

2.3. Ірраціональні рівняння і нерівності

Група А

Розв'язати рівняння (завдання 2.192 – 2.216):

2.192. $\sqrt{5x-1} = 4x-2$. Відповідь: $x = 1$.

2.193. $\sqrt{5x+1} = 10-2x$. Відповідь: $x = 3$.

2.194. $\sqrt{7-2x} = 2x+5$. Відповідь: $x = -1$.

2.195. $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$. Відповідь: $x = -1$.

2.196. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$. Відповідь: $x = 3$.

2.197. $\sqrt{8-6x-x^2} = x+6$. Відповідь: $x = -2$.

2.198. $\sqrt{5x-x^2-25} = \frac{3}{2}x-4$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

•

2.199. $\sqrt{4-x} = 3 - \sqrt{5+x}$. Відповідь: $x \in \{-5; 4\}$.

2.200. $\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+7} = 2$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.201. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$. Відповідь: $x = -1$.

2.202. $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$. Відповідь: $x = 5$.

2.203. $\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x-2}$. Відповідь: $x = 3$.

2.204. $\sqrt{x+2} - \sqrt{5-2x} = 1$. Відповідь: $x = 2$.

2.205. $\sqrt{3-x} - \sqrt{2x+3} = 1$. Відповідь: $x = -1$.

2.206. $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$. Відповідь: $x = 17/16$.

2.207. $\sqrt{x+17} - \sqrt{x-7} = 4$. Відповідь: $x = 8$.

2.208. $\sqrt{x+7} = 9 - \sqrt{x-2}$. Відповідь: $x = 18$.

•

2.209. $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = \sqrt{2x}$. Відповідь: $x = \frac{5 + \sqrt{23}}{2}$.

2.210. $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$. Відповідь: $x = 2$.

2.210.* [1, § 11, приклад 6, с. 53]

$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{x+4}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.211. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.212. $\sqrt{x+1} = \sqrt{3x+12} - \sqrt{4x+13}$. Відповідь: $x = -1$.

2.213. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x+6} = \sqrt{12x+25}$. Відповідь: $x = 2$.

2.214. $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{x+10}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.215. $\sqrt{x-4} - \sqrt{3x+5} = \sqrt{3-x}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.216. $\sqrt{3x+7} + \sqrt{x-1} = \sqrt{8x+2}$. Відповідь: $x \in \{1; 11\}$.

•

Розв'язати нерівності (завдання 2.217 – 2.249):

2.217. $\sqrt{2x-3} < 2x-9$. Відповідь: $x \in (6; \infty)$.

2.218. $\sqrt{4x+20} < x+2$. Відповідь: $x \in (4; \infty)$.

2.219. $\sqrt{3x+7} < 1-x$. Відповідь: $x \in [-7/3; -1)$.

2.219.* [1, § 11, приклад 4, с. 52]

$\sqrt{x+1} < 1-x$. Відповідь: $x \in [-1; 0)$.

- 2.220. $\sqrt{2x+9} < 3-x$. Відповідь: $x \in [-4, 5; 0)$.
- 2.221. $\sqrt{3x-5} > x-3$. Відповідь: $x \in [5/3; 7)$.
- 2.222. $\sqrt{x-2} > 3-x$. Відповідь: $x \in \left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$.
- 2.222.* [1, § 11, приклад 5, с. 52; § 34, приклад 1, с. 198]
 $\sqrt{x+1} > 1-x$. Відповідь: $x \in (0; \infty)$.
- 2.223. $\sqrt{3x+9} > 2x+10$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 2.224. $\sqrt{3x-2} \leq 4-x$. Відповідь: $x \in [2/3; 2]$.
- 2.225. $\sqrt{3x+1} \geq x-1$. Відповідь: $x \in [-1/3; 5]$.
- 2.226. $\sqrt{x^2-2x-3} < x+1$. Відповідь: $x \in [3, \infty)$.
- 2.227. $\sqrt{25-x^2} < 4$. Відповідь: $x \in [-5, -3) \cup (3; 5]$.
- 2.228. $\sqrt{2x^2-3x-5} < x+1$. Відповідь: $x \in [2, 5; 6)$.
- 2.229. $\sqrt{6-4x-x^2} < x+4$. Відповідь: $x \in (-1; -2 + \sqrt{10}]$.
- 2.230. $\sqrt{x^2-7x+10} > 2x-10$. Відповідь: $x \in (-\infty, 2] \cup (5; 6)$.
- 2.231. $\sqrt{x^2-4x} > x-3$. Відповідь: $x \in (-\infty; 0] \cup (4, 5; \infty)$.
- 2.232. $\sqrt{16+6x-x^2} \leq x+4$. Відповідь: $x \in [-2; -1] \cup [0; 8]$.
- 2.233. $\sqrt{16x^2-40x+25} \leq x-3$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 2.234. $\sqrt{x^2+5x+4} \leq \frac{1}{2}x+2$. Відповідь: $x \in \{-4\} \cup [-1; 0]$.
- 2.235. $\sqrt{9+8x-x^2} \leq 2x+2$. Відповідь: $x \in \{-1\} \cup [1; 9]$.
- 2.236. $\sqrt{21+4x-x^2} \geq x-1$. Відповідь: $x \in [-3; 5]$.
- 2.237. $\sqrt{x^2-3x+2} \geq 2-x$. Відповідь: $x \in [2, \infty)$.
-
- 2.238. $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} > \sqrt{2}$. Відповідь: $x \in [2; 5]$.
- 2.239. $\sqrt{4-x} < 3 - \sqrt{x+1}$. Відповідь: $x \in [-1; 0) \cup (3; 4]$.
- 2.240. $\sqrt{x-5} < 3 - \sqrt{10-x}$. Відповідь: $x \in [5; 6) \cup (9; 10]$.
- 2.241. $\sqrt{x+3} < 5 - \sqrt{10-x}$. Відповідь: $x \in [-3; 1) \cup (6; 10]$.
- 2.242. $\sqrt{4-x} < 2 - \sqrt{x-2}$. Відповідь: $x \in [2; 3) \cup (3; 4]$.
- 2.243. $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-5} < 3$. Відповідь: $x \in [5; 25 + 6\sqrt{11})$.
- 2.244. $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{3}$. Відповідь: $x \in \{2; 5\}$.
- 2.245. $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$. Відповідь: $x \in [2, 5; 3)$.
- 2.246. $\sqrt{7-2x} - \sqrt{4-x} \leq \sqrt{3-x}$. Відповідь: $x \in (-\infty, 3]$.
- 2.247. $\sqrt{9-2x} - \sqrt{1-x} \geq \sqrt{4-x}$. Відповідь: $x \in [0; 1]$.
- 2.248. $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-1}$. Відповідь: $x \in [1; 2]$.
- 2.249. $\sqrt{11-2x} - \sqrt{2-x} > \sqrt{5-x}$. Відповідь: $x \in (1; 2]$.

Група Б

Розв'язати рівняння (завдання 2.250 – 2.298):

2.250. $\sqrt{x^2-4}\sqrt{x+1} = x+2$. Відповідь: $x = -1$.

- 2.251. $\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}$. Відповідь: $x = 4$.
- 2.252. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 42}} = x + 1$. Відповідь: $x \in \{0; 19/2\}$.
- 2.253. $\sqrt{5 - \sqrt{x + 1 + \sqrt{2x^2 + x + 3}}} = 1$. Відповідь: $x \in \{-37; 6\}$.
-
- 2.254. $\frac{3}{\sqrt{2x - 3}} + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{x - 5}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 2.255. $\sqrt{2x + 1} - \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} = \sqrt{x + 5}$. Відповідь: $x = \frac{11 + \sqrt{161}}{4}$.
- 2.256. $\sqrt{3x + 2} - \frac{2}{\sqrt{3x + 2}} = \sqrt{x + 5}$. Відповідь: $x = \frac{10}{3}$.
- 2.257. $\sqrt{2x + 3} - \frac{3}{\sqrt{2x + 3}} = \sqrt{x + 4}$. Відповідь: $x = \frac{11 + \sqrt{217}}{4}$.
- 2.258. $\sqrt{3x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3x + 1}} = \sqrt{x + 4}$. Відповідь: $x = \frac{13 + \sqrt{265}}{12}$.
-
- 2.259. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$. Відповідь: $x \in [1; 2]$.
- 2.260. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1$. Відповідь: $x \in (-\infty; 1]$.
- 2.261. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$. Відповідь: $x \in [3; \infty)$.
-
- 2.262. $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$. Відповідь: $x = 5$.
- 2.263. $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$. Відповідь: $x \in [5; 10]$.
- 2.264. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$. Відповідь: $x \in [2; \infty)$.
- 2.265. $\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x + 1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x + 1}} = 1$. Відповідь: $x \in [0; 3]$.
- 2.266. $\sqrt{x + 8 + 2\sqrt{x + 7}} + \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + 7}} = 4$. Відповідь: $x = 2$.
- 2.267. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = x - 1$. Відповідь: $x = 5$.
-
- 2.268. $\sqrt[3]{5x + 2} - \sqrt[3]{5x - 2} = 2$. Відповідь: $x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{5}$.
- 2.269. $\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt[3]{1 - x} = 1$. Відповідь: $x = \pm \frac{2\sqrt{21}}{9}$.
- 2.270. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 7} = 2$. Відповідь: $x = 7$.
- 2.271. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x} = 1$. Відповідь: $x = 0$.
- 2.272. $\sqrt[3]{2 + 11x} + \sqrt[3]{2 - 11x} = 4$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 2.273. $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x - 1} = 1$. Відповідь: $x = 1$.
- 2.274. $\sqrt[3]{2x - 1} + \sqrt[3]{x} = -1$. Відповідь: $x = 0$.
- 2.275. $\sqrt[3]{2x + 1} + \sqrt[3]{x} = 1$. Відповідь: $x = 0$.
- 2.276. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - 7x} = 1$. Відповідь: $x \in \{-1; 0; 1/8\}$.
- 2.277. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x + 1} = \sqrt[3]{3x + 1}$. Відповідь: $x \in \{0; -1/2; -1/3\}$.
- 2.278. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x + 1} = \sqrt[3]{9x + 1}$. Відповідь: $x \in \{0; -1; -1/10\}$.

2.279. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} = \sqrt[3]{x-2}$. Відповідь: $x = 0$.

2.279.* [1, § 14, приклад 6, с. 83]

$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{4x-3} = \sqrt[3]{2x-3}$. Відповідь: $x = 0$.

2.280. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2-3x}$. Відповідь: $x = 0$.

2.281. $\sqrt[3]{x-4} = 1 - \sqrt{x+1}$. Відповідь: $x = 3$.

2.282. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$. Відповідь: $x \in \{1; 2; 10\}$.

•
2.283. $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - 6\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} + 1 = 0$. Відповідь: $x = 5$.

2.284. $\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} + \sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} = \frac{5}{2}$. Відповідь: $x \in \{-13/2; 1\}$.

2.285. $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt[4]{x^2+32} = 3$. Відповідь: $x = \pm 7$.

2.286. $2\sqrt[6]{x^2+39} + \sqrt[3]{x^2+39} = 8$. Відповідь: $x = \pm 5$.

2.287. $\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7$. Відповідь: $x \in \{2/7; 5\}$.

•
2.288. $x + 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{20}{x-1}$. Відповідь: $x \in \{-\sqrt{26}, \sqrt{17}\}$.

2.289. $x + 4 - \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} = \frac{12}{x-4}$. Відповідь: $x \in \{-5; 4\sqrt{2}\}$.

2.290. $x + 2 - \sqrt{\frac{x+2}{x-6}} = \frac{12}{x-6}$. Відповідь: $x \in \{-3; 2 + 4\sqrt{2}\}$.

2.291. $x + 3 - \sqrt{\frac{x+3}{x-5}} = \frac{6}{x-5}$. Відповідь: $x \in \{6; 1 - 2\sqrt{5}\}$.

2.291.* [1, § 11, приклад 11, с. 56]

$\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{\frac{x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{x}} = 2$. Відповідь: $x = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$.

•
2.292. $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x^2-1}$. Відповідь: $x = 1$.

2.293. $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-6x+8} = \sqrt{x^2-11x+18}$. Відповідь: $x \in \{0; 2\}$.

2.294. $\sqrt{2x^2+5x+2} - \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{3x+6}$. Відповідь: $x \in \{-2; 1; 13\}$.

•
2.295. $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$. Відповідь: $x \in \{1; -8/3\}$.

2.296. $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$. Відповідь: $x = 4$.

•
2.297. $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$. Відповідь: $x \in \{-6; 1\}$.

2.298. $\sqrt[3]{(x+4)^2} + \sqrt[3]{(x-5)^2} - \sqrt[3]{(x+4)(x-5)} = 3$. Відповідь: $x \in \{-3; 4\}$.

•
Розв'язати нерівності (завдання **2.299** – **2.330**):

2.299. $2\sqrt{x^2-6x-7} \leq 22 + 6x - x^2$. Відповідь: $x \in [-2; -1] \cup [7; 8]$.

2.300. $5\sqrt{x^2-13x+36} \geq x^2-13x+30$. Відповідь: $x \in [0; 4] \cup [9; 13]$.

2.301. $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$. Відповідь: $x \in (3/4; 2)$.

2.302. $\sqrt{\frac{1-x}{2x-5}} < 3$. Відповідь: $x \in [1; 46/19)$.

2.303. $\sqrt{\frac{x^2+6x-16}{x-4}} \geq x-2$. Відповідь: $x \in [-8; 2] \cup (4; 7]$.

2.304. $\sqrt{\frac{x^2-4x-12}{x-3}} \geq x+2$. Відповідь: $x \in [-2; 0] \cup [2; 3)$.

2.305. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{3}{2}$. Відповідь: $x \in (\infty, -1) \cup (5/3; \infty)$.

2.306. $\sqrt{\frac{x+2}{4-x}} + \sqrt{\frac{4-x}{x+2}} \leq 2$. Відповідь: $x = 1$.

•

2.307. $\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{4-x} > 0$. Відповідь: $x \in (3, \infty)$.

2.308. $\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{x^2+2x} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$.

2.309. $\sqrt[3]{2x+4} - \sqrt[3]{2x-4} < 2$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

2.309.* [1, § 11, приклад 10, с. 56]

$\sqrt[3]{x+12} + \sqrt[3]{14-x} \leq 2$. Відповідь: $x \in (-\infty, -13] \cup [15, \infty)$.

2.310. $\sqrt[3]{8+3x} + \sqrt[3]{8-3x} \geq 4$. Відповідь: $x = 0$.

•

2.311. $\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} > 1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.312. $\frac{3-\sqrt{4-x}}{x+1} > 1$. Відповідь: $x \in (-1; 0)$.

2.313. $\frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} > 1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.314. $\frac{1-\sqrt{6-x}}{x-3} > 1$. Відповідь: $x \in (2; 3)$.

2.315. $\frac{4-\sqrt{2-x}}{x} > 1$. Відповідь: $x \in (0; 2]$.

2.316. $\frac{2-\sqrt{x-1}}{x} < -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.317. $\frac{\sqrt{1-x}+1}{x-3} < -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.318. $\frac{2+\sqrt{4-x}}{x} < -1$. Відповідь: $x \in (-5; 0)$.

2.319. $\frac{\sqrt{x-1}+7}{x} > 1$. Відповідь: $x \in [1; 10)$.

2.320. $\frac{4+\sqrt{-2-x}}{x} < -1$. Відповідь: $x \in (-6; -2]$.

2.321. $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$. Відповідь: $x \in [-5, -1) \cup (1, \infty)$.

- 2.322.** $\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} < 1$. Відповідь: $x \in [-6; 0) \cup (3; 4]$.
-
- 2.323.** $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \leq 1$. Відповідь: $x \in [2; 5]$.
- 2.323.*** [1, § 11, приклад 8, с. 55]
- $\sqrt{x+4-6\sqrt{x-5}} + \sqrt{x+20-10\sqrt{x-5}} \geq 2$. Відповідь: $x \in [5; \infty)$.
- 2.324.** $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} \geq 1$. Відповідь: $x \in [-1; 0]$.
- 2.325.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 2$. Відповідь: $x \in [1; \infty)$.
- 2.326.** $3\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \sqrt{x+1}$. Відповідь: $x \in [1; 5/4) \cup (65/16; \infty)$.
-
- 2.327.** $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$. Відповідь: $x \in \{-1\} \cup [2; \infty)$.
- 2.328.** $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$. Відповідь: $x \in [-4; 1] \cup \{2\}$.
- 2.329.** $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leq \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$. Відповідь: $x \in \{-4\} \cup [2; 3]$.
- 2.330.** $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$. Відповідь: $x \in [-2; -1] \cup \{3\}$.

2.4. Логарифми. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності

Група А

Обчислити (завдання **2.331** – **2.352**):

- 2.331.** $3^{\log_{27}(2\sqrt{2})}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.
- 2.332.** $5^{\log_{5\sqrt{5}}2}$. Відповідь: $\sqrt[3]{4}$.
- 2.333.** $(\sqrt{3})^{-\log_{3\sqrt{3}}\sqrt{2}}$. Відповідь: $1/\sqrt[6]{2}$.
- 2.334.** $16^{\frac{1}{2}\log_2 7 - \log_{16} 7}$. Відповідь: 7.
- 2.335.** $5^{\frac{1}{2\log_{81} 5} + \log_{25} 4}$. Відповідь: 18.
- 2.336.** $81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}$. Відповідь: -11.
- 2.337.** $\frac{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} 5}{\log_{5-2\sqrt{6}} 5}$. Відповідь: 2.
- 2.337.*** [1, § 12, приклад 1, с. 59] $\log_{(2+\sqrt{3})}(7-4\sqrt{3})$. Відповідь: -2.
- 2.338.** $\log_2 \log_3(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - \log_2 \log_3(7 + 2\sqrt{10})$. Відповідь: -1.
- 2.339.** $5^{\log_{25}(\sqrt{3}-5)^2} + 2^{\log_4(\sqrt{3}+5)^2}$. Відповідь: 10.
- 2.340.** $3^{\log_9(1-\sqrt{3})^2} + 2^{\log_4(1+\sqrt{3})^2}$. Відповідь: $2\sqrt{3}$.
-
- 2.341.** $27^{1/\log_4 3} - 4^{\frac{1}{2} + \log_2 5} - 16^{3/4}$. Відповідь: 6.
- 2.341.*** [1, § 12, приклад 2, с. 59]
- $7^{\log_{49}(\sqrt{5}-3)^2} + 5^{3\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt{5}+3}} + \log_3(2\log_{11}\sqrt[3]{11})$. Відповідь: 5.