

залишити без змін, то одержимо геометричну прогресію. Знайти задані числа.

Відповідь: 4; 8; 12; 16.

**4.108.** Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три – геометричну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 40, а сума середніх – дорівнює 20.

Відповідь:  $-5; 5; 15; 45$ .

**4.108.\*** [1, § 30, приклад 5, с. 150] Дано чотири числа, з яких перші три є послідовними членами геометричної, а останні три – послідовними членами арифметичної прогресії. Сума крайніх чисел дорівнює 32, сума середніх – дорівнює 24. Знайти ці числа.

Відповідь:  $(32; 16; 8; 0)$  чи  $(2; 6; 18; 30)$ .

**4.109.** Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три – геометричну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 22, а сума середніх – дорівнює 20.

Відповідь: 4; 8; 12; 18 або  $35/2; 25/2; 15/2; 9/2$ .

**4.110.** Знайти чотири цілих числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх – дорівнює 12.

Відповідь: 2; 4; 8; 12.

**4.111.** Знайти чотири цілих числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх – дорівнює 18.

Відповідь: 3; 6; 12; 18.

**4.112.** Три відмінних від нуля дійсні числа утворюють арифметичну прогресію, а квадрати цих чисел, узяті в тому ж порядку, утворюють геометричну прогресію. Знайти всі знаменники такої геометричної прогресії.

Відповідь:  $1; 3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}$ .

## § 5. Геометрія

### 5.1. Планіметрія

#### Група А

У прямокутному трикутнику (задачі **5.1** – **5.8**):

**5.1.** довжини катетів рівні 2 і 6. Знайти довжину бісектриси прямого кута.

Відповідь:  $3\sqrt{2}/2$ .

**5.2.** катет і гіпотенуза рівні 3 і 5 см. Обчислити площу частин трикутника, на які він поділяється бісектрисою прямого кута.

Відповідь:  $18/7$  і  $24/7$  см<sup>2</sup>.

**5.3.** з вершини прямого кута проведено медіану і висоту, відстань між основами яких 14 см. Знайти периметр трикутника, якщо зазначена висота дорівнює 48 см.

Відповідь: 240 см.

**5.4.** з вершини прямого кута проведено медіану і висоту, відстань між основами яких 7 см. Знайти радіус вписаного кола, якщо радіус описаного кола дорівнює 25 см.

Відповідь: 10 см.

**5.5.** довжини катетів рівні 12 і 5 см. Знайти відстань між центрами вписаного і описаного кіл.

Відповідь:  $\sqrt{65}/2$  см.

**5.6.** з вершини прямого кута проведена висота, яка поділяє гіпотенузу на відрізки 18 і 32 см. Знайти периметр трикутника.

Відповідь: 120 см.

**5.7.** з вершини прямого кута проведено медіану і висоту. Висота поділяє гіпотенузу на відрізки, відношення яких дорівнює 9:16. Знайти площу трикутника, якщо вказана медіана дорівнює 25 см.

Відповідь: 600 см<sup>2</sup>.

**5.8.** катети рівні 15 і 36 см. Знайти відстань між точками перетину бісектрис і медіан трикутника.

Відповідь:  $\sqrt{37}$  см.

•

У ромбі (задачі **5.9** – **5.11**):

**5.9.** точка дотику вписаного кола ділить його сторону на відрізки 18 і 8 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчислити площу ромба.

Відповідь: 624 см<sup>2</sup>.

**5.10.** діагоналі рівні 30 і 40 см. Обчислити радіус вписаного в ромб кола.

Відповідь: 12 см.

**5.11.** висота дорівнює 12 см, а одна з діагоналей – 15 см. Обчислити площу ромба.

Відповідь: 150 см<sup>2</sup>.

•

В рівнобедреному трикутнику (задачі **5.12** – **5.16**):

**5.12.** бічна сторона дорівнює 40 см, а основа – 48 см. Обчислити різницю між радіусами описаного та вписаного кола.

Відповідь: 13 см.

**5.13.** бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 9 і 8 см, починаючи від вершини трикутника. Обчислити довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

Відповідь:  $3\sqrt{89}/2$  см.

**5.14.** бічна сторона дорівнює 5 см, а основа – 8 см. Знайти діаметр півкола, вписаного в трикутник так, що цей діаметр лежить на основі трикутника.

Відповідь: 4, 8 см.

**5.15.** основа дорівнює 66 см, а бісектриса кута при основі ділить бічну сторону у відношенні 5:6, починаючи від вершини трикутника. Обчислити площі частин трикутника, на які його розділяє вказана бісектриса.

Відповідь: 660 і 792 см<sup>2</sup>.

**5.16.**  $b$  – бічна сторона і  $\beta$  – кут при основі. Знайти відстань від центра вписаного кола до центра описаного кола.

Відповідь:  $\frac{b |\cos \frac{3\beta}{4}|}{8 \sin \frac{\beta}{4} \cos^3 \frac{\beta}{2}}$ .

•

**5.17.** Сторона AC трикутника ABC дорівнює 29 см, а сторона BC ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 24 і 1 см, починаючи від вершини C. Обчислити площу трикутника.

Відповідь: 60 см<sup>2</sup>.

**5.18.** Сторона AB трикутника ABC дорівнює 28 см, а сторона BC ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 12 і 14 см, починаючи від вершини B. Обчислити радіуси вписаного та описаного кіл.

Відповідь: 8 і 16,25 см.

**5.19.** Знайти площу трикутника, якщо задано кут  $\alpha$ , протилежна йому сторона  $a$  та радіус вписаного кола  $r$ .

Відповідь:  $S = r(a + r \operatorname{ctg}(\alpha/2))$ .

**5.20.** Дві медіани трикутника взаємно перпендикулярні і рівні відповідно 9 і 12 см. Знайти сторони і площу трикутника.

Відповідь:  $2\sqrt{73}$ ,  $4\sqrt{13}$  і 10 см; 72 см<sup>2</sup>.

**5.21.** У прямокутній трапеції основи рівні 25 і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчислити площу трапеції.

Відповідь: 684 см<sup>2</sup>.

**5.22.** Основи трапеції рівні 28 і 11 см, а бічні сторони – 25 і 26 см. Обчислити висоту трапеції.

Відповідь: 24 см.

**5.23.** Основи трапеції рівні 90 і 10 см, а діагоналі – 35 і 75 см. Обчислити площу трапеції.

Відповідь: 1050 см<sup>2</sup>.

**5.24.** Знайти площу трапеції, якщо її висота  $h$ , а бічні сторони видно з центра описаного кола під кутом  $60^\circ$ .

Відповідь:  $\sqrt{3}h^2$ .

•

У прямокутному трикутнику (задачі **5.25 – 5.43**):

**5.25.** бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 15 і 20 см. Обчислити периметр трикутника.

Відповідь: 84 см.

**5.26.** бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 4 і 5 см. Обчислити площу трикутника.

Відповідь:  $810/41$  см<sup>2</sup>.

**5.27.** бісектриса гострого кута ділить катет на відрізки 15 і 12 см. Обчислити радіус описаного навколо трикутника кола.

Відповідь: 22,5 см.

**5.28.** бісектриса гострого кута ділить катет на відрізки 10 і 26 см. Обчислити радіус вписаного в трикутник кола.

Відповідь: 6 см.

**5.29.** точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 і 12 см. Знайти площу трикутника.

Відповідь: 60 см<sup>2</sup>.

**5.30.** точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу у відношенні 2:3. Знайти сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на  $\sqrt{8}$  см.

Відповідь: 6, 8 і 10 см.

**5.31.** довжина описаного кола дорівнює  $50\pi$  см. Обчислити площу трикутника, якщо катети відносяться як 4:3.

Відповідь: 600 см<sup>2</sup>.

**5.32.** катети відносяться як 8:15. Обчислити периметр трикутника, якщо площа описаного круга дорівнює  $289\pi$  см<sup>2</sup>.

Відповідь: 80 см.

**5.33.** катет і гіпотенуза відносяться як 8:17. Обчислити площу описаного навколо трикутника круга, якщо довжина вписаного в нього кола дорівнює  $12\pi$  см.

Відповідь:  $289\pi$  см<sup>2</sup>.

**5.34.** катети відносяться як 5:12. Обчислити периметр трикутника, якщо різниця між радіусами описаного та вписаного кола дорівнює 9 см.

Відповідь: 60 см.

**5.35.** катети відносяться як 20:21. Обчислити площу трикутника, якщо різниця між радіусами описаного та вписаного кола дорівнює 17 см.

Відповідь: 840 см<sup>2</sup>.

**5.36.** висота, проведена на гіпотенузу, ділить її у відношенні 9:16. Знайти цю висоту, якщо більший катет трикутника дорівнює 60 см.

Відповідь: 36 см.

**5.37.** висота, проведена на гіпотенузу, ділить її у відношенні 9:16. Знайти радіус вписаного в трикутник кола, якщо периметр трикутника – 180 см.

Відповідь: 15 см.

**5.38.** бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу у відношенні 4:3. Обчислити площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 5 см.

Відповідь:  $150 \text{ см}^2$ .

**5.39.** центр півкола, вписаного в нього так, що його діаметр лежить на гіпотенузі, ділить гіпотенузу на відрізки 30 і 40 см. Знайти довжину дуги півкола, що знаходиться між точками його дотику з катетами.

Відповідь:  $12\pi$  см.

**5.40.**  $P$  – периметр,  $\alpha$  – один з гострих кутів. Знайти площу трикутника і радіуси описаного та вписаного кіл.

$$\text{Відповідь: } S = \frac{P^2 \sin 2\alpha}{4(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)^2}, \quad R = \frac{P}{2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)},$$

$$r = \frac{P(\cos \alpha + \sin \alpha - 1)}{2(\cos \alpha + \sin \alpha + 1)}.$$

**5.41.**  $S$  – площа,  $\alpha$  – один з гострих кутів. Знайти периметр трикутника і радіуси описаного та вписаного кіл.

$$\text{Відповідь: } P = 2\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}(\cos \alpha + \sin \alpha + 1), \quad R = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}},$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}(\cos \alpha + \sin \alpha - 1).$$

**5.42.**  $r$  – радіус вписаного кола,  $\alpha$  – один з гострих кутів. Знайти периметр і площу трикутника, а також радіус описаного кола.

$$\text{Відповідь: } P = \frac{2r(\cos \alpha + \sin \alpha + 1)}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}, \quad S = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha - 1)^2},$$

$$R = \frac{r}{\cos \alpha + \sin \alpha - 1}.$$

**5.43.**  $S$  – площа,  $\alpha$  – один з гострих кутів. Знайти відстань від точки перетину медіан трикутника до гіпотенузи.

Відповідь:  $\sqrt{S \sin 2\alpha}/3$ .

•

У ромбі (задачі **5.44** – **5.48**):

**5.44.** діагоналі відносяться як 3:4, а площа дорівнює  $600 \text{ см}^2$ . Обчислити периметр ромба.

Відповідь: 100 см.

**5.45.** діагоналі відносяться як 3:4, а периметр дорівнює 100 см. Обчислити площу ромба.

Відповідь:  $600 \text{ см}^2$ .

**5.46.** довжина вписаного кола  $72\pi$  см. Обчислити площу ромба, якщо його сторона точкою дотику ділиться у відношенні 4:9.

Відповідь:  $5616 \text{ см}^2$ .

**5.47.** довжина вписаного кола  $48\pi$  см. Обчислити площу ромба, якщо його діагоналі відносяться як 3:4.

Відповідь:  $2400 \text{ см}^2$ .

**5.48.** різниця діагоналей дорівнює 20 см, а периметр дорівнює 200 см. Знайти довжину вписаного в ромб кола.

Відповідь:  $48\pi$  см.

•

В рівнобедреному трикутнику (задачі **5.49** – **5.61**):

**5.49.** бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина описаного кола дорівнює  $50\pi$  см.

Відповідь: 128 см.

**5.50.** довжина описаного кола дорівнює  $50\pi$  см. Обчислити площу трикутника, якщо центр цього кола ділить висоту у відношенні 5:3, починаючи від вершини трикутника.

Відповідь:  $800 \text{ см}^2$ .

**5.51.** довжина описаного кола дорівнює  $20\pi$  см. Обчислити периметр трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.

Відповідь:  $12(\sqrt{10} + 1)$  або  $4(\sqrt{10} + 3)$  см.

**5.52.** бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 2:3, починаючи від вершини трикутника. Знайти довжину вписаного кола, якщо площа трикутника дорівнює  $48 \text{ см}^2$ .

Відповідь:  $6\pi$  см.

**5.53.** бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 8:9, починаючи від вершини основи. Обчислити площу трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює  $48\pi$  см.

Відповідь:  $3000 \text{ см}^2$ .

**5.53.\*** [1, § 31, приклад 7, с. 160] В рівнобедреному трикутнику бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену на основу, у відношенні 5 : 13. Середина основи віддалена від бічної сторони на відстань  $30/13$  см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.

Відповідь:  $R = 169/48$  см.

**5.54.** основа дорівнює 60 см, а висота, проведена до бічної сторони, ділить її у відношенні 7:18, починаючи від вершини трикутника. Обчислити площі частин трикутника, на які розділяє його ця висота.

Відповідь: 336 і  $864 \text{ см}^2$ .

**5.55.** висота, проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина вписаного кола дорівнює  $42\pi$  см.

Відповідь: 256 см.

**5.56.**  $P$  – периметр і  $\beta$  – кут при основі. Знайти площу трикутника, а також радіуси вписаного й описаного кіл.

$$\text{Відповідь: } S = \frac{P^2 \sin 2\beta}{32 \cos^4 \frac{\beta}{2}}, \quad r = \frac{P \cos \beta \sin \frac{\beta}{2}}{4 \cos^3 \frac{\beta}{2}}, \quad R = \frac{P}{8 \sin \beta \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

**5.57.**  $r$  – радіус вписаного кола і  $\beta$  – кут при основі. Знайти периметр і площу трикутника, а також радіус описаного кола.

$$\text{Відповідь: } P = \frac{4r \cos^3 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta \sin \frac{\beta}{2}}, \quad S = \frac{r^2 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}, \quad R = \frac{r}{\sin 2\beta \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

**5.58.** кут при основі  $\beta$ . Висота, проведена до основи, більша радіуса вписаного кола на  $m$ . Знайти радіус описаного кола.

$$\text{Відповідь: } R = \frac{m}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

**5.59.**  $S$  – площа, а протилежний основі кут між медіанами, проведеними до бічних сторін, дорівнює  $\alpha$ . Знайти основу трикутника.

$$\text{Відповідь: } 2\sqrt{3S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}/3.$$

**5.60.** сума двох висот, проведених відповідно до основи і бічної сторони, дорівнює  $m$ , а кут при вершині дорівнює  $\alpha$ . Знайти радіус описаного навколо трикутника кола.

$$\text{Відповідь: } R = \frac{m}{2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha)}.$$

**5.60.\*** [1, § 31, приклад 6, с. 159] В рівнобедреному трикутнику сума медіани і бісектриси, що проведені до бічної сторони, дорівнює  $m$ , а кут при основі трикутника дорівнює  $\beta$ . Знайти радіуси кіл, вписаного в трикутник і описаного навколо нього.

$$\text{Відповідь: } r = \frac{2m(1 + 2 \cos \beta) \cos \beta \operatorname{tg} (\beta/2)}{(1 + 2 \cos \beta) \sqrt{8 \cos^2 \beta + 1} + 8 \cos \beta \cos(\beta/2)};$$

$$R = \frac{m(1 + 2 \cos \beta)}{\sin \beta \left( (1 + 2 \cos \beta) \sqrt{8 \cos^2 \beta + 1} + 8 \cos \beta \cos(\beta/2) \right)}.$$

**5.61.**  $S$  – площа, а кут між висотою, проведеною до бічної сторони, і основою дорівнює  $\alpha$ . Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

$$\text{Відповідь: } r = \sqrt{S \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

•

**5.62.** Різниця двох сторін трикутника, що утворюють кут  $60^\circ$ , дорівнює 25 см. Третя сторона трикутника – 35 см. Знайти площу трикутника.

$$\text{Відповідь: } 150\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

**5.63.** Сторони трикутника відносяться як 6:7:11. Обчислити периметр трикутника, якщо довжина медіани, проведеної до більшої сторони, дорівнює 7 см.

$$\text{Відповідь: } 48 \text{ см.}$$

**5.64.** У трикутнику, периметр якого 84 см, одна із сторін ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 12 і 14 см. Обчислити радіус вписаного кола.

Відповідь: 8 см.

**5.65.** У трикутнику, периметр якого 60 см, одна із сторін ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки 5 і 24 см. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника.

Відповідь: 145/8 см.

**5.66.** Радіус вписаного в трикутник кола дорівнює 2 см, а точка його дотику ділить одну із сторін трикутника на відрізки 4 і 6 см. Обчислити площу трикутника.

Відповідь: 24 см<sup>2</sup>.

•

**5.67.** Точка перетину хорд кола ділить одну з них у відношенні 1:3, а другу – на відрізки 9 і 12 см. Обчислити довжину першої хорди.

Відповідь: 24 см.

**5.68.** Дотична і січна до кола, проведені з однієї точки, відповідно рівні 4 і 8 см. Обчислити відстань від цієї точки до центра кола, якщо центр кола віддалений від січної на 8 см.

Відповідь:  $\sqrt{89}$  см.

**5.69.** В сегмент круга радіуса  $R$  вписано прямокутник, сторони якого відносяться як 1:2. Знайти його сторони, якщо дуга сегмента  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $R\left(\sqrt{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$  або  $\frac{2}{17}R\left(\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-4\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $\frac{4}{17}R\left(\sqrt{16+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-4\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ .

**5.69.\*** [1, § 31, приклад 5, с. 158] В сегмент круга радіуса  $R$  вписано квадрат. Визначити сторону квадрата, якщо дуга сегмента  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ .

Відповідь:  $\frac{2R}{5}\left(\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ .

**5.70.** Задано сегмент круга радіуса  $R$ , дуга сегмента  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ . В сегмент вписано рівносторонній трикутник так, що вісь симетрії сегмента є віссю симетрії трикутника. Знайти його сторони.

Відповідь:  $\frac{4\sqrt{3}}{3}R\sin^2\frac{\alpha}{4}$  або  $\frac{1}{2}R\left(\sqrt{3+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ .

**5.71.** Задано сегмент круга радіуса  $R$ , дуга сегмента  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ . В сегмент вписано рівнобедрений трикутник з кутом  $\beta$  при основі так, що вісь симетрії сегмента є віссю симетрії трикутника. Знайти його сторони.

Відповідь:  $\frac{4R\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\operatorname{tg}\beta}$ ,  $\frac{2R\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\beta}$  чи  $2R\cos^2\beta\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta\right)$ ,  
 $R\cos\beta\left(\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta\right)$ .



**5.72.** Задано сегмент круга радіуса  $R$ , дуга сегмента  $\alpha, \alpha < \pi$ . Вписане в сегмент коло дотикається осі симетрії сегмента. Знайти радіус цього кола.  
Відповідь:  $4R \cos \frac{\alpha}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{8}$ .

**5.73.** Задано сектор круга радіуса  $R$  з центральним кутом  $\alpha, \alpha < \pi/2$ . В сектор вписано квадрат так, що вісь симетрії сектора є його віссю симетрії. Знайти сторону квадрата.

Відповідь:  $\frac{2R}{\sqrt{5 + 4\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}$ .

**5.74.** Задано сектор круга радіуса  $R$  з центральним кутом  $\alpha, \alpha < \pi/2$ . В сектор вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на одній із сторін центрального кута сектора. Знайти сторону квадрата.

Відповідь:  $\frac{R}{\sqrt{2 + 2\text{ctg} \alpha + \text{ctg}^2 \alpha}}$ .

**5.75.** Задано сектор круга радіуса  $R$  з центральним кутом  $\alpha, \alpha < \pi/2$ . В сектор вписано прямокутник так, що вісь симетрії сектора є віссю симетрії прямокутника. Знайти його сторони, якщо вони відносяться як 1:2.

Відповідь:  $\frac{R}{2R} \sqrt{2 + 2\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \frac{2R}{4R} \sqrt{2 + 2\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$  або

$\frac{\sqrt{17 + 8\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{2R}, \frac{\sqrt{17 + 8\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{4R}$ .

**5.76.** Задано сектор круга радіуса  $R$  з центральним кутом  $\alpha, \alpha < \pi/2$ . Знайти радіус вписаного в сектор круга.

Відповідь:  $\frac{R \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$ .

**5.77.** В сегмент круга з дугою  $\alpha, \alpha < \pi$  і висотою  $h$  вписано квадрат. Знайти його сторону.

Відповідь:  $\frac{h}{5 \sin^2 \frac{\alpha}{4}} \left( \sqrt{4 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ .

**5.78.** Два кола з центрами  $O_1, O_2$  і радіусами  $R_1, R_2$ , відповідно, мають зовнішній дотик. Знайти радіус кола з центром  $O_3$ , що ззовні дотикається кожного з перших двох кіл так, що  $\angle O_1 O_3 O_2 = 90^\circ$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2} \left( \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + 4R_1 R_2} - (R_1 + R_2) \right)$ .

**5.79.** Два кола радіуса  $R$  з центрами  $O_1$  і  $O_2$ , перетинаючись, ділять відрізок  $O_1 O_2$  на три рівні частини. Знайти радіус кола, що дотикається зсередини обох даних кіл і відрізка  $O_1 O_2$ .

Відповідь:  $\frac{7}{32} R$ .

•

У прямокутнику (задачі **5.80** – **5.82**):

**5.80.** бісектриса кута ділить діагональ на відрізки 15 і 20 см. Обчислити відрізки, на які ця бісектриса ділить сторону прямокутника.

Відповідь: 21 і 7 см.

**5.81.** перпендикуляр, проведений з вершини на діагональ, дорівнює 12 см. Знайти периметр прямокутника, якщо різниця його сторін дорівнює 5 см. Відповідь: 70 см.

**5.82.** відношення сторін  $m : n$ , а площа описаного круга дорівнює  $Q$ . Знайти площу прямокутника.

Відповідь:  $\frac{4mn}{\pi(m^2 + n^2)}$ .

•

У паралелограмі (задачі **5.83** – **5.84**):

**5.83.** велика діагональ дорівнює  $20\sqrt{7}$ , гострий кут дорівнює  $60^\circ$ , а діагональ ділить тупий кут у відношенні 3:1. Знайти меншу діагональ. Відповідь:  $20\sqrt{3}$  см.

**5.84.** периметр дорівнює 192 см, а перпендикуляр, проведений з вершини гострого кута на діагональ, ділить цю діагональ на відрізки 36 і 12 см. Обчислити діагоналі паралелограма.

Відповідь: 48 і 84 см.

•

В рівнобічній трапеції (задачі **5.85** – **5.93**):

**5.85.** основи і бічна сторона відносяться як 14:8:5, а висота трапеції дорівнює 24 см. Обчислити площу трапеції.

Відповідь:  $1584 \text{ см}^2$ .

**5.86.** різниця основ дорівнює 20 см, а периметр дорівнює 65 см. Обчислити площу трапеції, якщо бічна сторона і висота відносяться як 5:3.

Відповідь:  $150 \text{ см}^2$ .

**5.87.** різниця основ дорівнює 16 см, а діагональ –  $6\sqrt{10}$  см. Обчислити площу трапеції, якщо бічна сторона і висота відносяться як 5:3.

Відповідь:  $108 \text{ см}^2$ .

**5.88.** основи рівні 38 і 22 см. Обчислити площу трапеції, якщо її діагональ відноситься до висоти як 5:4.

Відповідь:  $1200 \text{ см}^2$ .

**5.89.** периметр дорівнює 220 см, тупий кут –  $120^\circ$ , а діагональ ділить середню лінію у відношенні 5:9. Знайти бічну сторону трапеції.

Відповідь: 40 см.

**5.90.** діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см, починаючи від цієї вершини. Обчислити периметр трапеції.

Відповідь: 456 см.

**5.91.** діагональ є бісектрисою гострого кута і ділиться висотою, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 35 і 125 см, починаючи від вершини

гострого кута трапеції. Обчислити периметр трапеції.

Відповідь: 456 см.

**5.92.** площа дорівнює  $S$ , а кут між діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює  $\alpha$ . Знайти висоту трапеції.

Відповідь:  $\sqrt{S \operatorname{tg}(\alpha/2)}$ .

**5.93.** перпендикуляр, проведений із середини більшої основи на бічну сторону ділить її навпіл, тупий кут трапеції дорівнює  $\alpha$ , площа дорівнює  $S$ . Знайти висоту трапеції.

Відповідь:  $-\sqrt{\frac{-2S}{\sin 2\alpha}} \cos \alpha$ .

•

У прямокутній трапеції (задачі **5.94** – **5.96**):

**5.94.** велика діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить іншу діагональ у відношенні 13:18, починаючи від вершини тупого кута. Обчислити площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.

Відповідь: 1674 см<sup>2</sup>.

**5.95.** менша діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить іншу діагональ у відношенні 13:8. Обчислити площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.

Відповідь: 1134 см<sup>2</sup>.

**5.96.** площа дорівнює  $S$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайти висоту трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює більшій основі трапеції.

Відповідь:  $\sqrt{2S \operatorname{ctg} \alpha}$ .

•

**5.97.** Знайти площу трапеції, основи якої  $a, b (a > b)$ , а гострі кути між більшою основою і бічними сторонами  $\alpha$  і  $\beta$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2}(a^2 - b^2) \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ .

•

У прямокутному трикутнику (задачі **5.98** – **5.102**):

**5.98.** периметр дорівнює 112 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Обчислити площу трикутника.

Відповідь: 336 см<sup>2</sup>.

**5.98.\*** [1, § 31, приклад 8, с. 161] У прямокутному трикутнику медіана, проведена на гіпотенузу, дорівнює 5, а радіус вписаного кола дорівнює 2. Знайти катети і гострі кути трикутника.

Відповідь: катети трикутника рівні 6 і 8; гострі кути трикутника –  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arccos} \frac{7}{5\sqrt{2}}$  і  $\beta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arccos} \frac{7}{5\sqrt{2}}$ .

**5.99.** медіани, проведені до катетів, відповідно рівні  $\sqrt{52}$  і  $\sqrt{73}$  см. Знайти периметр трикутника.

Відповідь: 24 см.

**5.100.** радіуси вписаного та описаного кіл відповідно рівні 4 і 13 см. Знайти катети.

Відповідь: 10 і 24 см.

**5.101.** периметр дорівнює 24 см, а його площа – 24 см<sup>2</sup>. Знайти катети.

Відповідь: 6 і 8 см.

**5.102.**  $S$  – площа і  $R$  – радіус описаного кола. Знайти катети.

Відповідь:  $\sqrt{2R^2 - 2\sqrt{R^4 - S^2}}$ ,  $\sqrt{2R^2 + 2\sqrt{R^4 - S^2}}$  при  $R^2 > S$ .

•

**5.103.** Знайти діагоналі ромба, якщо його площа дорівнює 600 см<sup>2</sup>, а довжина вписаного кола – 48π см.

Відповідь: 30 і 40 см.

•

У рівнобедреному трикутнику (задачі **5.104** – **5.110**):

**5.104.** периметр дорівнює 256 см, а медіана, проведена до основи, дорівнює 96 см. Обчислити діаметр вписаного кола.

Відповідь: 42 см.

**5.105.** висота, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, – 24 см. Обчислити периметр трикутника.

Відповідь: 80 см.

**5.106.** медіана, проведена до основи, дорівнює 16 см, а медіана, проведена до бічної сторони, –  $2\sqrt{97}$  см. Обчислити периметр трикутника.

Відповідь: 64 см.

**5.107.**  $b$  – бічна сторона і  $S$  – площа. Знайти сторону основи.

Відповідь:  $a = \sqrt{2b^2 \pm 2\sqrt{b^4 - 4S^2}}$  при  $b^2 > 2S$ .

**5.108.**  $a$  – сторона основи і  $R$  – радіус описаного кола. Знайти площу трикутника.

Відповідь:  $S = \frac{a}{4} (2R \pm \sqrt{4R^2 - a^2})$  при  $a \leq 2R$ .

**5.109.**  $a$  – сторона основи і  $r$  – радіус вписаного кола. Знайти бічну сторону, периметр і площу трикутника.

Відповідь:  $b = \frac{a(a^2 + 4r^2)}{2(a^2 - 4r^2)}$ ,  $P = \frac{2a^3}{a^2 - 4r^2}$ ,  $S = \frac{ra^3}{a^2 - 4r^2}$  при  $a > 2r$ .

**5.110.**  $h$  – висота, проведена на основу і  $r$  – радіус вписаного кола. Знайти сторону трикутника.

Відповідь:  $a = \frac{2hr}{\sqrt{h^2 - 2hr}}$ ,  $b = \frac{h(h - r)}{\sqrt{h^2 - 2hr}}$  при  $h > 2r$ .

•

**5.111.** Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу у відношенні 7:9. У якому відношенні ділить гіпотенузу висота?

Відповідь: 49:81.

**5.112.** У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, ділить її у відношенні  $m : n$ . У якому відношенні ділить гіпотенузу бісектриса прямого кута?

Відповідь:  $\sqrt{m} : \sqrt{n}$ .

**5.113.** Діагоналі ромба відносяться як 3:4. В скільки разів площа ромба більша площі вписаного в нього круга?

Відповідь:  $25/6\pi$ .

**5.114.** У ромб з гострим кутом  $\pi/6$  вписано коло, а в коло – квадрат. Знайти відношення площі ромба до площі квадрата.

Відповідь: 4.

**5.115.** Через вершину кута  $\alpha$  при основі рівнобедреного трикутника проведено пряму, що перетинає протилежну бічну сторону і утворює з основою кут  $\beta$ . У якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

Відповідь:  $(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1)/2$ .

**5.116.** Навколо трикутника, кути якого рівні  $\alpha$  і  $\beta$ , описано коло. Знайти відношення площі круга, обмеженого цим колом, до площі трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)}$ .

**5.117.** Знайти відношення площі квадрата, вписаного в сегмент круга з дугою  $180^\circ$ , до площі квадрата, вписаного в сегмент круга того ж радіуса, але з дугою  $90^\circ$ .

Відповідь: 10.

**5.117.\*** [1, § 31, приклад 9, с. 163] В сегмент круга вписано квадрат. Знайти відношення площі квадрата до площі сегмента, якщо дуга сегмента  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ .

Відповідь:  $\frac{8 \left( \sqrt{4 + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{25(\alpha - \sin \alpha)}$ .

**5.118.** В сектор круга з центральним кутом  $\alpha$ ,  $\alpha < \pi$ , вписано круг. Знайти відношення площі вписаного круга до площі сектора.

Відповідь:  $\frac{2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}$ .

**5.119.** Дано два кола, що перетинаються, однакового радіуса з центрами  $O_1$  і  $O_2$ , при цьому  $O_1O_2$  відноситься до радіуса кіл як 8:5. Знайти відношення довжини кола, що дотикається зсередини обох заданих кіл і відрізка  $O_1O_2$ , до довжини одного із заданих кіл.

Відповідь: 0,18.

**5.120.** Спільна дотична двох кіл, що мають зовнішній дотик, утворює з лінією центрів цих кіл кут  $\alpha$ . Знайти відношення радіусів цих кіл.

Відповідь:  $\operatorname{tg}^2(\alpha/2)$ .

•

В прямокутному трикутнику (задачі **5.121** – **5.123**):

**5.121.**  $S$  – площа і  $R$  – радіус описаного кола. Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{S}{R^2}$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{S}{R^2}$  при  $S < R^2$ .

**5.122.**  $c$  – гіпотенуза і  $r$  – радіус вписаного кола. Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{2r+c}{\sqrt{2}c}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{2r+c}{\sqrt{2}c}$  при  $r \leq c(\sqrt{2}-1)/2$ .

**5.122.\*** [1, § 31, приклад 10, с. 164] Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо відношення площі цього трикутника до площі вписаного круга дорівнює  $6/\pi$ .

Відповідь: гострі кути трикутника –  $\alpha = \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}}$  і  $\beta = \frac{\pi}{4} + \arccos \frac{7}{5\sqrt{2}}$ .

**5.123.** відношення радіуса описаного кола до радіуса вписаного кола дорівнює 2,5. Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \arccos 0,7\sqrt{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \arccos 0,7\sqrt{2}$ .

•

В рівнобедреному трикутнику (задачі **5.124** – **5.132**):

**5.124.** відношення радіуса описаного кола до радіуса вписаного кола дорівнює 4. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\beta = \arccos \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ ,  $\alpha = \pi - 2 \arccos \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$  або

$\beta = \arccos \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ ,  $\alpha = \pi - 2 \arccos \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ .

**5.125.**  $h$  – висота, проведена до основи і  $r$  – радіус вписаного кола. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\beta = \arccos \frac{r}{h-r}$ ,  $\alpha = \pi - 2 \arccos \frac{r}{h-r}$  при  $h > 2r$ .

**5.126.**  $h$  – висота, проведена до основи і  $R$  – радіус описаного кола. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\beta = \arcsin \sqrt{\frac{h}{2R}}$ ,  $\alpha = \pi - 2 \arcsin \sqrt{\frac{h}{2R}}$  при  $h < 2R$ .

**5.127.** точка перетину висот лежить на вписаному в трикутник колі. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\beta = \arccos \frac{2}{3}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2}{3}$ .

**5.128.** тангенс кута при основі трикутника дорівнює  $3/4$ . Знайти тангенс кута між медіаною і бісектрисою, проведеними до бічної сторони.

Відповідь:  $1/13$ .

**5.129.** медіана, проведена до бічної сторони, складає з основою кут, синус якого дорівнює  $3/5$ . Знайти синус кута при вершині трикутника.

Відповідь:  $72/97$ .

**5.130.** точка перетину висот ділить навпіл висоту, проведену до основи. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**5.131.** висота, проведена до основи, в два рази менша бісектриси кута при основі. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\pi/5$ ;  $\pi/5$ ;  $3\pi/5$ .

**5.132.\*** [1, § 33, приклад 11, с. 193] В рівнобедреному трикутнику довжина основи дорівнює 4, а кут між медіаною і висотою, проведеними до бічної сторони, дорівнює  $45^\circ$ . Знайти площу трикутника.

Відповідь:  $S = 4(\sqrt{7} \pm 2)$  кв. од.

**5.132.** тангенс кута між медіаною і висотою, проведеними до бічної сторони, дорівнює  $1/2$ . Знайти синус кута при вершині трикутника.

Відповідь:  $\sin \alpha = 1$  або  $\sin \alpha = 3/5$ .

•

В рівнобічну трапецію вписано коло (задачі **5.133 – 5.140**), при цьому:

**5.133.** основи трапеції  $a$  і  $b$ . Знайти радіус вписаного кола.

Відповідь:  $r = \sqrt{ab}/2$ .

**5.134.** бічна сторона трапеції дорівнює 17 см, а діаметр вписаного кола – 15 см. Знайти основи трапеції.

Відповідь: 9 і 25 см.

**5.135.** площа трапеції дорівнює  $200 \text{ см}^2$ , а її висота в два рази менша бічної сторони. Обчислити радіус вписаного кола.

Відповідь: 5 см.

**5.136.** менша основа трапеції в два рази менша висоти, а радіус вписаного кола дорівнює 2 см. Обчислити площу трапеції.

Відповідь:  $20 \text{ см}^2$ .

**5.137.** площа трапеції дорівнює  $32\sqrt{3} \text{ см}^2$ , а гострий кут при основі дорівнює  $\pi/3$ . Обчислити бічну сторону трапеції.

Відповідь: 8 см.

**5.138.** радіус кола дорівнює 5 см, а відстань між точками дотику бічних сторін трапеції з колом дорівнює 8 см. Знайти площу трапеції.

Відповідь:  $125 \text{ см}^2$ .

**5.139.** більша основа трапеції дорівнює  $a$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ . Знайти периметр трапеції.

Відповідь:  $P = \frac{2a}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

**5.140.** площа трапеції  $S$ , а гострий кут  $\alpha$ . Знайти основи трапеції.

Відповідь:  $\sqrt{2S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$ ,  $\sqrt{2S \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

•

У прямокутну трапецію вписано коло (задачі **5.141** – **5.143**), при цьому:

**5.141.** довжина кола  $24\pi$  см, а менша основа трапеції – 21 см. Знайти площу трапеції.

Відповідь:  $588 \text{ см}^2$ .

**5.141.\*** [1, § 31, приклад 12, с. 166] У прямокутну трапецію вписано коло. Знайти його радіус, якщо основи трапеції  $a$  і  $b$ .

Відповідь:  $r = \frac{ab}{a+b}$ .

**5.142.** площа вписаного кола дорівнює  $144\pi \text{ см}^2$ , а більша основа трапеції – 28 см. Знайти периметр трапеції.

Відповідь: 98 см.

**5.143.** центр вписаного кола віддалений від кінців бічної сторони на 100 і 75 см. Обчислити площу трапеції.

Відповідь:  $14700 \text{ см}^2$ .

•

**5.144.** Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців меншої основи на 65 і 75 см. Обчислити площу трапеції, якщо довжина меншої основи дорівнює 70 см.

Відповідь:  $17640 \text{ см}^2$ .

**5.145.** Центр вписаного в трапецію кола віддалений від кінців більшої основи на 156 і 100 см, а від кінців бічної сторони – на 100 і 75 см. Обчислити периметр трапеції.

Відповідь: 588 см.

**5.146.** Точка дотику вписаного в трапецію кола ділить бічну сторону на відрізки 4 і 9 см. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 7 см.

Відповідь: 56 см.

**5.147.** Точка дотику вписаного в трапецію кола ділить бічну сторону на відрізки 8 і 18 см. Знайти основи трапеції, якщо її периметр дорівнює 112 см.

Відповідь: 42 і 14 см або 24 і 32 см.

**5.148.** Навколо кола описано трапецію, бічні сторони якої утворюють з більшою основою гострі кути  $\alpha$  і  $\beta$ . Визначити радіус кола, якщо площа трапеції дорівнює  $S$ .

Відповідь:  $r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2S \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}}$ .



•

Навколо трапеції описано коло (задачі 5.149 – 5.155), при цьому:

**5.149.** основи трапеції рівні 21 і 9 см, а діагональ – 17 см. Знайти радіус описаного кола.

Відповідь:  $85/8$  см.

**5.149.\*** [1, § 31, приклад 11, с. 165] Основи рівнобічної трапеції  $a$  і  $b$ , а гострий кут трапеції дорівнює  $\alpha$ . Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Відповідь:  $R = \frac{1}{2 \sin 2\alpha} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos 2\alpha}$ .

**5.150.** основи трапеції рівні 20 і 10 см, а висота – 8 см. Знайти радіус описаного кола.

Відповідь:  $17\sqrt{89}/16$  см.

**5.151.** основи трапеції рівні 20 і 10 см. У трапецію також можна вписати коло. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Відповідь:  $15\sqrt{34}/8$  см.

**5.152.** різниця довжин основ трапеції дорівнює 16 см, а бічна сторона – 17 см. У трапецію також можна вписати коло. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Відповідь:  $17\sqrt{514}/30$  см.

**5.153.** різниця довжин основ трапеції дорівнює 12 см. У трапецію також вписано коло радіуса 4 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Відповідь:  $17\sqrt{514}/30$  см.

**5.154.** сума довжин основ трапеції дорівнює 10 см. У трапецію також вписано коло радіуса 2 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

Відповідь:  $5\sqrt{41}/8$  см.

**5.155.** основа трапеції утворює з бічною стороною кут  $\pi/4$ , а з діагоналлю – кут  $\pi/6$ . Знайти відношення площі трапеції до площі описаного круга.

Відповідь:  $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ .

### Група Б

**5.156.** Середня лінія трапеції дорівнює 10 см і ділить площу трапеції у відношенні 3:5. Знайти основи трапеції.

Відповідь: 15 і 5 см.

**5.157.** Довжини основ трапеції  $a$  і  $b$ . Знайти довжину відрізка, що з'єднає бічні сторони трапеції паралельно основам і ділить площу трапеції навпіл.

Відповідь:  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .

**5.158.** Бічні сторони трапеції  $p$  і  $q$  ( $p < q$ ), більша основа  $a$ . Кути при більшій основі відносяться як 2:1. Знайти меншу основу.

Відповідь:  $(p^2 + ap - q^2)/p$ .

**5.159.** У трапеції довжини діагоналей рівні 3 і 5, а довжина відрізка, що з'єднує середини основ, дорівнює 2. Знайти площу трапеції.

Відповідь: 6 кв. од.

**5.160.** Пряма, паралельна основам заданої прямокутної трапеції, розбиває її на дві трапеції, у кожному з яких можна вписати коло. Знайти основи заданої трапеції, якщо її бічні сторони  $c$  і  $d$  ( $c > d$ ).

Відповідь:  $\frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 - d^2})$ ,  $\frac{1}{2}(c - \sqrt{c^2 - d^2})$ .

**5.161.** Основи трапеції  $a$  і  $b$ . Знайти довжину відрізка, що з'єднує бічні сторони трапеції і проходить через точку перетину її діагоналей паралельно основам.

Відповідь:  $\frac{2ab}{a+b}$ .

**5.162.** Сторони паралелограма рівні 3 і 4. Із середини більшої сторони паралельну сторону видно під кутом  $45^\circ$ . Знайти площу паралелограма.

Відповідь:  $S = 5$  кв. од.

**5.163.** В ромб вписано коло. В утворений криволінійний трикутник (з гострим кутом) знову вписано коло. Знайти його радіус, якщо висота ромба дорівнює  $h$ , а гострий кут дорівнює  $\alpha$ .

Відповідь:  $\frac{h}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi - \alpha}{4}$ .

**5.164.** У чотирикутник  $ABCD$  можна вписати і навколо нього можна описати коло. Діагоналі цього чотирикутника взаємно перпендикулярні. Знайти його площу, якщо радіус описаного кола дорівнює  $R$  і  $AB = 2BC$ .

Відповідь:  $8R^2/5$ .

**5.165.** Два кола мають зовнішній дотик у точці  $A$ . Знайти радіуси кіл, якщо хорди, що з'єднують точку  $A$  і точки дотику кіл із спільною зовнішньою дотичною, рівні 6 і 8 см.

Відповідь:  $15/4$  і  $20/3$  см.

**5.166.** Два кола, радіуси яких  $R$  і  $r$  ( $r < R < 2r$ ), мають внутрішній дотик. Знайти радіус третього кола, що дотикається перших двох кіл і їхнього спільного діаметра.

Відповідь:  $4Rr \frac{R-r}{(R+r)^2}$ .

**5.167.** Два кола радіусів  $R$  і  $r$  знаходяться в положенні зовнішнього дотику. До цих кіл проведено спільну зовнішню дотичну і в утворений при цьому криволінійний трикутник вписано коло. Знайти його радіус.

Відповідь:  $\frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}$ .

•

**5.168.** Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 кв. од., а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює  $h$ . Знайти сторону основи.

Відповідь:  $a = \frac{2}{h} \sqrt{128 \pm 8\sqrt{256 - h^4}}$  при  $h \in (0; 4]$ .

**5.169.** Радіус вписаного в рівнобедрений трикутник кола 4, а висота, проведена до бічної сторони –  $h$ . Знайти сторони трикутника.

Відповідь:  $a = 8\sqrt{\frac{h}{16-h}}$ ,  $b = \frac{32}{h-8}\sqrt{\frac{h}{16-h}}$  при  $h \in (8; 16)$ .

**5.170.** У рівнобедреному трикутнику  $h$  – висота, проведена до бічної сторони, і  $r$  – радіус вписаного кола. Знайти кути трикутника.

Відповідь:  $\beta = 2\arctg \sqrt{\frac{4r-h}{h}}$ ,  $\alpha = \pi - 4\arctg \sqrt{\frac{4r-h}{h}}$  при  $2r < h < 4r$ .

**5.171.** Периметр прямокутного трикутника дорівнює 6, а радіус вписаного кола –  $r$ . Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{3+r}{\sqrt{2(3-r)}}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{3+r}{\sqrt{2(3-r)}}$  при  $r \in (0; 3(3-2\sqrt{2})]$ .

**5.172.** У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 2, а периметр –  $P$ . Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{4+P}{\sqrt{2}P}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{4+P}{\sqrt{2}P}$  при  $P \geq 4(\sqrt{2}+1)$ .

**5.173.** У прямокутному трикутнику  $c$  – гіпотенуза і  $P$  – периметр. Знайти гострі кути трикутника.

Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{P-c}{\sqrt{2}c}$ ,  $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{P-c}{\sqrt{2}c}$  при  $2c < P \leq c(\sqrt{2}+1)$ .

## 5.2. Стереометрія

### Група А

У задачах **5.174** – **5.203** використовуються наступні позначення параметрів правильної трикутної піраміди:  $a$  – сторона основи,  $b$  – бічне ребро,  $H$  – висота піраміди,  $l$  – апофема,  $\alpha$  – плоский кут при вершині піраміди,  $\beta$  – кут нахилу бічного ребра до площини основи,  $\gamma$  – двогранний кут при ребрі основи,  $\varphi$  – двогранний кут при бічному ребрі,  $S_{\text{біч}}$  – бічна поверхня піраміди,  $S_n$  – повна поверхня піраміди,  $V$  – об'єм піраміди,  $R_k$  – радіус описаної кулі,  $r_k$  – радіус вписаної кулі.

В правильній трикутній піраміді (задачі **5.174** – **5.203**) задано:

**5.174.**  $b, l$ . Знайти  $V$ . Відповідь:  $V = \frac{1}{3}(b^2 - l^2)\sqrt{4l^2 - b^2}$ .

**5.175.**  $b, H$ . Знайти  $S_{\text{біч}}, S_n$ . Відповідь:  $S_{\text{біч}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{(b^2 - H^2)(3H^2 + b^2)}$ ,

$S_n = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt{b^2 - H^2}(\sqrt{b^2 - H^2} + \sqrt{3H^2 + b^2})$ .