

Всякая хорошо решенная математическая задача доставляет умственное наслаждение, ... а всякое сосредоточенное размышление успокаивает сердце и делает его созвучным вселенной.

ГЕРМАН ГЕССЕ, "Игра в бисер"

Розділ І. Задачі та вправи

В розділі І зірочкою відмічено усі типові та базові завдання (наприклад, 1.1*), розв'язки яких наведено в посібнику [1]. Посилання на відповідне місце в тексті посібника [1] наводиться відразу після номера завдання. Блоки однотипних вправ розділено додатковим вертикальним відступом та відмічено чорним кружечком.

§ 1. Основні методи розв'язання рівнянь та нерівностей

Група А

Розв'язати нерівності графічним методом (завдання 1.1 – 1.42):

1.1. $x^2 - 2x - 3 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

1.1.* [1, § 6, приклад 3, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

1.2. $x^2 - 2x - 3 < 0$. Відповідь: $x \in (-1; 3)$.

1.2.* [1, § 6, приклад 4, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 < 0$. Відповідь: $x \in (1; 3)$.

1.3. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

1.3.* [1, § 6, приклад 5, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

1.4. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-1; 3]$.

1.5. $x^2 + 4x + 4 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

1.5.* [1, § 6, приклад 9, с. 26]

$x^2 - 2x + 1 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

1.6. $x^2 + 4x + 4 < 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

1.7. $x^2 + 4x + 4 \geq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

1.7.* [1, § 6, приклад 7, с. 26]

$x^2 - 2x + 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

1.8. $x^2 + 4x + 4 \leq 0$. Відповідь: $x = -2$.

1.8.* [1, § 6, приклад 8, с. 26]

$x^2 - 2x + 3 \leq 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

- 1.9. $4 - x^2 > 0$. Відповідь: $x \in (-2; 2)$.
- 1.10. $4 - x^2 < 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- 1.11. $4 - x^2 \geq 0$. Відповідь: $x \in [-2; 2]$.
- 1.11.* [1, § 6, приклад 6, с. 26]
 $64 - x^2 \geq 0$. Відповідь: $x \in [-8; 8]$.
- 1.12. $4 - x^2 \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
- 1.13. $2x - x^2 - 8 > 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.14. $2x - x^2 - 8 < 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.15. $2x - x^2 - 1 > 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.16. $2x - x^2 - 1 < 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
- 1.17. $2x - x^2 - 1 \geq 0$. Відповідь: $x = 1$.
- 1.18. $2x - x^2 - 1 \leq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.19. $x^8 > 7$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[8]{7}) \cup (\sqrt[8]{7}, \infty)$.
- 1.19.* [1, § 6, приклад 10, с. 27]
 $x^6 > 5$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}, \infty)$.
- 1.20. $x^8 < 7$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[8]{7}, \sqrt[8]{7})$.
- 1.21. $x^6 \geq 5$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}] \cup [\sqrt[6]{5}, \infty)$.
- 1.22. $x^6 \leq 3$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{3}]$.
- 1.22.* [1, § 6, приклад 11, с. 28]
 $x^6 \leq 5$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.
- 1.23. $x^3 < 8$. Відповідь: $x \in (-\infty, 2)$.
- 1.24. $x^3 \leq -8$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2]$.
- 1.25. $x^5 \geq -3$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[5]{3}, \infty)$.
- 1.25.* [1, § 6, приклад 12, с. 28]
 $x^5 > -7$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[5]{7}, \infty)$.
- 1.26. $x^4 \geq -2$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.27. $x^6 \leq -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.28. $\frac{1}{x} \geq 4$. Відповідь: $x \in (0; 1/4]$.
- 1.29. $\frac{1}{x} < 3$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (1/3, \infty)$.
- 1.29.* [1, § 6, приклад 13, с. 28]
 $\frac{1}{x} \leq 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.
- 1.30. $\frac{1}{x^3} < -1$. Відповідь: $x \in (-1, 0)$.
- 1.31. $\frac{1}{x^3} \geq -1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.
- 1.32. $\frac{1}{x^2} \geq 1$. Відповідь: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.
- 1.33. $\frac{1}{x^2} < 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

1.34. $\frac{1}{x^2} > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

1.35. $\frac{1}{x^2} < -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

1.36. $\log_2 x > 1$. Відповідь: $x \in (2, \infty)$.

1.37. $\log_2 x \leq 1$. Відповідь: $x \in (0; 2]$.

1.38. $\log_{1/2} x \geq 0$. Відповідь: $x \in (0; 1]$.

1.39. $3^x > 1 - x$. Відповідь: $x \in (0, \infty)$.

1.40. $2^x \leq 4 - 2x$. Відповідь: $x \in (-\infty; 1]$.

1.41. $\log_3 x \leq 7 - 2x$. Відповідь: $x \in (0; 3]$.

1.42. $\log_{1/3} x < 4x - 4$. Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

•

1.42.* Розв'язати подвійні нерівності та сукупності графічним методом:

а) [1, § 6, приклад 15, с. 30]

$5 < x^2 - 4x < 21$. Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

б) [1, § 6, приклад 16, с. 30]

$5 < x^2 - 4x \leq 21$. Відповідь: $x \in [-3; -1) \cup (5; 7]$.

в) [1, § 6, приклад 17, с. 31]

$\begin{cases} x^2 - 4x > 21, \\ x^2 - 4x \leq 5. \end{cases}$ Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

•

Розв'язати нерівності методом заміни змінних (завдання **1.43** – **1.50**):

1.43. $x^{12} - 13x^6 + 30 > 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{10}) \cup (-\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{3}) \cup (\sqrt[6]{10}, \infty)$.

1.43.* [1, § 7, приклад 2, с. 33]

$x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$. Відповідь: $x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

1.44. $x^8 - 18x^4 + 32 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-2, -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}, 2]$.

1.45. $x^8 - 12x^4 + 20 \geq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{10}) \cup [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{10}, \infty)$.

1.45.* [1, § 7, приклад 3, с. 33]

$x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup [-1; 1] \cup [\sqrt{10}, \infty)$.

1.46. $x^{14} - 2x^7 - 35 < 0$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[7]{5}, \sqrt[7]{7})$.

1.47. $x^6 - 9x^3 - 22 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{11}, \infty)$.

1.48. $x^{10} - 7x^5 - 18 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[5]{2}) \cup [\sqrt[5]{9}, \infty)$.

1.49. $x^8 - 3x^4 - 10 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}]$.

1.50. $x^{16} + 3x^8 - 4 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

•

Розв'язати нерівності методом інтервалів (завдання **1.51** – **1.56**):

1.51. $(x - 1)^4(x + 3)(x - 5)^3 < 0$. Відповідь: $x \in (-3; 1) \cup (1; 5)$.

1.52. $(x - 1)^4(x + 3)(x - 5)^3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3] \cup \{1\} \cup [5, \infty)$.

1.53. $\frac{(x-1)^4(x+3)}{(x-5)^3} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3] \cup \{1\} \cup (5, \infty)$.

1.53.* [1, § 8, приклад на с. 35]

$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x-4)} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty)$.

1.54. $(x^2 - 2x - 3)(x - 3)(x + 3)^5 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-3, -1] \cup \{3\}$.

1.55. $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) < 0$. Відповідь: $x \in (-2; 3)$.

1.56. $(x - 1)(x - 5)(x - x^2 - 1) > 0$. Відповідь: $x \in (1; 5)$.

•

Знайти переріз $A \cap B \cap C$ множин A, B і C (завдання **1.57** – **1.66**):

1.57. $A = (-8; 4), B = [-6; 5), C = [-3, \infty)$. Відповідь: $[-3; 4)$.

1.58. $A = (-6; 5], B = (-\infty, -2] \cup [3; \infty), C = (-\infty; 9/2)$.

Відповідь: $(-6; -2] \cup [3; 9/2)$.

1.59. $A = [-7; 4], B = (-\infty, -3) \cup [4; 12], C = (-\infty; 11/2)$.

Відповідь: $[-7; -3) \cup \{4\}$.

1.60. $A = (-9; 4], B = (-\infty, -5] \cup (4; 12], C = (-\infty; 11/2]$.

Відповідь: $(-9; -5]$.

1.61. $A = [-4; 2] \cup (7; 12), B = (-\infty, 1] \cup [12; 15], C = (-2; \infty)$.

Відповідь: $(-2; 1]$.

1.62. $A = (-3; 1] \cup (6; 13), B = (-\infty, 5), C = (-\infty; -8] \cup [-3; \infty)$.

Відповідь: $(-3; 1]$.

1.63. $A = [-2; 10], B = (-2; 12), C = (-\infty; 8] \cup [10; \infty)$.

Відповідь: $(-2; 8] \cup \{10\}$.

1.64. $A = (-6; 1], B = (-\infty; 1) \cup (3; \infty), C = [-7; \infty)$. Відповідь: $(-6; 1)$.

1.65. $A = [-6; 2), B = (-10; -4], C = (-\infty; -10] \cup (-4; \infty)$. Відповідь: \emptyset .

1.66. $A = [-6; 2), B = (-10; -4], C = (-\infty; -6] \cup [-4; \infty)$.

Відповідь: $\{-4; -6\}$.

•

Знайти об'єднання множин (завдання **1.67** – **1.74**):

1.67. $A = (-\infty; -3], B = (-5; -1], C = [-1; 2)$. Відповідь: $(-\infty; 2)$.

1.68. $A = [-8; -2), B = [2; 5), C = \{5\} \cup (6; 8)$.

Відповідь: $[-8; -2) \cup [2; 5) \cup (6; 8)$.

1.69. $A = [-7; -4), B = [-4; 2), C = (0; 3], D = (5; \infty)$.

Відповідь: $[-7; 3] \cup (5; \infty)$.

1.70. $A = (-5; 3), B = (-\infty; 4], C = (5; 8] \cup [12; 15), D = (15; 17]$.

Відповідь: $(-\infty; 4] \cup (5; 8] \cup [12; 15) \cup (15; 17]$.

1.71. $A = \{3\} \cup [5; 8], B = (-6; 4), C = \{-6\} \cup [8; 9)$. Відповідь: $[-6; 4) \cup [5; 9)$.

1.72. $A = (-\infty; -3), B = [-3; 2], C = (2; \infty)$. Відповідь: $(-\infty, \infty)$.

1.73. $A = (-\infty; -3), B = (-3; 2), C = (2; \infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty)$.

1.74. $A = (-\infty; -3], B = (-3; 2), C = (2; \infty)$. Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

•

Знайти область визначення функції (завдання **1.75** – **1.86**):

1.75. $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{3x + 12}$.

Відповідь: $D(y) = [-4, -2] \cup [4; 5]$.

1.76. $y = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{8 - 2x}$.

Відповідь: $D(y) = [-6, -3] \cup \{4\}$.

1.76.* [1, § 6, приклад 14, с. 29]

$y = \sqrt{64 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{6 - 2x}$. Відповідь: $D(y) = [-8; 1] \cup \{3\}$.

1.77. $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{-2x + 4}$.

Відповідь: $D(y) = [-3, -2] \cup [-1; 2]$.

1.78. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

Відповідь: $D(y) = [-5; 1] \cup [3; 5]$.

1.79. $y = \sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{14 - 4x}$.

Відповідь: $D(y) = [-4, -2] \cup [3; 7/2]$.

1.80. $y = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} + \sqrt{33 - 6x}$.

Відповідь: $D(y) = [-6, -4] \cup [2; 11/2]$.

1.81. $y = \sqrt{52 - 8x} - \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}$.

Відповідь: $D(y) = [-7, -2] \cup [5; 13/2]$.

1.82. $y = \sqrt{15 - 2x - x^2} + \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{25 - 10x}$.

Відповідь: $D(y) = [-5, -4] \cup [1; 5/2]$.

1.83. $y = \sqrt{42 - x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 20} + \sqrt{35 - 6x}$.

Відповідь: $D(y) = [-7, -5] \cup [4; 35/6]$.

1.84. $y = \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{10 - 2x - x^2} + \sqrt{25 - 10x}$.

Відповідь: $D(y) = [-1 - \sqrt{11}, -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{11}]$.

1.85. $y = \sqrt{18 - 3x - x^2} + \sqrt{2x^2 + 9x - 26} + \sqrt{45 - 20x}$.

Відповідь: $D(y) = [2; 9/4]$.

1.86. $y = \sqrt{14 - 5x - x^2} + \sqrt{x^2 + 6x - 7} - \sqrt{45 - 30x}$.

Відповідь: $D(y) = \{-7\} \cup [1; 3/2]$.

§ 2. Алгебраїчні рівняння і нерівності

2.1. Раціональні рівняння і нерівності

Група А

Розв'язати рівняння (завдання **2.1** – **2.6**):

2.1. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$. Відповідь: $x \in \{-2; 1\}$.

2.2. $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0$. Відповідь: $x = -3$.

2.3. $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$. Відповідь: $x = 3$.

2.3.* [1, § 9, приклад 6, с. 41]

$$\frac{x+3}{2x-4} - \frac{3x+4}{x^2-4} - 1 = 0. \text{ Відповідь: } x = -3.$$

$$\mathbf{2.4.} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}. \text{ Відповідь: } x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{2.5.} \frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1. \text{ Відповідь: } x \in \{0; 1\}.$$

$$\mathbf{2.6.} \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{-5; 1; -1 \pm \sqrt{6}\}.$$

•

Розв'язати нерівності (завдання **2.7** – **2.85**):

$$\mathbf{2.7.} x+5 - \frac{x}{x+4} < \frac{5}{x+4}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -5) \cup (-4, -3).$$

$$\mathbf{2.8.} \frac{1}{x} < \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}. \text{ Відповідь: } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.9.} \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \leq \frac{4}{3}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2] \cup (0, 6].$$

$$\mathbf{2.10.} 4x+5 < \frac{5x^2+4}{x}. \text{ Відповідь: } x \in (0; 1) \cup (4, \infty).$$

$$\mathbf{2.11.} \frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty).$$

$$\mathbf{2.12.} \frac{x-1}{2} - \frac{1}{x+1} > 3. \text{ Відповідь: } x \in \left(\frac{1-\sqrt{73}}{6}, -1\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{73}}{6}\right).$$

$$\mathbf{2.13.} \frac{3x+1}{3} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}. \text{ Відповідь: } x \in [-3, -1) \cup (-1/3; 0] \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.14.} \frac{x+1}{x+1} + \frac{x+2}{x+2} < \frac{1}{x-1}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2) \cup (-5/4; -1) \cup (1; 5).$$

$$\mathbf{2.15.} \frac{1}{2-x} + \frac{x}{2+x} \geq 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

$$\mathbf{2.16.} \frac{1+x}{x-1} + \frac{1-x}{x+1} < 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.17.} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 2. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (0; 1/2) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.18.} \frac{2x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x+2}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 3).$$

$$\mathbf{2.19.} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}. \text{ Відповідь: } x \in [-\sqrt{2}, 0) \cup (1, \sqrt{2}] \cup (2; \infty).$$

$$\mathbf{2.20.} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \geq 1. \text{ Відповідь: } x \in [1-2\sqrt{2}, -1) \cup (3; 1+2\sqrt{2}].$$

$$\mathbf{2.21.} \frac{x^2-5x+9}{x^2-6x+5} < 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -4) \cup (1, 5).$$

$$\mathbf{2.22.} \frac{2x^2+3x-4}{x^2+x-6} \geq 2. \text{ Відповідь: } x \in [-8, -3) \cup (2, \infty).$$

- 2.23.** $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-2, -1) \cup \{3\}$.
-
- 2.24.** $x - 1 > \frac{4x}{3 - x}$. Відповідь: $x \in (3, \infty)$.
- 2.25.** $2 - x < \frac{x + 4}{x + 1}$. Відповідь: $x \in (-1, \infty)$.
- 2.26.** $3x + \frac{3x^2}{1,5 - x} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0] \cup (1, 5; \infty)$.
- 2.27.** $4x + \frac{4x^2}{3 - x} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$.
- 2.28.** $\frac{6x}{3 - x} \leq 2x$. Відповідь: $x \in \{0\} \cup (3, \infty)$.
- 2.29.** $\frac{8x}{2 - x} \leq 4x$. Відповідь: $x \in \{0\} \cup (2, \infty)$.
- 2.30.** $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x}$. Відповідь: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.
-
- 2.31.** $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \leq 2$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$.
- 2.32.** $\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 1} \leq 2$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup (-1, \infty)$.
- 2.32.*** [1, § 9, приклад 4, с. 40]
 $\frac{9}{x + 1} - \frac{4}{x - 4} - 5 \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty)$.
- 2.33.** $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 1} \geq -2$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$.
- 2.34.** $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 4} \geq -1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -4) \cup \{-2\} \cup (0, \infty)$.
- 2.35.** $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} \leq 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \cup \{1\}$.
- 2.36.** $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 5} \geq 4$. Відповідь: $x \in (1; 5) \cup \{6\}$.
- 2.37.** $\frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x + 1} \geq 4$. Відповідь: $x \in \{-6\} \cup (-5; -1)$.
- 2.38.** $\frac{1}{x} - \frac{25}{x - 4} \geq 4$. Відповідь: $x \in \{-1\} \cup (0; 4)$.
- 2.39.** $\frac{1}{x + 3} - \frac{25}{x - 1} \geq 4$. Відповідь: $x \in \{-4\} \cup (-3; 1)$.
- 2.40.** $\frac{1}{x - 3} + 5 \geq \frac{16}{x + 2}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$.
- 2.41.** $\frac{16}{x - 2} + 5 \geq \frac{1}{x + 3}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup (2, \infty)$.

-
- 2.42. $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \leq -1$. Відповідь: $x = 1$.
- 2.43. $1 + \frac{x-1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$. Відповідь: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.
- 2.44. $\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2} \geq \frac{1}{4}$. Відповідь: $x \in [-2\sqrt{2}, 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$.
- 2.45. $2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3x-1}{x^2}$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
-
- 2.46. $\frac{2}{3x-3} + \frac{4}{3x+3} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup [1/3; 1)$.
- 2.47. $\frac{4x+8}{4x+8} + \frac{4x-8}{4x-8} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-2; 0] \cup (2, \infty)$.
- 2.48. $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+2x} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (0; 2/3] \cup (2, \infty)$.
- 2.49. $\frac{x}{x^2-4} \leq \frac{1}{2x+4}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 2)$.
- 2.50. $\frac{4}{x^2-9} \geq \frac{2}{x^2+3x}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; 0) \cup (3, \infty)$.
- 2.51. $\frac{2}{x^2-4} \geq \frac{1}{x^2+2x}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 0) \cup (2, \infty)$.
- 2.52. $\frac{2}{x^2-2x} \leq \frac{x+2}{x^2-4}$. Відповідь: $x \in (0; 2) \cup (2, \infty)$.
- 2.53. $\frac{4}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+3x} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (0; 1] \cup (3, \infty)$.
- 2.54. $\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{1}{4+2x} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup [-2/3; 0)$.
- 2.55. $\frac{3}{x-3} - \frac{1}{x} \geq \frac{x+15}{x^2-9}$. Відповідь: $x \in (-3; 0) \cup (3, \infty)$.
- 2.56. $\frac{3}{x-5} + \frac{x-35}{x^2-25} \leq \frac{2}{x}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -5) \cup (0; 5)$.
- 2.57. $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x} \geq \frac{x+8}{x^2-16}$. Відповідь: $x \in (-4; 0) \cup (4, \infty)$.
- 2.58. $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^3-1}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$.
-
- 2.59. $\frac{2x}{x-5} + \frac{2x^2}{25-x^2} \leq \frac{5}{x+5}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 5)$.
- 2.60. $\frac{11}{5x-15} + \frac{2x+6}{9-x^2} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; 3)$.
- 2.61. $\frac{x-3}{2} + \frac{1}{x+3} + \frac{2x}{9-x^2} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$.
- 2.62. $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1} \leq \frac{3-2x}{1-4x^2}$. Відповідь: $x \in (-1/2; 1/2) \cup (1/2; \infty)$.
- 2.63. $\frac{1}{2x-4} + \frac{2}{4-x^2} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-2; 2) \cup (2, \infty)$.

2.64. $\frac{1}{x} + \frac{x}{16 - x^2} \geq \frac{4}{x^2 + 4x}$. Відповідь: $x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$.

2.65. $\frac{x}{3x-1} + \frac{3x^2}{1-9x^2} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1] \cup (-1/3; 1/3)$.

2.66. $\frac{5x-1}{5x} \geq \frac{1-25x^2}{1-25x^2}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1/5) \cup (1/5; \infty)$.

2.67. $\frac{10+2x}{25-x^2} + \frac{4}{x} \leq \frac{2}{x-5}$. Відповідь: $x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 0) \cup (5, \infty)$.

• **2.68.** $x^2 \left(\frac{x^2+1}{x} - 2 \right) \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$.

2.69. $\left(\frac{2x}{2x-1} + 1 \right) \frac{6x-3}{4x^2-x} \geq 0$.

Відповідь: $x \in (0; 1/4) \cup (1/4; 1/2) \cup (1/2; \infty)$.

2.70. $\frac{x-3}{x+3} \left(x + \frac{x^2}{3-x} \right) \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [0; 3) \cup (3, \infty)$.

2.71. $\left(\frac{x-4}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} \right) \frac{x^2-16}{16} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -4) \cup (-4; 0]$.

2.72. $\left(x+1 - \frac{4x}{x+1} \right) \left(x-1 + \frac{4x}{x-1} \right) \geq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

2.73. $\left(2 + \frac{x}{x+1} \right) \frac{3x^2+3x}{12x+8} \leq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -2/3) \cup (-2/3; 0]$.

2.74. $\frac{4+x}{4-x} \left(\frac{2x^2}{4+x} - x \right) \leq 0$. Відповідь: $x \in [0; 4) \cup (4, \infty)$.

2.75. $\left(\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{x-1}{x} \geq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \infty \right)$.

2.76. $\left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \right) \frac{1-x^2}{x} \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (0; 1) \cup (1, \infty)$.

2.77. $\left(\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{3-x} \right) \frac{9-x^2}{x} \geq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; -1] \cup (0; 3) \cup (3, \infty)$.

2.78. $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x^2+1}{1-x^2} - \frac{x}{x+1} \right) \frac{1}{x+1} \leq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 1)$.

• **2.79.** $\left(\frac{2x}{9} - \frac{1}{2x} \right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} \right) \leq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, 3/2) \cup (-3/2; 0) \cup (0; 3/2]$.

$$2.80. \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \frac{x}{x^2-1} \geq 0.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1, \infty)$.

$$2.81. \left(x - \frac{5x}{x+2} \right) : \frac{x-3}{x+2} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in [0; 3) \cup (3, \infty).$$

$$2.82. \left(x + 1 - \frac{1-2x^2}{1-x} \right) : \left(1 - \frac{1}{1-x} \right) \leq 0. \text{ Відповідь: } x \in (0; 1) \cup (1, \infty).$$

$$2.83. \left(\frac{x}{x-5} - 2x \right) : \frac{11-2x}{x-5} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in [0; 5) \cup (5; 5,5) \cup (5,5; \infty).$$

$$2.84. \left(\frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1} \right) : \frac{5}{x+1} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 0).$$

$$2.85. \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) : \frac{2x}{x^3+8} \leq 0.$$

Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2)$.

•

Розв'язати системи нерівностей (завдання **2.86** – **2.89**):

$$2.86. \begin{cases} x - 3 + \frac{4}{x+1} > 0, \\ x + 3 + \frac{4}{x-1} < 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-1; 1).$$

$$2.87. \begin{cases} x^2 - 8x + 7 > 0, \\ 3x^2 - 22x + 7 \geq 0, \\ \frac{x^2 + 5x}{2x^2 + 3x - 35} \geq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 0] \cup (7, \infty).$$

$$2.88. \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 5x - 2 \geq 0, \\ \frac{x^2 + 5x - 14}{2x^2 - 7x + 6} \geq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -7] \cup (2, \infty).$$

$$2.89. \begin{cases} 6x + 16 - x^2 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 > 0, \\ \frac{x^2 - 8x + 12}{2x^2 - x - 6} \leq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-3/2; -1/2) \cup (-1/2; 2) \cup (2; 6].$$

Група Б

Розв'язати рівняння и нерівності (завдання **2.90** – **2.114**):

$$2.90. x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0. \text{ Відповідь: } x = -1.$$

$$2.91. x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{1; 3; 5\}.$$

$$2.91.* [1, \S 9, \text{приклад 1, с. 38}]$$

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{2; -3; 1/2\}.$$

$$2.92. x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{-3; 2\}.$$

$$2.93. x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = 0. \text{ Відповідь: } x = \pm 2.$$