Рассмотрим характерные особенности применения этих методов в стереометрии на примерах решения задач о нахождении основных параметров правильной треугольной пирамиды.

32.1. Правильная треугольная пирамида (основные параметры). Всюду в этом параграфе используются следующие обозначения основных параметров правильной треугольной пирамиды (см. рис. 5.19):

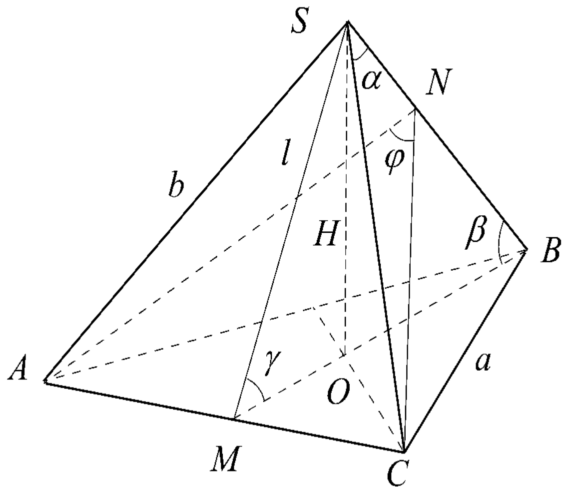

Рис. 5.19

a — *сторона основания* ($AB = BC = AC = a$);

b — *боковое ребро* ($SA = SB = SC = b$);

H — *высота* ($H = SO$, O — *центр основания*);

l — *апофема* ($l = SM$, M — *середина* AC);

α — *плоский угол при вершине* ($\alpha = \angle CSB = \angle ASB = \angle ASC$);

β — *угол наклона бокового ребра к плоскости основания* ($\beta = \angle SBO = \angle SCO = \angle SAO$);

γ — *двугранный угол при ребре основания* (линейный угол одного из этих двугранных углов $\angle SMO = \gamma$);

φ — *двугранный угол при боковом ребре* (линейный угол одного из этих двугранных углов образуется перпендикулярами AN и CN, проведенными на боковое ребро SB, которые у правильной пирамиды имеют общую точку N);

P и S_0 — соответственно *периметр* и *площадь основания;*

r — *радиус окружности, вписанной в основание;*

R — *радиус окружности, описанной около основания;*

V — *объем;*

$S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{п}}$ — соответственно *боковая* и *полная поверхности пирамиды;*

$r_{\text{ш}}$ — *радиус шара, вписанного в пирамиду;*

$R_{\text{ш}}$ — *радиус шара, описанного около пирамиды.*

При этом имеют место соотношения:

$$V=\frac{1}{3}S_0H\,,\qquad S_{\text{бок}}=\frac{1}{2}Pl\,,\qquad S_{\text{п}}=S_0+S_{\text{бок}}\,.$$

Подчеркнем, *что в правильной пирамиде, как правило, по заданным двум основным параметрам, один из которых не угол, можно найти любой другой из основных параметров* (исключения составляют, очевидно, случаи, при которых оба заданных параметра характеризуют основание пирамиды, например, P и S_0). Кроме того, *по заданному углу (α или β, или γ, или φ) правильной пирамиды можно найти любой другой из этих углов.* При этом используются **два основных метода решения геометрических задач**:

1) *метод последовательного решения нескольких стандартных планиметрических задач;*

2) *метод введения вспомогательной неизвестной.*

32.2. Некоторые стандартные планиметрические задачи, связанные с пирамидой. Рассмотрим несколько стандартных планиметрических задач, связанных с пирамидами, при этом будем использовать сокращенную запись условия задач. Отметим также, что обозначения, которые используются в этих задачах, соответствуют принятым выше обозначениям параметров пирамиды и обозначениям, сделанным на рис. 5.19. Кроме того, для элементов рассматриваемых треугольников используются названия соответствующих элементов пирамиды.

Задача 1. Дано: $\triangle BSC$, $SB=SC$, SF и CN – высоты, $BC=a, CN=n$ (см. рис. 5.20).

Найти SF (*апофема пирамиды*) и SB (*боковое ребро*).

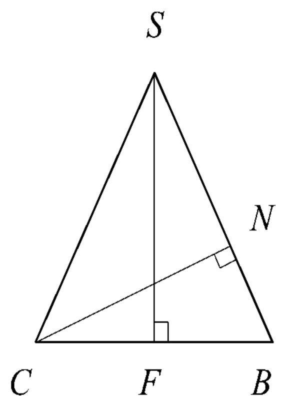

Рис. 5.20

Решение. Заметим, что искомые отрезки являются элементами треугольника SFB. Рассмотрим также подобный ему треугольник CNB, который полностью определен. Имеем соотношения $\dfrac{SF}{FB}=\operatorname{tg}\angle NBF=\dfrac{CN}{NB}$, из которых следует равенство

$$SF=\frac{FB\cdot CN}{NB}=\frac{an}{2\sqrt{a^2-n^2}}\,.$$

Аналогично имеем $\dfrac{FB}{SB} = \cos\angle NBF = \dfrac{NB}{BC}$, откуда получаем
$SB = \dfrac{FB \cdot BC}{NB} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - n^2}}$.

Задача 2. Дано: $\triangle MSB$, SO и MN – высоты, $MO = r, OB = R, MN = m$ (см. рис. 5.21).

Найти SO (*высота пирамиды*) и SB (*боковое ребро*).

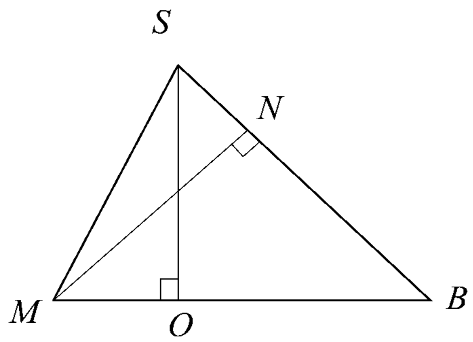

Рис. 5.21

Решение. Как и в предыдущей задаче, имеются подобные треугольники SOB и MNB (полностью определен). Имеем соотношения $\dfrac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle NBO = \dfrac{MN}{NB}$, из которых следует
$SO = \dfrac{OB \cdot MN}{NB} = \dfrac{Rm}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}$.

Аналогично имеем $\dfrac{OB}{SB} = \cos\angle NBO = \dfrac{NB}{MB}$, откуда
$SB = \dfrac{OB \cdot MB}{NB} = \dfrac{R(R+r)}{\sqrt{(r+R)^2 - m^2}}$.

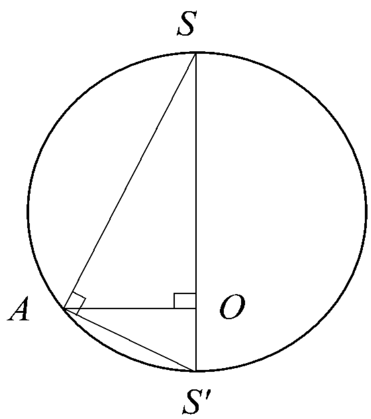

Рис. 5.22

Задача 3. Дано: $\triangle SAS'$, $\angle SAS' = 90°$, AO – высота, $AS = b, AO = R$ (см. рис. 5.22).

Найти радиус окружности, описанной около треугольника SAS' (*радиус шара, описанного около пирамиды*).

Решение. Заметим, что гипотенуза SS' треугольника SAS' является диаметром окружности, описанной около этого треугольника. Имеем $\dfrac{AS}{SS'} = \cos\angle ASO = \dfrac{OS}{AS}$, откуда получаем $SS' = \dfrac{AS^2}{OS}$.

Таким образом, искомый радиус $R_{\text{ш}}$ выражается формулой

$$R_{\text{ш}} = \frac{1}{2}SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2-R^2}}.$$

Задача 4. Дано: $\triangle MSB$, SO – высота, K – точка на SB, $MO = r, OB = R, SO = H, \angle KMO = \delta$ (см. рис. 5.23).

Найти MK.

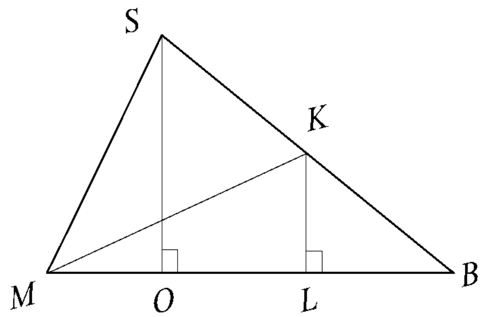

Рис. 5.23

Решение. Пусть $MK = x$ и KL – высота треугольника MKB. Тогда $ML = x\cos\delta$ и $KL = x\sin\delta$.

Рассматривая соотношения $\dfrac{SO}{OB} = \operatorname{tg}\angle KBL = \dfrac{KL}{LB}$, получаем ***уравнение***

$$\frac{H}{R} = \frac{x\sin\delta}{R + r - x\cos\delta}$$

для нахождения неизвестной x.

Учитывая, что знаменатели дробей в полученном уравнении выражают длины некоторых отрезков и не равны нулю, приводим это уравнение к виду $H(R + r - x\cos\delta) = Rx\sin\delta$, откуда находим $x = \dfrac{H(R+r)}{H\cos\delta + R\sin\delta}$.

Таким образом, $MK = \dfrac{H(R+r)}{H\cos\delta + R\sin\delta}$.

В заключение отметим, что стандартные планиметрические задачи 1, 3 используются при решении стереометрических задач с произвольными правильными пирамидами (т.е. не только треугольными), а задача 3, кроме того, может быть использована для нахождения радиуса шара, описанного около некоторых неправильных пирамид.

32.3. Метод последовательного решения нескольких стандартных планиметрических задач. *Необходимым условием применения этого метода является наличие плоских фигур, которые полностью определяются заданными в условии задачи параметрами.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. В правильной треугольной пирамиде a – сторона основания и φ – двугранный угол при боковом ребре. Найти объем пирамиды.

Решение. Заметим здесь, что при изображении заданной пирамиды на плоскости (см. рис. 5.24) происходят существенные искажения углов и длин отрезков. Поэтому целесообразно делать отдельные изображения тех плоских элементов пирамиды, которые используются в ходе решения.

Отметим, что при заданных в условии задачи параметрах пирамиды равносторонний треугольник ABC и равнобедренный треугольник ANC полностью определены (см. рис. 5.24).

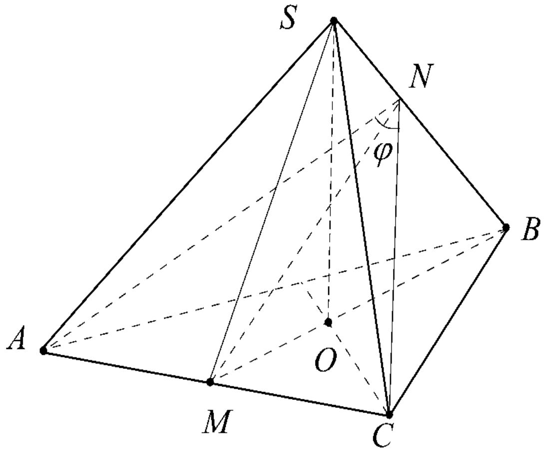

Рис. 5.24

Поскольку объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_0H$, а площадь основания пирамиды S_0 находится просто, то самым существенным звеном процесса решения этой задачи является нахождение высоты H пирамиды.

Для нахождения высоты $H = SO$ используем треугольник MSB (стандартная планиметрическая задача 2 из п. 32.2). С этой целью необходимо прежде найти $R = OB$, MB и MN. Эти необходимые для нахождения высоты SO элементы отмечены на рис. 5.25 стрелочками. Аналогичные пометки используются в этом параграфе и на других рисунках.

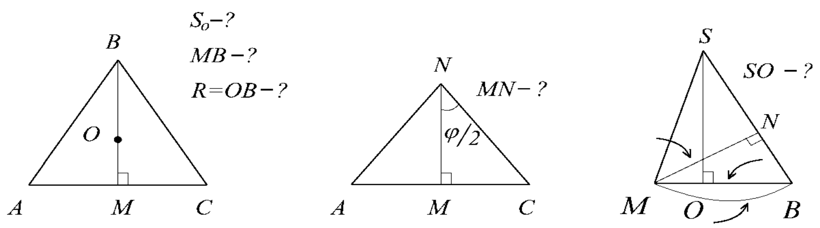

Рис. 5.25

Таким образом, решение данной стереометрической задачи сводится к ***последовательному решению трех стандартных планиметрических задач*** (см. рис. 5.25):

1) в равностороннем треугольнике ABC находим S_0, MB и R:
$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2\,, \quad MB = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a\,, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\,;$
2) в равнобедренном треугольнике ANC находим высоту MN:
$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{MC}{MN}$, откуда $MN = \frac{MC}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\,;$
3) в треугольнике MSB находим высоту SO (стандартная задача 2 из п. 32.2):

$$SO = \frac{OB\cdot MN}{NB} = \frac{OB\cdot MN}{\sqrt{MB^2-MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\,a\,\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}\,a\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}{3\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = $$

$$= \frac{\sqrt{3}\,a}{3\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}}\,.$$

Наконец,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{3}a}{3\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}} = \frac{a^3}{12\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}}\,.$$

Ответ: $V = \dfrac{a^3}{12\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}}\,.$

Пример 2. В правильной треугольной пирамиде a – сторона основания и φ – двугранный угол при боковом ребре. Найти радиус описанного шара.

Решение. Как и в предыдущем примере, полностью определены равносторонний треугольник ABC и равнобедренный треугольник ANC Центр O_1 описанного около правильной пирамиды шара лежит на высоте SO пирамиды. Обозначим через S' вторую точку пересечения прямой SO с поверхностью шара (см. рис. 5.26). Тогда SS' — диаметр шара.

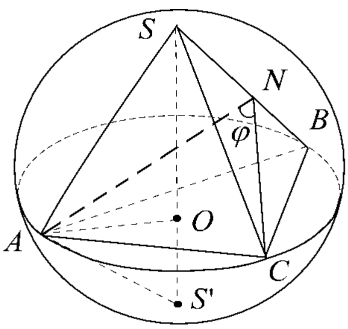

Рис. 5.26

Будем искать $R_{\text{ш}} = \dfrac{1}{2}SS'$ в прямоугольном треугольнике SAS' с прямым углом $\angle SAS'$ (стандартная задача 3 из п. 32.2). Для этого необходимо прежде найти $R = OA = OB$ и $b = AS = BS$. Выражение для бокового ребра BS можно получить в треугольнике SBC (стандартная задача 1 из п. 32.2) или в треугольнике MSB, где M — середина AC (стандартная задача 2 из п. 32.2).

Рассмотрим оба способа.

1-й способ. Чтобы найти SB, используя треугольник SBC, необходимо прежде найти выражение отрезка CN в полностью определенном треугольнике ANC.

Таким образом, в этом случае решение задачи сводится к ***последовательному решению четырех стандартных планиметрических задач*** (см. рис. 5.27):

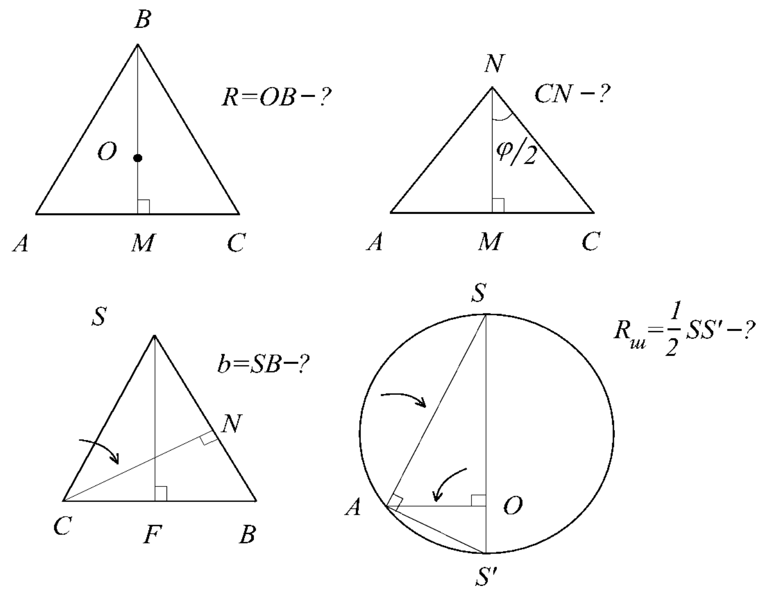

Рис. 5.27

1) в равностороннем треугольнике ABC находим R: $R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a\,;$

2) в равнобедренном треугольнике ANC находим CN:
$\dfrac{MC}{CN} = \sin\dfrac{\varphi}{2}$, откуда $CN = \dfrac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\,;$

3) в треугольнике SBC находим SB (стандартная задача 1 из п. 32.2)

$$b = SB = \frac{FB\cdot BC}{NB} = \frac{FB\cdot BC}{\sqrt{BC^2 - CN^2}} = \frac{\frac{a}{2}\cdot a}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}} = \frac{a\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1}}\,;$$

4) в треугольнике SAS', повторяя решение стандартной задачи 3 из п. 2.2, получаем

$$R_ш = \frac{1}{2}\,SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}}{2\sqrt{\frac{a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1} - \frac{a^2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}\,a\,\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1}}\,.$$

2-й способ. При использовании треугольника MSB для нахождения бокового ребра SB решение задачи сводится к ***последовательному решению*** следующих ***четырех стандартных планиметрических задач*** (см. рис. 5.28):

1) в равностороннем треугольнике ABC находим MB и $R = OB$:

$$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a\,, \qquad R = \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\,;$$

2) в равнобедренном треугольнике ANC находим MN:

$MN = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$;

3) в треугольнике MSB находим SB (стандартная задача 2 из п. 32.2)

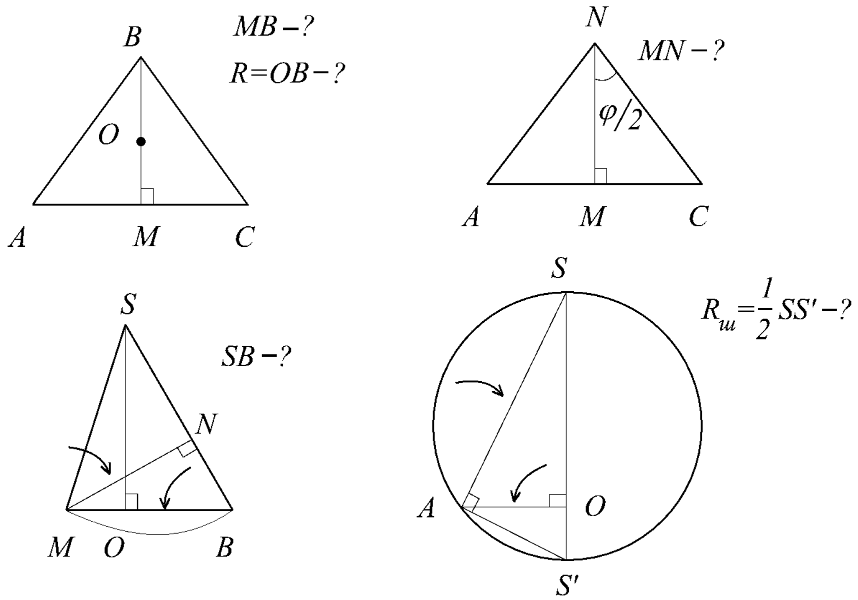

Рис. 5.28

$$b = SB = \frac{OB\cdot MB}{NB} = \frac{OB\cdot MB}{\sqrt{MB^2 - MN^2}} = \frac{\frac{\sqrt3}{3}\,a\cdot\frac{\sqrt3}{2}\,a}{\sqrt{\frac34 a^2 - \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}};$$

4) в треугольнике SAS', повторяя решение стандартной задачи 3 из п. 32.2, получаем

$$R_{\text{ш}} = \frac12\,SS' = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - R^2}} = \frac{\frac{a^2}{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt{\frac{a^2}{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}}} = \frac{\sqrt3\,a}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Вполне естественно, что полученные при разных способах выражения $R_{\text{ш}}$ отличаются лишь формой записи, что можно подтвердить тождественными преобразованиями соответствующих тригонометрических выражений. При записи ответа здесь мы используем одно из полученных выражений.

Ответ: $R_{\text{ш}} = \dfrac{\sqrt3\,a}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}$.

Пример 3. В правильной треугольной пирамиде a – сторона основания и β – угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

Решение. Центр вписанного в пирамиду шара равноудален от всех граней пирамиды. Поэтому *радиус* $r_{\text{ш}}$ *вписанного шара можно найти по формуле*

$$r_{\text{ш}} = \frac{3V}{S_{\text{п}}}\,. \tag{5.11}$$

Для доказательства этой формулы достаточно, соединив центр вписанного шара с вершинами пирамиды, представить объем пирамиды в виде суммы объемов полученных пирамид с вершиной в центре шара, основаниями которых являются грани пирамиды, а высотами – радиусы вписанного шара. При этом будем иметь $V = \frac{1}{3}S_0 r_{\text{ш}} + \frac{1}{3}S_1 r_{\text{ш}} + \frac{1}{3}S_2 r_{\text{ш}} + \frac{1}{3}S_3 r_{\text{ш}} = \frac{1}{3}S_{\text{п}} r_{\text{ш}}$ (здесь S_1, S_2, S_3 – площади боковых граней пирамиды), откуда следует формула (5.11).

Таким образом, имеем

$$r_{\text{ш}} = \frac{3V}{S_0 + S_{\text{бок}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 H}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3}{2}al} = \frac{aH}{a + 2\sqrt{3}\,l}\,.$$

Следовательно, для нахождения радиуса вписанного шара необходимо найти высоту H и апофему l пирамиды. Это можно осуществить в результате ***последовательного решения*** следующих ***трех стандартных планиметрических задач*** (см. рис. 5.29, обозначения треугольников на котором соответствуют обозначениям, сделанным на рис. 5.19):

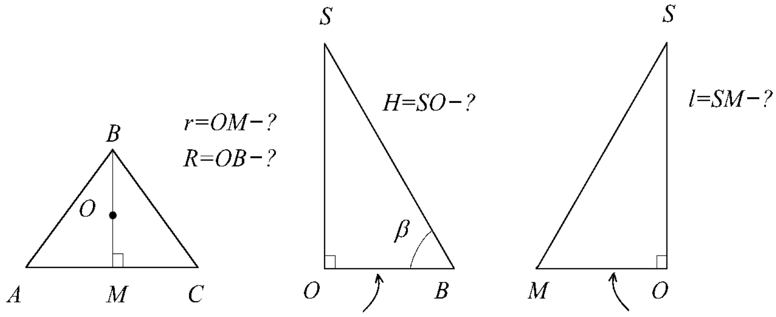

Рис. 5.29

1) в равностороннем треугольнике ABC находим $OM = r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,a$ и $OB = R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a$;

2) в прямоугольном треугольнике SOB находим $H = SO = R\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\operatorname{tg}\beta$;

3) в прямоугольном треугольнике SOM находим $l = SM = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3}a^2\operatorname{tg}^2\beta + \dfrac{1}{12}a^2} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}$.

Наконец, для радиуса $r_{\text{ш}}$ получаем

$$r_{\text{ш}} = \frac{aH}{a + 2\sqrt{3}\,l} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\,a\operatorname{tg}\beta}{a + a\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\operatorname{tg}\beta}{1 + \sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}}\,.$$

О т в е т: $r_{\text{ш}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{1 + \sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta + 1}}$.

Отметим, что *для любой n-угольной пирамиды (не обязательно правильной), в которую вписан шар, имеет место формула (5.11)* . Ее доказательство в этом случае проводится совершенно аналогично доказательству, изложенному при решении предыдущего примера.

32.4. Метод введения вспомогательной неизвестной. *Задачи о нахождении некоторых параметров пространственных тел, решение которых не удается осуществить путем последовательного решения нескольких стандартных планиметрических задач, могут быть решены* ***методом введения вспомогательной неизвестной.*** Характерные особенности применения этого метода рассмотрены в предыдущем параграфе на примерах решения задач планиметрии. Здесь же изложение метода дополняется типичными примерами решения стереометрических задач.

Пример 4. Высота правильной треугольной пирамиды H, а плоский угол при вершине пирамиды – α. Найти сумму длин всех ребер пирамиды.

Решение. Отметим, что *в данной задаче нельзя выделить ни одного полностью определенного треугольника.* Такую задачу следует решать ***методом введения вспомогательной неизвестной***.

Пусть сторона основания пирамиды $BC = x$. Теперь в равностороннем треугольнике ABC и в равнобедренном треугольнике SBC (см. рис. 5.30) через x можно выразить любые параметры. Рассмотрим также прямоугольный треугольник SOB, в котором $\angle SOB = 90^\circ$ и задан катет $SO = H$, с целью получения уравнения для нахождения неизвестной x. Эта цель будет достигнута в результате последовательного выполнения следующих шагов (см. рис. 5.30):

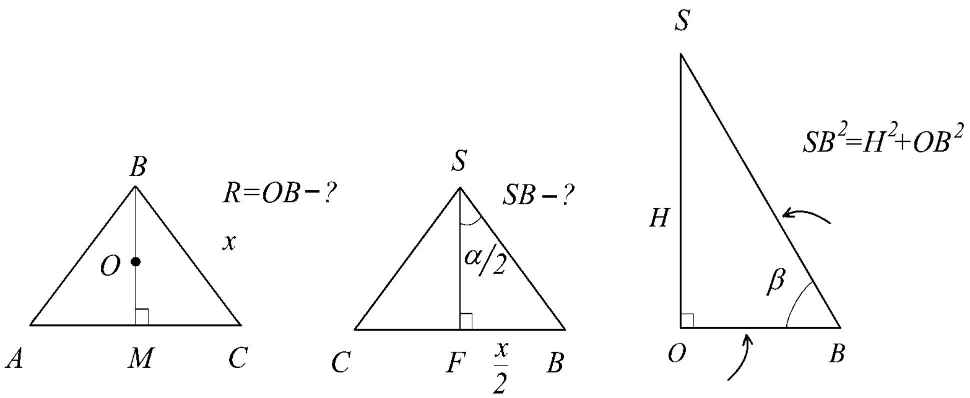

Рис. 5.30

1) в равностороннем треугольнике ABC выражаем $OB = R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$;

2) в равнобедренном треугольнике SBC выражаем боковую сторону SB: $\dfrac{FB}{SB} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ (здесь F – середина стороны BC), откуда $b = SB = \dfrac{FB}{\sin(\alpha/2)} = \dfrac{x}{2\sin(\alpha/2)}$;

3) записывая теорему Пифагора $SB^2 = SO^2 + OB^2$ для треугольника SOB, получаем ***уравнение***

$$\frac{x^2}{4\sin^2(\alpha/2)} = H^2 + \frac{x^2}{3} \iff \frac{x^2(3 - 4\sin^2(\alpha/2))}{12\sin^2(\alpha/2)} = H^2 \iff$$

$$\iff \quad x^2 = \frac{12H^2 \sin^2(\alpha/2)}{3 - 4\sin^2(\alpha/2)} \quad \iff \quad x = H\frac{2\sqrt{3}\,\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Теперь искомую сумму длин всех ребер пирамиды (т.е. трех сторон основания и трех боковых ребер) выразим через найденное выражение x:

$$3x + 3b = 3x + \frac{3x}{2\sin(\alpha/2)} = 3x\frac{1 + 2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} =$$

$$= 3H\frac{2\sqrt{3}\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4\sin^2(\alpha/2)}} \cdot \frac{1 + 2\sin(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} = 3\sqrt{3}H\frac{1 + 2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4\sin^2(\alpha/2)}}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}H\dfrac{1 + 2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{3 - 4\sin^2(\alpha/2)}}$.

Пример 5. Радиус описанного около правильной треугольной пирамиды шара $R_{\text{ш}}$, а двугранный угол при боковом ребре пирамиды – φ. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру.

Решение. Сечением, о котором идет речь в условии задачи, является равнобедренный треугольник ANC (см. рис. 5.24). Как и в предыдущей задаче, здесь нельзя выделить ни одного полностью определенного треугольника.

Для решения задачи используем ***метод введения вспомогательной неизвестной***. Пусть сторона основания пирамиды $AC = x$. Выражая $R_{\text{ш}}$ через сторону основания, получаем ***уравнение*** для нахождения x:

$R_{\text{ш}} = \dfrac{\sqrt{3}\,x}{2\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{3 - \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}}$ (мы воспользовались решением примера 2). Отсюда получаем

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}\,R_{\text{ш}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\,\sqrt{3 - \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Тогда площадь сечения

$$S_{\text{сеч}} = AM \cdot MN = \frac{x^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}\,R^2_{\text{ш}}\,\mathrm{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\left(3 - \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}\,R^2_{\text{ш}}\,\mathrm{ctg}^3\dfrac{\varphi}{2}\left(3 - \mathrm{ctg}^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Рассмотрим *задачу о нахождении углов правильной пирамиды по заданному углу.*

Пример 6. В правильной треугольной пирамиде β – угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

Решение. Задача решается ***методом введения вспомогательной неизвестной***.

Пусть сторона основания пирамиды $AC = x$ (см. рис. 5.31). Линейный угол $\gamma = \angle SMO$ найдем в прямоугольном треугольнике SOM, в котором $\angle SOM = 90°$. С этой целью выразим через x катеты этого треугольника MO и SO. Имеем $MO = r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,x$. Второй катет SO выразим в прямоугольном треугольнике SOB, в котором $\angle SOB = 90°$ (см. рис. 5.31):

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SO}{OB}$, откуда получаем $SO = OB\cdot\operatorname{tg}\beta = R\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,x\operatorname{tg}\beta$.

Теперь при нахождении угла γ неизвестная x *сокращается*:

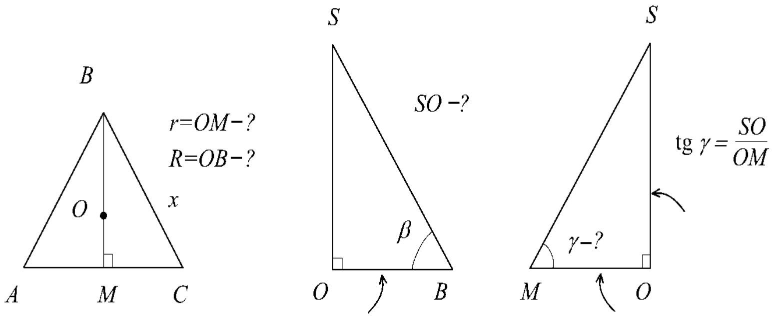

Рис. 5.31

$\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{SO}{MO} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}\,x\operatorname{tg}\beta}{\frac{\sqrt{3}}{6}\,x} = 2\operatorname{tg}\beta$, следовательно, $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Ответ: $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$.

Отметим еще один способ нахождения радиуса шара, вписанного в правильную пирамиду. В качестве примера рассмотрим решение этим способом задачи, рассмотренной ранее в примере 3.

Пример 7. В правильной треугольной пирамиде a – сторона основания и β – угол наклона бокового ребра к плоскости основания. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

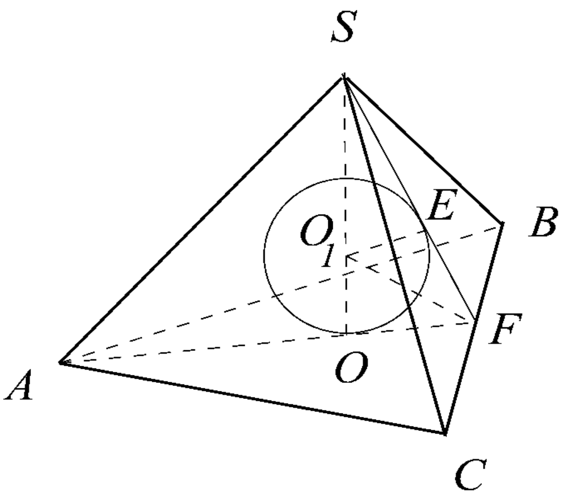

Рис. 5.32

Решение. Центр O_1 вписанного в пирамиду шара равноудален от всех граней пирамиды и, следовательно, является точкой пересечения всех плоскостей, которые делят пополам двугранные углы пирамиды. При этом у правильной пирамиды точка O_1 является точкой пересечения высоты SO пирамиды и биссектрисы угла SFO, образованного апофемой SF и ее проекцией FO на основание пирамиды (см. рис. 5.32). Таким образом,

$r_{\text{ш}} = r\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, где $r = FO$ – радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, а γ – двугранный угол при ребре основания (т.е. $\gamma = \angle SFO$).

Поскольку $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,a$, то решение задачи сводится к выражению угла γ через заданный угол β, т.е. к задаче, рассмотренной в предыдущем примере. Имеем $\gamma = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$. Тогда

$$r_{\text{ш}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,a\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)\right).$$

Учитывая, что $0 < \gamma < 90^\circ$ и $\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)\right) = \operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2} = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{1}{\cos\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}-1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}-1}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+4}-\operatorname{ctg}\beta\right).$$

Ответ: $r_{\text{ш}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,a\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\,a\left(\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta+4}-\operatorname{ctg}\beta\right)$.

Пример 8. В правильной треугольной пирамиде a – сторона основания, а γ – двугранный угол при ребре основания. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через ребро основания и образует с плоскостью основания угол δ.

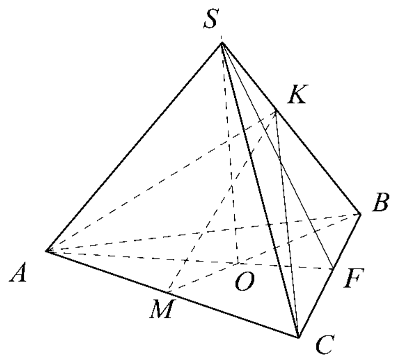

Рис. 5.33

Решение. Сечением является равнобедренный треугольник AKC (см. рис. 5.33). Следовательно, угол KMB, где M — середина стороны AC, является линейным углом двугранного угла, который образует сечение с плоскостью основания пирамиды, т.е. $\angle KMB = \delta$.

Решение задачи сводится к ***последовательному решению четырех стандартных планиметрических задач***, одна из которых (стандартная планиметрическая задача 4 из п. 2.2), в свою очередь, решена выше ***методом введения вспомогательной неизвестной***. Таким образом, последовательно будем иметь:

1) в равностороннем треугольнике ABC находим $r = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\,a$, $\quad R = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,a$;

2) в прямоугольном треугольнике SOF, в котором $\angle SOF = 90°, OF = r$, $\angle SFO = \gamma$ (здесь F – середина BC), находим SO:

$$SO = OF \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{6}\, a \operatorname{tg}\gamma\,;$$

3) в треугольнике MSB находим MK (стандартная задача 4 из п. 32.2):

$$MK = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a \,\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta}\,;$$

4) находим площадь равнобедренного треугольника AKC (площадь сечения):

$$S_{\text{сеч}} = AM \cdot MK = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma \cdot \cos\delta + 2\sin\delta}\,.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}\,a^2}{4} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma\cos\delta + 2\sin\delta}$.

§ 33. Элементы аналитической геометрии на плоскости

33.1. Координатный метод в геометрии. Введение системы координат на плоскости устанавливает тесную взаимосвязь между геометрией и алгеброй. При этом точка плоскости – геометрический объект – отождествляется с парой чисел (x, y), т.е. становится алгебраическим объектом. Другие геометрические фигуры аналогичным образом описываются некоторыми уравнениями или неравенствами и также становятся алгебраическими объектами. Принадлежности точки (x, y) некоторой фигуре теперь соответствует тот факт, что координаты точки x и y удовлетворяют тем условиям (уравнениям, неравенствам), которыми задается эта фигура.

Одной из наиболее употребительных является ***декартова прямоугольная система координат***.

Пусть на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат xOy заданы точки $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. ***Расстояние*** между точками A и B выражается формулой $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$, которая является очевидным следствием теоремы Пифагора (см. рис. 5.34).

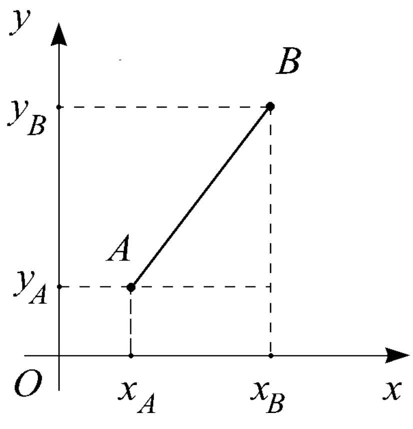

Рис. 5.34