

и $A_2(5; -1)$. Следовательно,

$$\rho = A_1 A_2 = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}.$$

2-й способ. Более простой в данном случае способ решения задачи использует симметрию заданных парабол относительно точки $M(3; 0)$. Действительно, поскольку параболы $y = x^2$ и $y = -(x-6)^2$ симметричны относительно точки M , то ближайшие к этой точке точки парабол A_1 и A_2 соответственно также симметричны относительно точки M . Тогда расстояние ρ между параболой выражается равенствами $\rho = A_1 A_2 = A_1 M + M A_2 = 2MA_1$.

Способ нахождения кратчайшего расстояния MA_1 от точки M до кривой $y = x^2$ изложен в примерах 8, 9. В соответствии с этим способом имеем

$$MA_1 = \min_{x \in R} \sqrt{(x-3)^2 + x^4} = \sqrt{\min_{x \in R} [(x-3)^2 + x^4]} = \sqrt{\min_{x \in R} (x^4 + x^2 - 6x + 9)}.$$

Пусть $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$. Тогда $f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3)$.

Кривая знаков функции $y = f'(x)$ изображена на рис. 6.61.

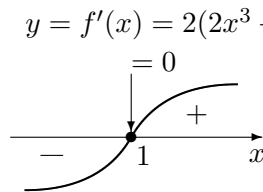


Рис. 6.61

Таким образом, $\min_{x \in R} f(x) = f(1) = 5$, а искомое расстояние между параболой

$$\rho = 2\sqrt{\min_{x \in R} f(x)} = 2\sqrt{5}.$$

О т в е т: $2\sqrt{5}$.

§ 44. Интеграл и первообразная

44.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x).$$

Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то любая функция вида $F(x) + C$, где C – произвольное действительное число, также является первообразной для $f(x)$.

Операцию нахождения первообразной $F(x)$ для заданной функции $f(x)$ называют **неопределенным интегрированием** функции $f(x)$. Неопределенность этой операции состоит в том, что первообразная для функции $f(x)$ находится лишь с точностью до постоянного слагаемого C .

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x) dx$ так, что

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$.

Знак $\int$ называется **знаком интеграла**, $f(x)$ – **подинтегральной функцией**, $f(x) dx$ – **подинтегральным выражением**, x – **переменной интегрирования**, а C – **постоянной интегрирования**.

Приведем краткую таблицу первообразных (неопределенных интегралов) элементарных функций, изучение которых включает школьный курс математики.

Таблица неопределенных интегралов

$f(x)$	$a = \text{const}$	$x^\alpha, \alpha = \text{const} \neq -1$	$1/x$
$\int f(x) dx$	$ax + \text{const}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{const}$	$\ln x + \text{const}$
$f(x)$	$a^x, \begin{matrix} a > 0, \\ a \neq 1 \end{matrix}$	e^x	$\sin x$
$\int f(x) dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + \text{const}$	$e^x + \text{const}$	$-\cos x + \text{const}$
$f(x)$	$\cos x$	$1/\cos^2 x$	$1/\sin^2 x$
$\int f(x) dx$	$\sin x + \text{const}$	$\text{tg} x + \text{const}$	$-\text{ctg} x + \text{const}$
$f(x)$	$\frac{1}{x^2+a^2}, a = \text{const} \neq 0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a = \text{const} \neq 0$	
$\int f(x) dx$	$\frac{1}{a} \text{arctg} \frac{x}{a} + \text{const}$	$\arcsin \frac{x}{a} + \text{const}$	

При нахождении неопределенных интегралов используются также следующие **свойства первообразных**:

1) если $F(x)$ и $G(x)$ соответственно первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, то $F(x) \pm G(x) + C$ – первообразная функции $f(x) \pm g(x)$;

2) если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $\alpha \in \mathbf{R}$, то $\alpha F(x) + C$ – первообразная функции $\alpha f(x)$;

3) если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $b \in \mathbf{R}$, а k – некоторое не равное нулю число, то $\frac{1}{k} F(kx + b) + C$ – первообразная функции $f(kx + b)$.

Пример 1. Найти первообразную функции $f(x) = 8 \sin 2x + 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$, график которой проходит через точку $M(\pi/3; 15)$.

Решение. Учитывая свойства первообразных, находим неопределенный интеграл (другими словами, вид любой из первообразных функции $f(x)$)

$$\int f(x) dx = 8 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 2x) + 18 \cdot \frac{1}{3} \sin \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + C = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos 2x + C.$$

Теперь ищем то значение постоянной интегрирования C , при котором график функции $F(x) = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos 2x + C$ проходит через точку $M(\pi/3; 15)$.

При этом

$$F(\pi/3) = 15 \iff 6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} + C = 15 \iff 3 + 2 + C = 15 \iff C = 10.$$

Таким образом, искомая первообразная

$$F(x) = 6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} + 10.$$

$$\text{О т в е т: } F(x) = 6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} + 10.$$

44.2. Площадь криволинейной трапеции. Понятие об определенном интеграле. К понятию определенного интеграла приводит, в частности, задача о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и $f(x) \geq 0$. Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную отрезком $[a, b]$, прямыми $x = a, x = b$ и графиком функции $y = f(x)$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ точку ξ_k и рассмотрим сумму

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \quad (6.11)$$

Эту сумму называют **интегральной суммой** функции $f(x)$. Каждое слагаемое $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ суммы (6.11) выражает площадь "прямоугольного столбика" с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой $f(\xi_k)$. Таким образом, сумма (6.11) выражает площадь многоугольника, составленного из указанных "прямоугольных столбиков" (см. рис. 6.62).

При увеличении числа n частей разбиения отрезка $[a, b]$ численное значение интегральной суммы (6.11) приближается к площади криволинейной трапеции, а сама *площадь криволинейной трапеции находится как предел интегральных сумм функции $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$* . Указанный предел интегральных сумм функции $f(x)$ называется **определенным интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$** и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Числа a и b называются при этом соответственно **нижним и верхним пределами интегрирования**.

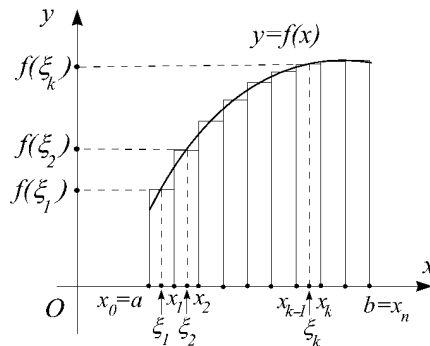


Рис. 6.62

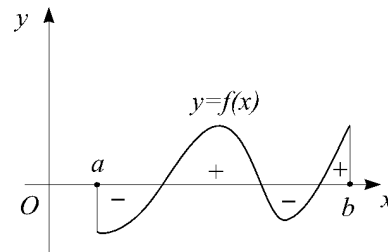


Рис. 6.63

В случае произвольной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен разности между площадью той части фигуры (ограниченной отрезком $[a, b]$, прямыми $x = a, x = b$ и графиком функции $y = f(x)$), которая расположена выше оси Ox (на рис. 6.63 эта часть отмечена знаком "+"), и площадью той части этой фигуры, которая расположена ниже оси Ox (на рис. 6.63 эта часть отмечена знаком "-").

Из определения **определенного интеграла** вытекают следующие его **свойства** (при условии существования соответствующих интегралов):

1) если $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то

$$\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx;$$

2) если $r \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^r f(x) dx + \int_r^b f(x) dx.$$

44.3. Среднее значение функции на отрезке. Очевидно, что для определенного интеграла от непрерывной функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ выполняются соотношения

$$\min_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max_{x \in [a, b]} f(x)(b-a). \quad (6.12)$$

В случае $f(x) \geq 0$ левая часть двойного неравенства (6.12) выражает площадь наибольшего из прямоугольников с основанием $[a, b]$, которые содержатся в рассмотренной в п. 44.2 криволинейной трапеции, а правая часть двойного неравенства (6.12) – площадь наименьшего из прямоугольников с основанием $[a, b]$, в которых содержится эта криволинейная трапеция (см. рис. 6.64). При этом очевидно также, что существует прямоугольник с основанием $[a, b]$, площадь которого равна площади криволинейной трапеции (см. рис. 6.64). Высота этого прямоугольника есть значение функции $f(c)$ в некоторой точке c отрезка $[a, b]$. Это значение функции $f(c)$ называют **средним значением функции** $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (обозначим его $f_{\text{ср}}$, т.е. $f(c) = f_{\text{ср}}$).

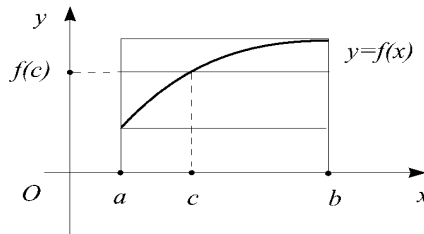


Рис. 6.64

В случае произвольной непрерывной на отрезке функции $f(x)$ также существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a), \quad (6.13)$$

откуда получаем **формулу для вычисления среднего значения $f_{\text{ср}}$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:**

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Так, средним значением $y_{\text{ср}}$ линейной функции $y = kx + b$ на отрезке $[a, b]$ является среднее арифметическое значений функции на концах отрезка, т.е. $y_{\text{ср}} = \frac{y(a) + y(b)}{2}$. Однако, для произвольной функции $f(x)$ ее среднее значение на отрезке, вообще говоря, не совпадает со средним арифметическим значений функции на концах этого отрезка. В частности, для выпуклой вверх функции $f(x)$ имеет место неравенство $f_{\text{ср}} > \frac{f(a) + f(b)}{2}$, а для выпуклой вниз функции $g(x)$ – неравенство $g_{\text{ср}} < \frac{g(a) + g(b)}{2}$.

44.4. Формула Ньютона – Лейбница. Для вычисления определенного интеграла используется **формула Ньютона – Лейбница**, согласно которой определенный интеграл по отрезку $[a, b]$ от функции $f(x)$, непрерывной на этом отрезке, равен приращению первообразной $F(x)$ функции f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (6.14)$$

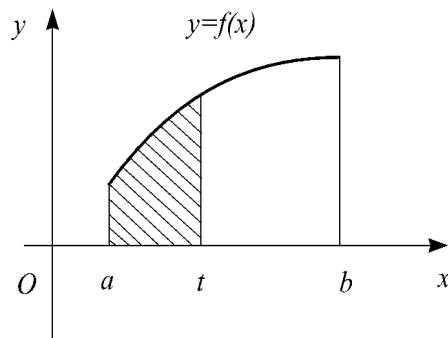


Рис. 6.65

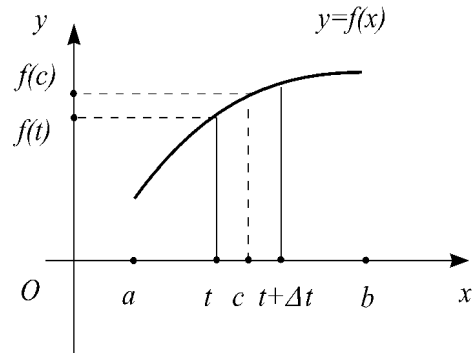


Рис. 6.66

Приведем доказательство формулы (6.14) для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, при условии $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^t f(x) dx$ с переменным верхним пределом интегрирования $t \in [a, b]$. Этот интеграл является функцией от переменной t и выражает площадь той части криволинейной трапеции, рассмотренной в п. 44.2, которая расположена левее прямой $x = t$ (на рис. 6.65 эта часть отмечена штриховкой).

Покажем, что эта функция $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ является первообразной для функции f на промежутке (a, b) , т.е. выполняется равенство $F_0'(t) = f(t)$ при всех $t \in (a, b)$.

С этой целью рассмотрим приращение $F_0(t + \Delta t) - F_0(t)$ функции F_0 в точке $t \in (a, b)$, которое выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , прямыми $x = t$, $x = t + \Delta t$ и графиком функции $y = f(x)$ (см. рис. 6.66), а, следовательно, выражается определенным интегралом $\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx$ по отрезку $[t, t + \Delta t]$, т.е.

$$F_0(t + \Delta t) - F_0(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx.$$

Учитывая равенство (6.13), имеем также

$$\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx = f(c)\Delta t,$$

где c – некоторая точка отрезка $[t, t + \Delta t]$ (см. рис. 6.66). Поэтому для средней скорости изменения функции F_0 на отрезке $[t, t + \Delta t]$ имеет место равенство

$$\frac{F_0(t+\Delta t) - F_0(t)}{\Delta t} = f(c).$$

Наконец, в силу непрерывности функции f ее среднее значение $f(c)$ на отрезке $[t, t + \Delta t]$ стремится к значению $f(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, что и доказывает равенство $F'_0(t) = f(t)$ при $t \in (a, b)$.

Поскольку функция $F_0(t) = \int_a^t f(x) dx$ является первообразной для функции f , то любая из первообразных функции f – функция F – выражается равенством (см. п. 44.1)

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx + C,$$

где постоянная C находится при подстановке в это равенство значения $t = a$, так что $C = F(a)$.

Таким образом, установлено равенство

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a),$$

из которого при $t = b$ получаем формулу (6.14). Доказательство закончено.

Используется также следующее обозначение

$$F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

приращения функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/3} \left(8 \sin 2x + 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) \right) dx.$$

Решение. В примере 1 установлено, что функция $F(x) = 6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x$ является первообразной для функции $f(x) = 8 \sin 2x + 18 \cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$. Поэтому по формуле Ньютона – Лейбница получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} f(x) dx &= \left(6 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 2x \right) \Big|_0^{\pi/3} = \left(6 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \\ &- \left(6 \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) - 4 \cos 0 \right) = (3 + 2) - (-3 - 4) = 12. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$ и $y = \frac{2}{\pi} x$.

Решение. В силу нечетности функций $y = \sin x$ и $y = \frac{2}{\pi} x$ их графики симметричны относительно начала координат и ограничивают фигуру, состоящую из двух равных по площади сегментов синусоиды (см. рис. 6.38). Точки пересечения этих графиков найдены в примере 6 из § 38. Их абсциссы $x = 0$ и $x = \pm \pi/2$.

Площадь одного сегмента синусоиды выражается разностью между площадью криволинейной трапеции (ограниченной синусоидой, осью Ox и прямой

$x = \pi/2$) и площадью треугольника (ограниченного осью Ox , а также прямыми $y = \frac{2}{\pi}x$ и $x = \pi/2$). Поэтому искомая площадь выражается равенствами

$$S = 2 \left(\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x \, dx \right) = 2 \left(-\cos x - \frac{1}{\pi} x^2 \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 2(-\cos 0 - 0) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

О т в е т: $2 - \frac{\pi}{2}$.