

в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Відповідь: $4/3$.

6.370. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 + 10$ і дотичними до неї, що проведені з точки $(0; 1)$.

Відповідь: 18.

6.371. Фігура обмежена графіком функції $y = 0,5x^2$, прямою $y = 4$ та віссю Oy . Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 4)$ і ділить вказану фігуру на дві рівновеликі частини.

Відповідь: $3x - 2y + 2 = 0$.

6.372. Фігура обмежена графіком функції $y = \sin x$ при $x \in [0; \pi/2]$, прямою $x = \pi/2$ та віссю Ox . Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і ділить вказану фігуру на дві рівновеликі частини.

Відповідь: $\pi^2 y - 4x = 0$.

6.373. При якому від'ємному значенні p площа фігури, що утворена параболою $y = (1 + p^2)x^2 + p$ і прямою $y = 0$, максимальна?

Відповідь: $p = -1$.

6.374. Знайти найменше значення площі фігури, що обмежена параболою $y = x^2 + 2x - 3$ і прямою $y = kx + 1$.

Відповідь: $32/3$.

§ 7. Конкурсні завдання підвищеної складності

7.1. Рівняння і нерівності з параметром

Група А

Розв'язати рівняння, нерівності, системи і сукупності з параметром a (завдання **7.1** – **7.58**):

7.1. $2x + ax = 6$.

Відповідь: 1) при $a = -2$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \neq -2$ $x = \frac{6}{a+2}$.

7.2. $3x + ax = 0$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a \neq -3$ $x = 0$.

7.2.* [1, § 45, приклад 3, с. 261] $2ax + 3a - 1 = ax + 2a + 3 - 3x$.

Відповідь: 1) при $a = -3$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \neq -3$ $x = \frac{4-a}{a+3}$.

7.3. $\frac{x}{|a|} + 2 = 3x$. Відповідь: 1) $a \in \left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\}$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ $x = \frac{2|a|}{3|a|-1}$.

7.4. $a^2x - 2 = a + 4x$.

Відповідь: 1) при $a \neq \pm 2$ $x = \frac{1}{a-2}$; 2) при $a = -2$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a = 2$ $x \in \emptyset$.

7.4.* [1, § 45, приклад 5, с. 261]

$x + a(4 - ax) = 4$. Відповідь: 1) при $a = 1$ $x \in \mathbf{R}$; 2) при $a = -1$ $x \in \emptyset$;

3) при $a \neq \pm 1$ $x = \frac{4}{a+1}$.

7.5. $\frac{x-4}{x+1} + \frac{2}{a} = \frac{1}{a(x+1)}$.

Відповідь: 1) при $a \in \left\{-2, -\frac{1}{5}, 0\right\}$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (0, \infty)$ $x = \frac{4a-1}{a+2}$.

7.6. $ax + 2x \leq 6$.

Відповідь: 1) при $a < -2$ $x \in \left[\frac{6}{a+2}, \infty\right)$; 2) при $a = -2$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a > -2$ $x \in \left(-\infty, \frac{6}{a+2}\right]$.

7.6.* [1, § 45, приклад 4, с. 261]

$2ax + 3a - 1 < ax + 2a + 3 - 3x$. Відповідь: 1) при $a > -3$ $x \in \left(-\infty, \frac{4-a}{a+3}\right)$;

2) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a < -3$ $x \in \left(\frac{4-a}{a+3}, \infty\right)$.

7.7. $ax + 2x \geq 6$.

Відповідь: 1) при $a < -2$ $x \in \left(-\infty, \frac{6}{a+2}\right]$; 2) при $a = -2$ $x \in \emptyset$;

3) при $a > -2$ $x \in \left[\frac{6}{a+2}, \infty\right)$.

7.8. $3x + ax \leq 0$.

Відповідь: 1) при $a < -3$ $x \in [0, \infty)$; 2) при $a = -3$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a > -3$ $x \in (-\infty, 0]$.

7.9. $3x + ax < 0$.

Відповідь: 1) при $a < -3$ $x \in (0, \infty)$; 2) при $a = -3$ $x \in \emptyset$;

3) при $a > -3$ $x \in (-\infty, 0)$.

7.10. $\left(3 - \frac{1}{|a|}\right)x < 2$.

Відповідь: 1) при $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ $x \in \left(-\infty, \frac{2|a|}{3|a|-1}\right)$;

2) при $a \in \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ $x \in \mathbf{R}$;

3) при $a \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$ $x \in \left(\frac{2|a|}{3|a|-1}, \infty\right)$;

4) при $a = 0$ $x \in \emptyset$.

7.11. $(a^2 - 4)x \leq a + 2$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a-2}\right]$;

2) при $a \in \{-2; 2\}$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left[\frac{1}{a-2}, \infty\right)$.

7.12. $(a^2 - 4)x < a + 2$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a-2}\right)$;

2) при $a = -2$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left(\frac{1}{a-2}, \infty\right)$;

4) при $a = 2$ $x \in \mathbf{R}$.

7.13. $(a^2 - 4)x \geq a + 2$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ $x \in \left[\frac{1}{a-2}, \infty\right)$;

2) при $a = -2$ $x \in \mathbf{R}$; 3) при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a-2}\right]$;

4) при $a = 2$ $x \in \emptyset$.

7.14. $(a^2 - 4)x > a + 2$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ $x \in \left(\frac{1}{a-2}, \infty\right)$;

2) при $a \in \{-2; 2\}$ $x \in \emptyset$; 3) при $a \in (-2; 2)$ $x \in \left(-\infty, \frac{1}{a-2}\right)$.

7.15. $\frac{2x-1}{a+1} - \frac{x+1}{2(a-1)} > \frac{2x-3}{a-1}$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -9) \cup (-1; 1)$ $x \in \left(\frac{7+3a}{a+9}, \infty\right)$;

2) при $a \in \{-9; -1; 1\}$ $x \in \emptyset$;

3) при $a \in (-9; -1) \cup (1; \infty)$ $x \in \left(-\infty, \frac{7+3a}{a+9}\right)$.

•

7.16. $x^2 - 2x + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 1$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$;

2) при $a = 1$ $x = 1$; 3) при $a > 1$ $x \in \emptyset$.

7.17. $x^2 - 2x + a^4 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -1) \cup (1, \infty)$ $x \in \emptyset$;

2) при $a \in \{-1; 1\}$ $x = 1$; 3) при $a \in (-1; 1)$ $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a^4}$.

7.18. $ax^2 - 4x - 2 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -2)$ $x \in \emptyset$; 2) при $a = -2$ $x = -1$;

3) при $a \in (-2; 0) \cup (0, \infty)$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2(2+a)}}{a}$; 4) при $a = 0$ $x = -1/2$.

7.19. $(2-a)x^2 - x - 2 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, 2) \cup \left(2, \frac{17}{8}\right)$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17-8a}}{2(2-a)}$;

2) при $a = 2$ $x = -2$; 3) при $a = 17/8$ $x = -4$; 4) при $a \in (17/8; \infty)$ $x \in \emptyset$.

7.19.* [1, § 45, приклад 6, с. 262] $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+1 = 0$.

Відповідь: 1) при $a < -\frac{5}{4}$ $x \in \emptyset$; 2) при $a = -\frac{5}{4}$ $x = -\frac{1}{3}$; 3) при $a \in \left(-\frac{5}{4}, 1\right) \cup (1, \infty)$ $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{4a+5}}{a-1}$; 4) при $a = 1$ $x = \frac{1}{3}$.

7.20. $(a+1)x^2 - ax - 2 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty; -4 - 2\sqrt{2}) \cup [-4 + 2\sqrt{2}, -1) \cup (-1, \infty)$

$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a + 8}}{2(a+1)}$; 2) при $a \in (-4 - 2\sqrt{2}, -4 + 2\sqrt{2})$ $x \in \emptyset$;

3) при $a = -1$ $x = 2$.

7.21. $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a \neq -1$ $x \in \{a, 2a+1\}$; 2) при $a = -1$ $x = -1$.

•
7.22. $x^2 + |x| + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1-4a})$; 2) при $a = 0$ $x = 0$;

3) при $a > 0$ $x \in \emptyset$.

7.22.* [1, § 45, приклад 9, с. 267] $\begin{cases} \sin x = a, \\ \sin x = a + 1. \end{cases}$

Відповідь: 1) при $a \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in (0; 1]$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z}$; 3) при $a \in [-1; 0]$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbf{Z}$; $x = (-1)^n \arcsin(a+1) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$; 4) при $a \in [-2, -1)$ $x = (-1)^n \arcsin(a+1) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

7.23. $x^4 - 4x^2 + 4a = a^2$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{4-a}$; 2) при $a \in [0; 4]$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4-a}, x_{3,4} = \pm\sqrt{a}$; 3) при $a > 4$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$.

7.24. $x^4 + 2x^2 + a = 0$.

Відповідь: 1) при $a > 0$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \leq 0$ $x = \pm\sqrt{-1 + \sqrt{1-a}}$.

7.24.* [1, § 45, приклад 16, с. 274]

$x^4 - 2x^2 - a = 0$. Відповідь: 1) при $a < -1$ $x \in \emptyset$; 2) при $a \in [-1; 0]$

$x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{a+1}}$; 3) при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{a+1}}$.

7.25. $x^4 - 2ax^2 + a + 2 = 0$.

Відповідь: 1) при $a \leq -2$ $x = \pm\sqrt{a + \sqrt{a^2 - a - 2}}$; 2) при $a \in (-2; 2)$

$x \in \emptyset$; 3) при $a \geq 2$ $x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - a - 2}}$.

7.26. $x^4 - 2ax^2 + a - 1 = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 1$ $x = \pm\sqrt{a + \sqrt{a^2 - a + 1}}$;

2) при $a \geq 1$ $x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - a + 1}}$.

7.27. $x^4 - 2x^2 - a^2 + 2a = 0$.

Відповідь: 1) при $a < 0$ $x = \pm\sqrt{2-a}$; 2) при $a \in [0; 2]$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{2-a}$,

$x_{3,4} = \pm\sqrt{a}$;

3) при $a > 2$ $x = \pm\sqrt{a}$.