

пуклости графика функции.

Заметим также, что поскольку условие $g'(x) > 0$ является достаточным, но вовсе не необходимым, для возрастания функции $g(x) = f'(x)$, то условие $f''(x) > 0$ также является достаточным для выпуклости вниз функции $f(x)$, но вовсе не необходимым. Действительно, функция $y = f(x) = x^4$ — выпукла вниз (см. график этой функции на рис. 1.8), но при этом вторая производная $f''(x) = 12x^2$ обращается в ноль в точке $x = 0$. Этот пример показывает также, что в случае, когда $f''(x) = 0$, график функции $f(x)$ может не иметь перегиба в соответствующей точке.

Совершенно аналогично устанавливается, что условие $f''(x) < 0$ — достаточно для выпуклости вверх функции $f(x)$, но вовсе не необходимо.

В заключение рассмотрим пример использования свойств выпуклости функций при решении уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2$.

Решение. Решим уравнение **графическим методом** (см рис. 6.45).

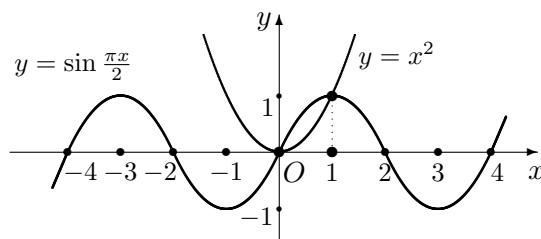


Рис. 6.45

Очевидно, что графики функций $y = f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ и $y = g(x) = x^2$ пересекаются в точках с абсциссами $x = 0$, $x = 1$ и не пересекаются на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$. На промежутке $(0; 1)$ кривая $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ выпукла вверх (поскольку $f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2} < 0$ при $x \in (0; 1)$), а кривая $y = x^2$ — выпукла вниз (поскольку $g''(x) = 2 > 0$). Поэтому на промежутке $(0; 1)$ точек пересечения графики функций $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ и $y = x^2$ также не имеют.

Ответ: $x \in \{0; 1\}$.

§ 40. Наибольшее и наименьшее значение (абсолютные экстремумы) функции на отрезке

Типичным и в то же время наиболее простым примером задачи о нахождении абсолютных экстремумов функции является задача о нахождении наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции, заданной на некотором отрезке.

Напомним, что график непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции не имеет разрывов на этом отрезке (см. § 35). Основные элементарные функции, изучаемые

в школьном курсе математики, являются непрерывными в тех точках, в которых они определены.

Отметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ для всех $x \in [a, b]$.

Очевидно, что в этом случае наименьшее значение функции $f(x_1)$ является **абсолютным минимумом** этой функции на отрезке $[a, b]$, а наибольшее значение функции $f(x_2)$ — ее **абсолютным максимумом** на этом отрезке.

При этом используют обозначения

$$f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Подчеркнем, что непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает свои наименьшее и наибольшее значения либо в критических точках, либо на концах отрезка $[a, b]$ (см. рис. 6.46 иллюстрирующий это свойство непрерывной функции).

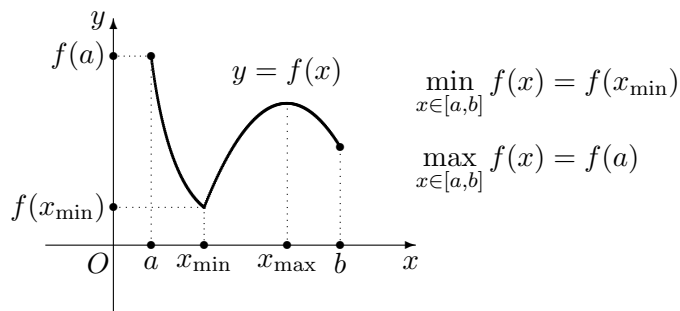


Рис. 6.46

Отсюда вытекает следующий **алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции**, непрерывной на отрезке $[a, b]$: сначала находим критические точки функции, принадлежащие отрезку $[a, b]$, затем вычисляем значения функции в этих критических точках и на концах a и b отрезка и, наконец, выбираем среди вычисленных значений функции наибольшее и наименьшее значение.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - |6x - 6|$ на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Раскрывая модуль в выражении, которым задана функция $f(x)$, представим эту функцию в виде

$$f(x) = x^2 - |6x - 6| = \begin{cases} x^2 - 6x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ x^2 + 6x - 6, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

При нахождении производной $f'(x)$ следует особо выделить точку $x = 1$, в которой подмодульное выражение $6x - 6$ обращается в ноль, а график функции $y = |6x - 6|$ в соответствующей точке имеет излом (см. рис. 6.4). Аналогичный излом при $x = 1$ в соответствующей точке является также отличительной особенностью графика функции $f(x)$. Это означает, что в указанной точке график функции $y = f(x)$ не имеет касательной, а, следовательно, производная $f'(x)$ не определена (!) при $x = 1$ (см. п. 39.2).

Таким образом, имеем

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x > 1, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 1, \\ 2x + 6, & \text{если } x < 1, \end{cases}$$

а значит, $x = 1$ — критическая точка функции $f(x)$, которая к тому же принадлежит отрезку $[0; 4]$.

Находим другие критические точки:

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} 2x - 6 = 0, \\ x > 1, \\ 2x + 6 = 0, \\ x < 1, \end{cases} & \iff \begin{cases} x = 3, \\ x = -3, \end{cases} \end{cases}$$

из которых отрезку $[0; 4]$ принадлежит точка $x = 3$.

Теперь находим значения функции $f(x)$ в критических точках функции, принадлежащих отрезку $[0; 4]$, и на концах этого отрезка:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(3) &= 3^2 - |6 \cdot 3 - 6| = -3, \\ f(0) &= 0 - |-6| = -6, \\ f(4) &= 4^2 - |6 \cdot 4 - 6| = -2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0; 4]} f(x) &= \max\{f(1), f(3), f(0), f(4)\} = f(1) = 1, \\ \min_{x \in [0; 4]} f(x) &= \min\{f(1), f(3), f(0), f(4)\} = f(0) = -6. \end{aligned}$$

$$\text{О т в е т: } \max_{x \in [0; 4]} f(x) = f(1) = 1, \quad \min_{x \in [0; 4]} f(x) = f(0) = -6.$$

§ 41. Область значений функции

Из определения графика функции $y = f(x)$ (см. §4 главы 1) следует, что **область определения** $D(f)$ функции $f(x)$ является проекцией графика этой функции на ось Ox .

Проекцией графика функции $y = f(x)$ на ось Oy является множество значений, принимаемых функцией $f(x)$, которое называют **областью значений** этой функции и обозначают $E(f)$.

Так, например, областью значений функции $y = f(x) = x^2$ является множество $E(f) = [0, \infty)$ (см. график функции на рис. 1.8), у функции $y = f(x) = \frac{1}{x^3}$ область значений $E(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (см. график функции на рис. 1.11), функция $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ имеет область значений $E(f) = (0, \infty)$ (см. график функции на рис. 1.10), область значений функции $y = f(x) = x^6 + 2$ — это множество $E(f) = [2, \infty)$ (см. график функции на рис. 6.1), а областью значений функции $y = f(x) = \sin x$ является отрезок $E(f) = [-1; 1]$ (см. график функции на рис. 3.2).

Пример 1. Найти область значений функции $f(x) = \left(\sqrt{64-x^2}\right)^2$.

Решение. Отметим, что $\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 \neq 64-x^2$, поскольку обе части этого неравенства имеют различные области определения!

Поэтому найдем сначала область определения функции $D(f)$, решая неравенство $64-x^2 \geq 0$, которое рассмотрено в примере 6 из § 6 главы 1. Таким образом, $D(f) = [-8; 8]$ и лишь на этой области определения $D(f)$ имеет место равенство $\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2 = 64-x^2$. Это означает, что графиком функции $y = f(x)$ является выделенная на рис. 1.21 часть параболы $y = 64-x^2$, которая расположена над отрезком $[-8; 8]$ оси Ox .

Очевидно, что проекцией выделенной части параболы $y = 64-x^2$ на ось Oy является отрезок $[0; 64]$. Таким образом, $E(f) = [0; 64]$.

Ответ: $E(f) = [0; 64]$.

Пример 2. Найти область значений функции $y(x) = 3^{\log_3(64-x^2)}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, находим сначала область определения функции $D(y)$, решая неравенство $64-x^2 > 0$, так что $D(y) = (-8; 8)$. При $x \in (-8; 8)$ имеет место равенство $3^{\log_3(64-x^2)} = 64-x^2$. Таким образом, графиком функции $y = y(x)$ является часть параболы $y = 64-x^2$, которая расположена над интервалом $(-8; 8)$ оси Ox , т.е. выше оси Ox . В отличие от графика функции $f(x)$, рассмотренной в предыдущем примере, график функции $y = y(x)$ не содержит точек пересечения параболы $y = 64-x^2$ с осью Ox . Поэтому его проекцией на ось Oy является промежуток $(0; 64]$. Таким образом, $E(y) = (0; 64]$.

Ответ: $E(y) = (0; 64]$.

Отметим, что областью значений функции $f(x)$, заданной и непрерывной на отрезке $[a, b]$, является отрезок $E(f) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$ (см. рис. 6.46). Таким образом, в этом случае нахождение области значений $E(f)$ сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой и существуют абсолютные максимум и минимум этой функции, то $E(f) = \left[\min_{x \in \mathbf{R}} f(x), \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) \right]$.

Пример 3. Найти область значений функции $f(x) = 5 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) - 2$.

Решение. Свое наибольшее или наименьшее значение функция $f(x)$ достигает в том случае, когда $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$ принимает соответственно свое наибольшее или наименьшее значение.

Таким образом, $\min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5(-1) - 2 = -7$, $\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 5 \cdot 1 - 2 = 3$.

Следовательно, $E(f) = [-7; 3]$.

Ответ: $E(f) = [-7; 3]$.

Пример 4. Найти область значений функции $f(x) = 3 \sin 3x - 4 \cos 3x - 2$.

Решение. Используя формулу (3.19), представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = 5 \sin(3x + \alpha) - 2$, где α — некоторый вспомогательный угол.

Теперь область значений этой функции находится путем таких же рассуждений, как и в предыдущем примере. Таким образом, $E(f) = [-7; 3]$.

Ответ: $E(f) = [-7; 3]$.

Пример 5. Найти область значений функции $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1$.

Решение. 1-й способ. Отметим, что $f(x)$ определена всюду на $\mathbf{R}$ и периодическая с наименьшим периодом 2π . Поэтому для того, чтобы найти ее область значений $E(f)$, достаточно определить наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на любом из отрезков длины 2π , например, на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Находим критические точки функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \cos x,$$

$$f'(x) = 0 \iff \cos x(2 \sin x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, & m \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Промежутку $[-\pi, \pi]$ принадлежат следующие критические точки функции $f(x)$: $x = -\frac{\pi}{2}$ (при $n = -1$), $\frac{\pi}{2}$ (при $n = 0$), $\frac{\pi}{6}$ (при $m = 0$), $\frac{5\pi}{6}$ (при $k = 0$).

Находим значения функции $f(x)$ в этих точках и на концах отрезка $[-\pi, \pi]$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5}{4}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(-\pi) = f(\pi) = -1.$$

$$\text{Таким образом, } \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\frac{5}{4}, \quad \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1 \quad \text{и} \quad E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right].$$

Отметим еще один способ решения задачи.

2-й способ. Сделаем **замену переменных**: $t = \sin x$. Тогда $f(x) = \sin^2 x - \sin x - 1 = t^2 - t - 1 = \varphi(t)$, при этом, если x "пробегают" область определения функции $f(x)$, то t "пробегают" область значений функции $t = \sin x$, т.е. отрезок $[-1; 1]$. Это означает, что область значений функции $f(x)$, заданной на $\mathbf{R}$, совпадает с областью значений функции $\varphi(t)$, заданной на $[-1; 1]$, при этом

$$\max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t), \quad \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t).$$

Найдем наибольшее и наименьшее значение функции $\varphi(t) = t^2 - t - 1$ на отрезке $[-1; 1]$. Поскольку $t = \frac{1}{2}$ — абсцисса вершины параболы $y = t^2 - t - 1$, то функция $\varphi(t)$ имеет минимум в точке $t = \frac{1}{2}$, которая, к тому же, принадлежит отрезку $[-1; 1]$. При этом $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} = \min_{t \in [-1; 1]} \varphi(t)$.

Других критических точек функция $\varphi(t)$ не имеет. Тогда

$$\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = \max\{\varphi(-1), \varphi(1)\}, \quad \varphi(-1) = 1, \quad \varphi(1) = -1$$

и, таким образом, $\max_{t \in [-1; 1]} \varphi(t) = 1$. Значит, $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

О т в е т: $E(f) = \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$.

§ 42. Применение производной к доказательству неравенств

Идея применения производной к доказательству многих неравенств основана на следующих утверждениях.

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) > A$ (или $f(x) \geq A$) при всех $x \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда $\min_{x \in [a, b]} f(x) > A$ (соответственно, $\min_{x \in [a, b]} f(x) \geq A$).

Аналогично, непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x) < B$ (или $f(x) \leq B$) при всех $x \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда $\max_{x \in [a, b]} f(x) < B$ (соответственно, $\max_{x \in [a, b]} f(x) \leq B$).

Рассмотрим пример.

Пример. Доказать, что $0 \leq 12 \sin 2x - 8 \sin 3x \leq 20 \sin \frac{\pi}{5}$ для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = 12 \sin 2x - 8 \sin 3x$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. С этой целью находим критические точки функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 24 \cos 2x - 24 \cos 3x; \\ f'(x) = 0 &\iff \cos 2x - \cos 3x = 0 \iff \\ &\iff \sin \frac{5x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{5}, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = 2\pi k, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Промежутку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат две критические точки функции $f(x)$, а именно: $x = 0$ (при $k = n = 0$) и $x = \frac{2\pi}{5}$ (при $n = 1$). Имеем

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \quad f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 12 \sin \frac{4\pi}{5} - 8 \sin \frac{6\pi}{5} = 12 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) - 8 \sin \left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \\ &= 20 \sin \frac{\pi}{5}; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8. \end{aligned}$$

Поскольку $0 < 8 < 20 \sin \frac{\pi}{6} < 20 \sin \frac{\pi}{5}$, то

$$\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 20 \sin \frac{\pi}{5}$$

и, таким образом, $0 \leq f(x) \leq 20 \sin \frac{\pi}{5}$ для всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Доказательство закончено.