

Всякая хорошо решенная математическая задача доставляет умственное наслаждение, ... а всякое сосредоточенное размышление успокаивает сердце и делает его созвучным вселенной.

ГЕРМАН ГЕССЕ, "Игра в бисер"

Розділ І. Задачі та вправи

В розділі І зірочкою відмічено усі типові та базові завдання (наприклад, 1.1*), розв'язки яких наведено в посібнику [1]. Посилання на відповідне місце в тексті посібника [1] наводиться відразу після номера завдання. Блоки однотипних вправ розділено додатковим вертикальним відступом та відмічено чорним кружечком.

§ 1. Основні методи розв'язання рівнянь та нерівностей

Група А

Розв'язати нерівності графічним методом (завдання 1.1 – 1.42):

1.1. $x^2 - 2x - 3 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

1.1.* [1, § 6, приклад 3, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

1.2. $x^2 - 2x - 3 < 0$. Відповідь: $x \in (-1; 3)$.

1.2.* [1, § 6, приклад 4, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 < 0$. Відповідь: $x \in (1; 3)$.

1.3. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

1.3.* [1, § 6, приклад 5, с. 25]

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

1.4. $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-1; 3]$.

1.5. $x^2 + 4x + 4 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$.

1.5.* [1, § 6, приклад 9, с. 26]

$x^2 - 2x + 1 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

1.6. $x^2 + 4x + 4 < 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

1.7. $x^2 + 4x + 4 \geq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

1.7.* [1, § 6, приклад 7, с. 26]

$x^2 - 2x + 3 \geq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.

1.8. $x^2 + 4x + 4 \leq 0$. Відповідь: $x = -2$.

1.8.* [1, § 6, приклад 8, с. 26]

$x^2 - 2x + 3 \leq 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

- 1.9. $4 - x^2 > 0$. Відповідь: $x \in (-2; 2)$.
- 1.10. $4 - x^2 < 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
- 1.11. $4 - x^2 \geq 0$. Відповідь: $x \in [-2; 2]$.
- 1.11.* [1, § 6, приклад 6, с. 26]
 $64 - x^2 \geq 0$. Відповідь: $x \in [-8; 8]$.
- 1.12. $4 - x^2 \leq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.
- 1.13. $2x - x^2 - 8 > 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.14. $2x - x^2 - 8 < 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.15. $2x - x^2 - 1 > 0$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.16. $2x - x^2 - 1 < 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
- 1.17. $2x - x^2 - 1 \geq 0$. Відповідь: $x = 1$.
- 1.18. $2x - x^2 - 1 \leq 0$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.19. $x^8 > 7$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[8]{7}) \cup (\sqrt[8]{7}, \infty)$.
- 1.19.* [1, § 6, приклад 10, с. 27]
 $x^6 > 5$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}) \cup (\sqrt[6]{5}, \infty)$.
- 1.20. $x^8 < 7$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[8]{7}, \sqrt[8]{7})$.
- 1.21. $x^6 \geq 5$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{5}] \cup [\sqrt[6]{5}, \infty)$.
- 1.22. $x^6 \leq 3$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{3}]$.
- 1.22.* [1, § 6, приклад 11, с. 28]
 $x^6 \leq 5$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[6]{5}, \sqrt[6]{5}]$.
- 1.23. $x^3 < 8$. Відповідь: $x \in (-\infty, 2)$.
- 1.24. $x^3 \leq -8$. Відповідь: $x \in (-\infty, -2]$.
- 1.25. $x^5 \geq -3$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[5]{3}, \infty)$.
- 1.25.* [1, § 6, приклад 12, с. 28]
 $x^5 > -7$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[5]{7}, \infty)$.
- 1.26. $x^4 \geq -2$. Відповідь: $x \in \mathbf{R}$.
- 1.27. $x^6 \leq -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.
- 1.28. $\frac{1}{x} \geq 4$. Відповідь: $x \in (0; 1/4]$.
- 1.29. $\frac{1}{x} < 3$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (1/3, \infty)$.
- 1.29.* [1, § 6, приклад 13, с. 28]
 $\frac{1}{x} \leq 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.
- 1.30. $\frac{1}{x^3} < -1$. Відповідь: $x \in (-1, 0)$.
- 1.31. $\frac{1}{x^3} \geq -1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$.
- 1.32. $\frac{1}{x^2} \geq 1$. Відповідь: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$.
- 1.33. $\frac{1}{x^2} < 1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

1.34. $\frac{1}{x^2} > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

1.35. $\frac{1}{x^2} < -1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

1.36. $\log_2 x > 1$. Відповідь: $x \in (2, \infty)$.

1.37. $\log_2 x \leq 1$. Відповідь: $x \in (0; 2]$.

1.38. $\log_{1/2} x \geq 0$. Відповідь: $x \in (0; 1]$.

1.39. $3^x > 1 - x$. Відповідь: $x \in (0, \infty)$.

1.40. $2^x \leq 4 - 2x$. Відповідь: $x \in (-\infty; 1]$.

1.41. $\log_3 x \leq 7 - 2x$. Відповідь: $x \in (0; 3]$.

1.42. $\log_{1/3} x < 4x - 4$. Відповідь: $x \in (1, \infty)$.

•

1.42.* Розв'язати подвійні нерівності та сукупності графічним методом:

а) [1, § 6, приклад 15, с. 30]

$5 < x^2 - 4x < 21$. Відповідь: $x \in (-3; -1) \cup (5; 7)$.

б) [1, § 6, приклад 16, с. 30]

$5 < x^2 - 4x \leq 21$. Відповідь: $x \in [-3; -1) \cup (5; 7]$.

в) [1, § 6, приклад 17, с. 31]

$\begin{cases} x^2 - 4x > 21, \\ x^2 - 4x \leq 5. \end{cases}$ Відповідь: $x \in (-\infty, -3) \cup [-1; 5] \cup (7, \infty)$.

•

Розв'язати нерівності методом заміни змінних (завдання **1.43** – **1.50**):

1.43. $x^{12} - 13x^6 + 30 > 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[6]{10}) \cup (-\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{3}) \cup (\sqrt[6]{10}, \infty)$.

1.43.* [1, § 7, приклад 2, с. 33]

$x^{18} - 2x^9 - 3 < 0$. Відповідь: $x \in (-1; \sqrt[9]{3})$.

1.44. $x^8 - 18x^4 + 32 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-2, -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}, 2]$.

1.45. $x^8 - 12x^4 + 20 \geq 0$.

Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{10}) \cup [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{10}, \infty)$.

1.45.* [1, § 7, приклад 3, с. 33]

$x^4 - 11x^2 + 10 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup [-1; 1] \cup [\sqrt{10}, \infty)$.

1.46. $x^{14} - 2x^7 - 35 < 0$. Відповідь: $x \in (-\sqrt[7]{5}, \sqrt[7]{7})$.

1.47. $x^6 - 9x^3 - 22 > 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{11}, \infty)$.

1.48. $x^{10} - 7x^5 - 18 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -\sqrt[5]{2}) \cup [\sqrt[5]{9}, \infty)$.

1.49. $x^8 - 3x^4 - 10 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}]$.

1.50. $x^{16} + 3x^8 - 4 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

•

Розв'язати нерівності методом інтервалів (завдання **1.51** – **1.56**):

1.51. $(x - 1)^4(x + 3)(x - 5)^3 < 0$. Відповідь: $x \in (-3; 1) \cup (1; 5)$.

1.52. $(x - 1)^4(x + 3)(x - 5)^3 \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3] \cup \{1\} \cup [5, \infty)$.

1.53. $\frac{(x-1)^4(x+3)}{(x-5)^3} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -3] \cup \{1\} \cup (5, \infty)$.

1.53.* [1, § 8, приклад на с. 35]

$\frac{x^2 - 4x + 4}{(x+1)(x-4)} \geq 0$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty)$.

1.54. $(x^2 - 2x - 3)(x - 3)(x + 3)^5 \leq 0$. Відповідь: $x \in [-3, -1] \cup \{3\}$.

1.55. $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 2x + 3) < 0$. Відповідь: $x \in (-2; 3)$.

1.56. $(x - 1)(x - 5)(x - x^2 - 1) > 0$. Відповідь: $x \in (1; 5)$.

•

Знайти переріз $A \cap B \cap C$ множин A, B і C (завдання **1.57** – **1.66**):

1.57. $A = (-8; 4), B = [-6; 5), C = [-3, \infty)$. Відповідь: $[-3; 4)$.

1.58. $A = (-6; 5], B = (-\infty, -2] \cup [3; \infty), C = (-\infty; 9/2)$.

Відповідь: $(-6; -2] \cup [3; 9/2)$.

1.59. $A = [-7; 4], B = (-\infty, -3) \cup [4; 12], C = (-\infty; 11/2)$.

Відповідь: $[-7; -3) \cup \{4\}$.

1.60. $A = (-9; 4], B = (-\infty, -5] \cup (4; 12], C = (-\infty; 11/2]$.

Відповідь: $(-9; -5]$.

1.61. $A = [-4; 2] \cup (7; 12), B = (-\infty, 1] \cup [12; 15], C = (-2; \infty)$.

Відповідь: $(-2; 1]$.

1.62. $A = (-3; 1] \cup (6; 13), B = (-\infty, 5), C = (-\infty; -8] \cup [-3; \infty)$.

Відповідь: $(-3; 1]$.

1.63. $A = [-2; 10], B = (-2; 12), C = (-\infty; 8] \cup [10; \infty)$.

Відповідь: $(-2; 8] \cup \{10\}$.

1.64. $A = (-6; 1], B = (-\infty; 1) \cup (3; \infty), C = [-7; \infty)$. Відповідь: $(-6; 1)$.

1.65. $A = [-6; 2), B = (-10; -4], C = (-\infty; -10] \cup (-4; \infty)$. Відповідь: \emptyset .

1.66. $A = [-6; 2), B = (-10; -4], C = (-\infty; -6] \cup [-4; \infty)$.

Відповідь: $\{-4; -6\}$.

•

Знайти об'єднання множин (завдання **1.67** – **1.74**):

1.67. $A = (-\infty; -3], B = (-5; -1], C = [-1; 2)$. Відповідь: $(-\infty; 2)$.

1.68. $A = [-8; -2), B = [2; 5), C = \{5\} \cup (6; 8)$.

Відповідь: $[-8; -2) \cup [2; 5) \cup (6; 8)$.

1.69. $A = [-7; -4), B = [-4; 2), C = (0; 3], D = (5; \infty)$.

Відповідь: $[-7; 3] \cup (5; \infty)$.

1.70. $A = (-5; 3), B = (-\infty; 4], C = (5; 8] \cup [12; 15), D = (15; 17]$.

Відповідь: $(-\infty; 4] \cup (5; 8] \cup [12; 15) \cup (15; 17]$.

1.71. $A = \{3\} \cup [5; 8], B = (-6; 4), C = \{-6\} \cup [8; 9)$. Відповідь: $[-6; 4) \cup [5; 9)$.

1.72. $A = (-\infty; -3), B = [-3; 2], C = (2; \infty)$. Відповідь: $(-\infty, \infty)$.

1.73. $A = (-\infty; -3), B = (-3; 2), C = (2; \infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \infty)$.

1.74. $A = (-\infty; -3], B = (-3; 2), C = (2; \infty)$. Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.