = -1$, где угловой коэффициент k_l прямой $l\,:\,5y - x - 6 = 0 \iff y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{6}{5}$ известен: $k_l = \dfrac{1}{5}$. Следовательно, $k_{\text{кас}} = -5$.

Далее используем равенство (6.2) для нахождения абсциссы точки касания x_0. Имеем $f'(x) = -\dfrac{5}{\sqrt{(2x-1)^3}}$ (см. пример 2 из предыдущего параграфа). Таким образом, равенство (6.2) порождает уравнение $-5 = -\dfrac{5}{\sqrt{(2x_0-1)^3}}$ с неизвестной x_0. Решая это уравнение, получаем

$\sqrt{(2x_0-1)^3} = 1 \iff 2x_0 - 1 = 1 \iff x_0 = 1$.

Теперь уравнение касательной к графику функции $f(x)$ имеет вид (6.3), где $f'(x_0) = k_{\text{кас}} = -5$, $f(x_0) = f(1) = \dfrac{5}{\sqrt{2-1}} = 5$, т.е. касательной является прямая $y = -5(x-1) + 5 = 10 - 5x$.

Ответ: $y = 10 - 5x$.

Следующая задача рассмотрена в § 33 предыдущей главы (пример 6), где она решена без применения производной. Рассмотрим еще один способ ее решения.

Пример 4. Записать уравнения касательных к параболе $y = x^2$, проведенных из точки $M(1,-1)$, и найти точки касания.

Решение. Пусть x_0 — абсцисса точки касания искомой касательной с параболой $y = x^2$. Тогда уравнение касательной имеет вид:

$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = 2x_0 x - x_0^2$.

Поскольку она проходит через точку $M(1,-1)$, то

$$-1 = 2x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 + \sqrt{2}, \\ x_0 = 1 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом, через точку M проходят две касательные к параболе $y = x^2$:

$$y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2} \text{ и } y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}.$$

Их точки касания с параболой $y = x^2$ находятся так, как и при решении примера 6 из § 33.

Ответ: касательные $y = (2 + 2\sqrt{2})x - 3 - 2\sqrt{2}$ и $y = (2 - 2\sqrt{2})x - 3 + 2\sqrt{2}$ касаются параболы $y = x^2$ соответственно в точках $(1 + \sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2})$ и $(1 - \sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2})$.

Пример 5. Записать уравнения общих касательных к параболам $y = x^2$ и $y = -4 - x^2$.

Решение. Рассмотрим два способа решения (с применением производной и без ее применения).

1-й способ. Пусть x_1 и x_2 — абсциссы точек касания искомой общей касательной с параболами $y = x^2$ и $y = -4 - x^2$ соответственно. Тогда уравнение этой касательной имеет вид:

$y = 2x_1(x - x_1) + x_1^2 = 2x_1 x - x_1^2$ или

$y = -2x_2(x - x_2) - 4 - x_2^2 = -2x_2 x + x_2^2 - 4.$

Отсюда получаем систему уравнений для нахождения x_1 и x_2:

$$\begin{cases} 2x_1 = -2x_2, \\ -x_1^2 = x_2^2 - 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ 2x_2^2 = 4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = \sqrt{2}, \\ x_2 = -\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Таким образом, существуют две общие касательные к заданным параболам: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ и $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

2-й способ. Пусть $y = kx + b$ — касательная к параболе $y = x^2$. Тогда уравнение $x^2 = kx + b \iff x^2 - kx - b = 0$ имеет единственное решение, т.е. его дискриминант равен нулю: $D_1 = k^2 + 4b = 0$.

Если прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = -4 - x^2$, то уравнение $-4 - x^2 = kx + b \iff x^2 + kx + b + 4 = 0$ также имеет единственное решение, т.е. его дискриминант также равен нулю: $D_2 = k^2 - 4b - 16 = 0$.

Решая систему

$$\begin{cases} k^2 + 4b = 0, \\ k^2 - 4b - 16 = 0, \end{cases}$$

находим k и b, так что $b = -2$, $k = \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $y = 2\sqrt{2}x - 2$ и $y = -2\sqrt{2}x - 2$.

Говорят, что ***графики*** *функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$* ***касаются*** *в точке $(x_0,\ y_0)$, если в этой точке они имеют общую касательную.*

Из этого определения следует, что *графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ касаются в точке $(x_0,\ y_0)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0). \end{cases}$$

Например, в точке $x = 0$ касаются графики функций $y = \sin x$, $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 6.37).

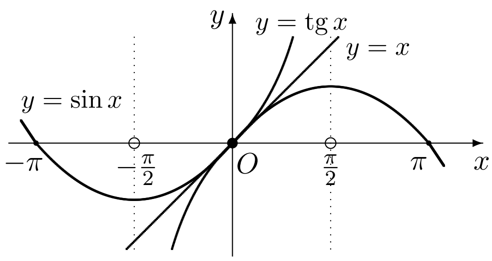


Рис. 6.37

Пример 6. Найти точки касания графиков функций $y = \cos x$ и $y = -\dfrac{1}{\pi}x^2 + \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Координаты точки касания (x_0, y_0) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y_0 = \cos x_0 = -\dfrac{1}{\pi}x_0^2 + \dfrac{\pi}{4}, \\ -\sin x_0 = -\dfrac{2}{\pi}x_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Решая уравнение $\sin x = \dfrac{2}{\pi}x$ графическим методом (см. рис. 6.38), находим его корни:

$$\sin x_0 = \frac{2}{\pi}x_0 \iff \left[\begin{array}{l} x_0 = 0, \\ x_0 = \pm\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

$\sin x = \frac{2}{\pi}x$

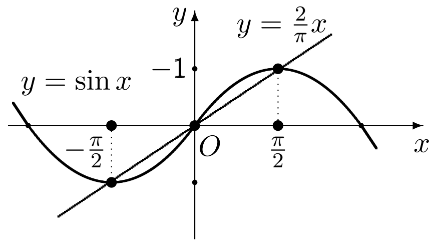


Рис. 6.38

Подставляя значения $x_0 = 0,\ -\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}$ в уравнение $\cos x_0 = -\dfrac{1}{\pi}x_0^2 + \dfrac{\pi}{4}$, убеждаемся в том, что системе (6.4) удовлетворяют только два из этих значений: $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ и $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. При этом $y_0 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

В заключение параграфа отметим, что в *основе многочисленных приложений математического анализа к решению различных практических задач лежит идея приближения нелинейных функциональных зависимостей линейными, которая выражается заменой приращения функции приращением касательной к графику этой функции.* Естественно, что *такое приближение тем точнее, чем меньше соответствующее приращение независимой переменной.*

§ 39. Применение производной к исследованию функций

39.1. Локальные экстремумы и точки локальных экстремумов функции. Поскольку производная выражает скорость изменения функции в точке, то она является характеристикой локального поведения функции. При описании локальных свойств функций используется понятие окрестности.

Окрестностью *точки x_0 называют интервал (a, b), который содержит эту точку.*