

...если мы не в состоянии отличить истинное мнение, то должны довольствоваться наиболее вероятным.

РЕНЭ ДЕКАРТ, "Рассуждение о методе"

Дополнение. Комбинаторика. Элементы теории вероятностей

С. А. Плакса, В. В. Шпырко

§ 1. Элементы комбинаторики

1.1. Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Пусть необходимо последовательно выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе – n_2 способами, третье – n_3 способами и так далее, то все k действий могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Пример 1. В камере хранения установлен кодовый замок, шифр которого состоит из трех цифр. Сколько разных комбинаций можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если:

- 1) цифры в коде могут повторяться?
- 2) цифры в коде не могут повторяться?

Решение. 1) Поскольку цифры в коде могут повторяться, то каждая цифра кода может быть выбрана 5 способами. Поэтому, по правилу умножения общее количество комбинаций равняется $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

2) На первом месте может стоять любая из пяти цифр, на втором – одна из четырех оставшихся после выбора первой цифры, на третьем – одна из трех оставшихся после выбора первых двух цифр. Общее количество комбинаций подсчитывается по правилу умножения: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Ответ: 1) 125; 2) 60.

1.2. Перестановки, размещения и сочетания. Множество из n элементов называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие определенное число (номер элемента) от 1 до n так, что разным элементам соответствуют разные числа. Упорядоченные множества считаются разными, если они отличаются или своими элементами, или их порядком.

Упорядоченные множества, которые отличаются только порядком элементов, называются **перестановками** этого множества. Количество перестановок множества из n элементов обозначают P_n . Так, как и при решении примера 1 (см. пункт 2) устанавливается, что это число равно $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Размещением из n элементов по k (без повторений) называется упорядоченное подмножество, которое содержит k элементов из множества, состоящего из n элементов. Количество размещений из n элементов по k обозначают A_n^k . В частности, в примере 1 в пункте 2) вычислено A_5^3 . Аналогично

устанавливается формула
$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетанием из n элементов по k (без повторений) называется подмножество, которое содержит k элементов из множества, состоящего из n элементов. При этом порядок элементов в подмножестве является несущественным. Количество сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k . При этом сочетания, размещения и перестановки связаны между собой соотношениями $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ (поскольку из одного подмножества, содержащего k элементов, можно образовать $P_k = k!$ разных упорядоченных множеств и поэтому количество размещений A_n^k в P_k раз больше количества сочетаний C_n^k). Отсюда

получаем формулу
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Полагают, что $0! = 1$. Тогда $C_n^0 = 1$.

Пример 2. Из 16 учеников одного класса необходимо выбрать троих для участия в олимпиаде. Каким количеством способов можно это сделать?

Решение. Поскольку порядок троих учеников в выбранном подмножестве является несущественным, то количество способов выбора вычисляется по формуле:

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3!(16-3)!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3} = 560.$$

Ответ: 560.

Пример 3. Каким количеством способов может образоваться тройка призеров первенства по футболу, в котором принимают участие 16 команд?

Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь существенно, какая именно команда станет чемпионом, какая будет второй и какая займет третье место. Поэтому количество способов образования тройки призеров вычисляем по формуле:

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = 14 \cdot 15 \cdot 16 = 3360.$$

Ответ: 3360.

Бином Ньютона. Справедлива формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где n – натуральное число. Сокращенно это выражение можно записать так:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Числа C_n^k называют также **биномиальными коэффициентами**. Для их вычисления часто используют формулы $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. С помощью последней формулы строят треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

(здесь каждое число образуется в результате сложения двух чисел, размещенных над ним слева и справа. Числа C_n^k размещаются в $(n+1)$ -й строке. Например, в пятой строке находятся числа $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$).

Пример 4. В разложении $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ вычислить коэффициент при x^2 .

Решение. По формуле бинома Ньютона получаем

$$\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k (\sqrt[4]{x})^{15-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{15-k}{4}} x^{-\frac{k}{3}} = \sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^{\frac{45-7k}{12}}.$$

Слагаемое с x^2 имеем при $k = 3$. Таким образом, коэффициент при x^2 равен $C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3} = 455$.

Ответ: 455.

Упорядоченное множество из n элементов, среди которых есть k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_m элементов m -го типа, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, называется **перестановкой с повторениями**. Количество перестановок с повторениями равно

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Пример 5. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

Решение. В слове "математика" 10 букв, из которых буква "м" встречается 2 раза, буква "а" – 3 раза, буква "т" – 2 раза, буква "е" – 1 раз, буква "и" – 1 раз, буква "к" – 1 раз. Поэтому количество слов, образованных при всех возможных перестановках этих букв, равно $P_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2! 3! 2! 1! 1! 1!} = 151200$.

Ответ: 151200.

Пример 6. В ящике лежат несколько белых и черных пронумерованных шариков. Известно, что взять один белый и один черный шарик вместе можно 80 способами, а один белый и два черных – 360 способами. Сколько в ящике белых шариков и сколько черных?

Решение. Пусть в ящике лежат n белых и k черных шариков. Тогда количество способов взять один белый и один черный шарик равно $C_n^1 C_k^1 = 80$, а количество способов взять один белый и два черных шарика вместе равно $C_n^1 C_k^2 = 360$. Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными n и k :

$$\begin{cases} nk = 80, \\ n \frac{k(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} nk = 80, \\ \frac{80(k-1)}{2} = 360, \end{cases} \iff \begin{cases} n = 8, \\ k = 10. \end{cases}$$

Ответ: 8 белых и 10 черных шариков.

Пример 7. Решить уравнение: $3A_{x-1}^2 - C_x^2 = 45$.

Решение. Используя формулы сочетаний и размещений, получаем: $3(x-1)(x-2) - \frac{x(x-1)}{2} = 45$. После раскрытия скобок и приведения подобных

слагаемых получим квадратное уравнение: $5x^2 - 17x - 78 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = -2,6. \end{cases}$

Учитывая, что x – натуральное число, имеем $x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

§ 2. Элементы теории вероятностей

2.1. Классическое определения вероятности. В теории вероятностей рассматриваются **стохастические эксперименты** – *определенные испытания, которые можно повторить любое количество раз, но результаты которых нельзя точно предвидеть. Результат стохастического эксперимента называют элементарным событием.* С каждым стохастическим экспериментом связывают **пространство элементарных событий** Ω – *совокупность всех возможных результатов эксперимента. Любое подмножество A пространства элементарных событий Ω называется случайным событием.*

Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из n элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, причем все эти элементарные события являются равновероятными, а в состав случайного события A входят m из этих событий.

Вероятностью $P(A)$ случайного события A называется отношение

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Эта формула называется **классическим определением вероятности.**

Вероятность – это числовая характеристика возможности появления случайного события.

Пример 1. Даны отрезки, длины которых 3, 4, 7, 8, 10. Найти вероятность того, что из наугад взятых трех отрезков можно составить треугольник.

Решение. Количество способов выбрать три из пяти разных отрезков равно $C_5^3 = 10$. Таким образом, пространство Ω состоит из $n = 10$ элементарных событий. Событие A состоит в том, что из этих трех отрезков можно составить треугольник, т.е. для выбранных трех чисел должно выполняться неравенство треугольника: сумма любых двух из них больше третьего числа. Очевидно, что из 10 возможных событий этому условию удовлетворяют такие 6 троек чисел: 3, 7, 8; 3, 8, 10; 4, 7, 8; 4, 7, 10; 4, 8, 10; 7, 8, 10. Поэтому событие A состоит из $m = 6$ элементарных событий. Следовательно, вероятность события A равна $P(A) = m/n = 6/10 = 3/5$.

Ответ: $3/5$.

Пример 2. Владелец лотерейного билета зачеркивает 6 номеров из 40. Найти вероятность того, что он угадает хотя бы 3 выигрышных номера.

Решение. Количество способов выбрать 6 номеров из 40 равно C_{40}^6 . Пусть событие A состоит в том, что собственник билета угадает хотя бы 3 выигрышных номера, иначе говоря, он угадает или 3, или 4, или 5, или все 6 выигрышных номеров из 40. Количество способов угадать ровно 3 выигрышных номера равно $C_6^3 \cdot C_{34}^3$, поскольку игрок должен выбрать 3 номера из 6 выигрышных и еще 3 номера из 34 невыигрышных. Аналогично, количество способов угадать ровно 4 выигрышных номера равно $C_6^4 \cdot C_{34}^2$, угадать 5 номеров – $C_6^5 \cdot C_{34}^1$ и угадать все 6 номеров – $C_6^6 = 1$. Поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{34}^3 + C_6^4 \cdot C_{34}^2 + C_6^5 \cdot C_{34}^1 + 1}{C_{40}^6} \approx 0,033.$$

Ответ: $\approx 0,033$.

События A и $\bar{A}$ называются **противоположными**, если в результате испытания произойдет одно и только одно из них. Событие $\bar{A}$ называют также **дополнением к событию** A . Очевидно, что $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В некоторых задачах подсчет количества элементарных событий, составляющих дополнение $\bar{A}$, можно осуществить проще, чем подсчет количества элементарных событий, составляющих само событие A .

Пример 3. В ящике находятся 8 белых и 5 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных из ящика трех шаров хотя бы один будет черным.

Решение. Количество способов выбрать 3 шара из 13, находящихся в ящике, равно C_{13}^3 . Пусть событие A состоит в том, что среди трех извлеченных шаров хотя бы один будет черным, т.е. будет или 1 черный, или 2 черных, или 3 черных шара. Рассмотрим противоположное событие $\bar{A}$, состоящее в том, что среди извлеченных трех шаров отсутствуют черные, т.е. все три извлеченные шара – белые. Количество способов вынуть 3 белых шара из 8, находящихся в ящике, равно C_8^3 . Поэтому, вероятность события $\bar{A}$ равна $P(\bar{A}) = C_8^3/C_{13}^3 \approx 0,196$, а вероятность события A равна $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - 0,196 = 0,804$.

Ответ: $\approx 0,804$.

При некоторых испытаниях пространство элементарных событий бесконечно. Пусть каждому элементарному событию можно поставить во взаимно однозначное соответствие точку определенной геометрической области G (отрезка на прямой, фигуры на плоскости или тела в пространстве) так, что вероятность попадания точки в равновеликие (соответственно, по длине, площади или объему) части этой области прямо пропорциональна их **мере** (длине, площади или объему). Тогда в качестве **вероятности события** A , которое может произойти при таком испытании, принимают **геометрическую вероятность**

$$P(A) = \frac{\text{mes}(g)}{\text{mes}(G)},$$

где $\text{mes}(g)$ – мера области g точек, которые соответствуют элементарным событиям, входящим к событию A , а $\text{mes}(G)$ – мера области G .

Пример 4. Отрезок длины a наугад разделили на три части. Найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

Решение. Пусть задан отрезок BK , на котором наугад выбраны точки C и D (см. рис. 1), причем длина части $BC = x$, а длина $DK = y$ (точка C находится ближе к точке B , чем точка D , поэтому $BC + DK < BK$). Всем возможным значениям x, y соответствует множество G точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x + y < a, \end{cases}$$

т.е. треугольник OMN с вершинами $O(0;0)$, $M(0;a)$, $N(a;0)$, площадь которого $S_{OMN} = a^2/2$ (см. рис. 2).

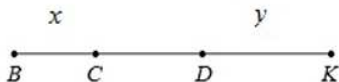


Рис. 1

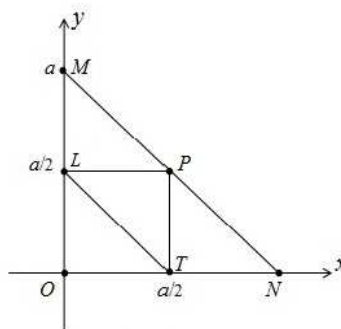


Рис. 2

Пусть событие A состоит в том, что из отрезков $BC = x$, $CD = a - x - y$, $DK = y$ можно составить треугольник. Тогда для длин этих отрезков должны выполняться неравенства треугольников. Всем возможным значениям x, y , входящим к событию A , соответствует множество g точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y < a - x - y + x, \\ a - x - y < x + y, \\ x < a - x - y + y \end{cases} \iff \begin{cases} y < \frac{a}{2}, \\ y > \frac{a}{2} - x, \\ x < \frac{a}{2}. \end{cases}$$

На координатной плоскости решения этой системы содержатся в треугольнике LPT с вершинами $L(0; a/2)$, $P(a/2; a/2)$, $T(a/2; 0)$, площадь которого $S_{LPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$ (см. рис. 2).

Следовательно, вероятность

$$P(A) = \frac{S_{LPT}}{S_{OMN}} = \frac{a^2}{8} : \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

2.2. Операции над событиями: сумма и произведение событий. Условная вероятность. Формула Бернулли. Условную вероятность $P_A(B)$ называется вероятностью события B , вычисленная в предположении, что событие A уже состоялось.

Пример 5. Из ящика, в котором лежат 4 белых и 5 черных шаров, по очереди вытягивают два шара. Известно, что первый шар оказался белым. Найти вероятность того, что второй шар также будет белым.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что первый шар – белый, а событие B – в том, что второй шар – белый. Очевидно, что в начальный момент вероятность вытянуть белый шар равна $4/9$. Однако, известно, что событие A уже состоялось. Поэтому нахождение вероятности события B сводится к вычислению вероятности вытянуть белый шар при **новых условиях**, а именно: теперь в ящике осталось 3 белых и 5 черных шаров. Поскольку всего в ящике находятся 8 шаров, из которых 3 белых, то искомая вероятность $P_A(B)$ равна $3/8$.

Ответ: $3/8$.

В случае, когда события A и B – **независимы**, условная вероятность $P_A(B)$ не зависит от выполнения или невыполнения события A и равна вероятности выполнения события B , т.е. $P_A(B) = P(B)$.

Пример 6. Из ящика, в котором лежат 4 белых и 5 черных шаров, по очереди вытягивают два шара, возвращая каждый раз шары назад в ящик. Известно, что первый шар оказался белым. Найти вероятность того, что второй шар также будет белым.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что первый шар – белый, а событие B состоит в том, что второй шар – белый. Поскольку при условиях задачи события A и B – независимы, то вероятность события B равна вероятности вытянуть белый шар из ящика, в котором лежат 9 шаров, 4 из которых – белые, т.е. $P(B) = 4/9$.

Ответ: $4/9$.

При вычислении вероятностей сложных событий возникает необходимость раскладывать их на более простые события, которые происходят одновременно или последовательно.

Произведением (или пересечением) событий A и B называется событие, которое происходит, если в результате испытания происходят оба события A и B .

Вероятность произведения двух произвольных событий A и B вычисляется по формуле

$$P(A \cdot B) = P(A) P_A(B),$$

а **вероятность произведения двух независимых событий A и B** (поскольку при этом $P_A(B) = P(B)$) равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) P(B).$$

Суммой (или объединением) событий A и B называется событие, которое происходит, если в результате испытания происходит или событие A , или событие B , или оба эти события.

Вероятность суммы двух произвольных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B (т.е. событий, которые в данном испытании не могут произойти одновременно) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 7. Каждый из трех стрелков делает по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в цель: для первого стрелка – 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,6. Найти вероятность таких событий:

A – в мишень попадут ровно два стрелка;

B – в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что первый стрелок попадет в мишень, событие A_2 – в том, что в мишень попадет второй стрелок, событие

A_3 – в том, что в мишень попадет третий стрелок; $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – события, противоположные соответственно событиям A_1 , A_2 , A_3 . Тогда $P(A_1) = 0,9$, $P(A_2) = 0,8$, $P(A_3) = 0,6$, $P(\overline{A_1}) = 0,1$, $P(\overline{A_2}) = 0,2$, $P(\overline{A_3}) = 0,4$.

Событие A (в мишень попадут ровно два стрелка) происходит в таких несовместных случаях: 1) первые два стрелка попадают в цель, а третий – не попадает; 2) первый и третий стрелки попадают в цель, а второй – не попадает; 3) второй и третий стрелки попадают в цель, а первый – не попадает. Учитывая независимость событий A_1 , A_2 , A_3 , получаем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = \\ &= 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,444. \end{aligned}$$

Противоположное событию B (в мишень попадет хотя бы один стрелок) событие $\overline{B}$ состоит в том, что в мишень не попадет ни один из стрелков. Поэтому, вероятность события B можно вычислить так:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,992.$$

Ответ: $P(A) = 0,444$, $P(B) = 0,992$.

Пример 8. В ящике находятся 3 белых и 4 черных шара. Два игрока по очереди вынимают из ящика по одному шару, не возвращая их назад. Выигрывает тот, кто первый вытянет белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

Решение. Пусть событие A_k состоит в том, что первый игрок вынимает белый шар в k -й попытке, а событие B_k состоит в том, что второй игрок вынимает белый шар в k -й попытке, и $\overline{A_k}$, $\overline{B_k}$ – события, противоположные соответственно событиям A_k , B_k .

Первый игрок может выиграть в таких трех несовместных случаях.

1) В первой попытке он сразу вытянет белый шар. Всего в ящике находилось 7 шаров, среди них было 3 белых. Следовательно, вероятность вытянуть белый шар $P(A_1) = 3/7$.

2) Сначала первый игрок вынимает черный шар, вероятность этого события $P(\overline{A_1}) = 4/7$. После этого второй игрок также вынимает черный шар; на этом этапе в ящике оставалось 3 белых и 3 черных шара, поэтому вероятность этого события $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 3/6 = 1/2$. Наконец, в своей второй попытке первый игрок вынимает белый шар; на этом этапе в ящике оставалось 3 белых и 2 черных шара, поэтому вероятность этого события $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) = 3/5$.

3) Первый и второй игроки по очереди дважды вынимают черные шары, вероятности этих событий равны соответственно $P(\overline{A_1}) = 4/7$, $P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1}) = 1/2$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2}) = 2/5$, $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2}) = 1/4$. В своей третьей попытке первый игрок вынимает белый шар; на этот момент в ящике остается только 3 белых шара, поэтому вероятность этого события $P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = 1$.

С учетом несовместности описанных в указанных случаях событий вычисляем вероятность выигрыша первого игрока:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(A_2) + \\
&+ P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_1})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1}}(\overline{A_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2}}(\overline{B_2})P_{\overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2}}(A_3) = \\
&= \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{22}{35} \approx 0,63.
\end{aligned}$$

Ответ: $\approx 0,63$.

Формула Бернулли. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых может быть два результата: "успех" с вероятностью p или "неудача" с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что в такой серии ровно k испытаний закончатся "успехом", вычисляется по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

а сама серия испытаний называется схемой Бернулли.

Пример 9. Проводится 7 независимых выстрелов в цель, вероятность попадания в которую с одного выстрела равна 0,6. Найти: 1) вероятность ровно 5 попаданий в цель; 2) вероятность, по крайней мере, двух попаданий в цель.

Решение. Очевидно, что серия выстрелов является схемой Бернулли, в которой $n = 7$; $p = 0,6$; $q = 1 - p = 0,4$.

1) Вероятность ровно 5 попаданий из 7 выстрелов равна

$$P_7(5) = C_7^5 (0,6)^5 (0,4)^2 \approx 0,261.$$

2) Противоположным событию "по крайней мере, два попадания в цель" является событие "или одно попадание, или ни одного", поэтому искомую вероятность можно вычислить так:

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P_7(1) - P_7(0) = 1 - C_7^1 (0,6)^1 (0,4)^6 - C_7^0 (0,6)^0 (0,4)^7 \approx \\
&\approx 1 - 0,017 - 0,002 = 0,981.
\end{aligned}$$

Ответ: 1) $\approx 0,261$; 2) $\approx 0,981$.

§ 3. Элементы математической статистики

Выборкой объема n называется набор величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, выбранных по определенной процедуре из совокупности всех объектов, изучаемых исследователем. С помощью выборки делают выводы относительно свойств объектов всей совокупности.

Расположим величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ в порядке возрастания и полученную последовательность обозначим следующим образом: $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Такая последовательность называется **вариационным рядом** выборки. Если некоторые значения в последовательности $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ повторяются, то такую выборку удобнее записать в виде таблицы, которая называется **статистическим рядом**:

Значения	y_1	y_2	$\dots$	y_s
Частота	m_1	m_2	$\dots$	m_s

где $y_1, y_2, \dots, y_s$ – разные значения данных вариационного ряда $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, а m_i – количество повторений значения y_i в этом ряде, $i = 1, 2, \dots, s$. Очевидно, что $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$.

Размах выборки Δ называется разность между максимальным и минимальным элементами выборки или то же самое, что и разность между последним и первым элементами вариационного или статистического ряда: $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)}$.

Мода выборки (обозначается Mo) – это элемент, который чаще всего встречается в выборке, т.е. элемент статистического ряда, которому соответствует наибольшая частота: $Mo = y_k$, если $m_k = \max_i m_i$.

Если несколько элементов статистического ряда имеют одинаковую наибольшую частоту, то выборка имеет несколько мод.

Медиана выборки (обозначается Me) – это элемент, который находится посередине вариационного ряда выборки.

Если количество элементов выборки нечетно: $n = 2k - 1$, то посередине вариационного ряда находится один элемент с номером k : $Me = x_{(k)}$.

Если количество элементов выборки четно: $n = 2k$, то посередине вариационного ряда находятся два элемента с номерами k и $k + 1$ и медиана равна их среднему арифметическому: $Me = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$.

Среднее выборки (обозначается $\bar{x}$) равно среднему арифметическому всех элементов выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Среднее для статистического ряда вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_s m_s}{n},$$

где $n = m_1 + m_2 + \dots + m_s$.

Пример. Задана выборка: 4, 2, 10, 3, 5, 5, 8, 4, 10, 7, 3, 2, 5, 8, 3, 5, 2.

1) Записать выборку в виде вариационного и статистического ряда.

2) Вычислить размах, моду, медиану и среднее выборки.

3) Представить выборку в виде графика.

Решение. 1) Запишем вариационный ряд выборки:

2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 10.

Представим выборку в виде статистического ряда:

y_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	3	3	2	4	1	2	1

2) Размах выборки $\Delta = x_{(n)} - x_{(1)} = 10 - 2 = 8$.

Мода $Mo = 5$, поскольку элемент 5 имеет наибольшую частоту 4.

Для вычисления медианы найдем средний элемент вариационного ряда. Количество элементов выборки $n = 16$, посередине вариационного ряда находятся элементы $x_{(8)} = 4$, $x_{(9)} = 5$. Следовательно, медиана равна

$$Me = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5.$$

Среднее выборки находим по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s y_i m_i = \frac{1}{16} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1) = 4,75.$$

3) Обычно выборку представляют графически в виде **полигона частот**, при этом на оси абсцисс откладывают значения статистического ряда y_i , а на оси ординат – значения m_i/n (см. рис. 3).

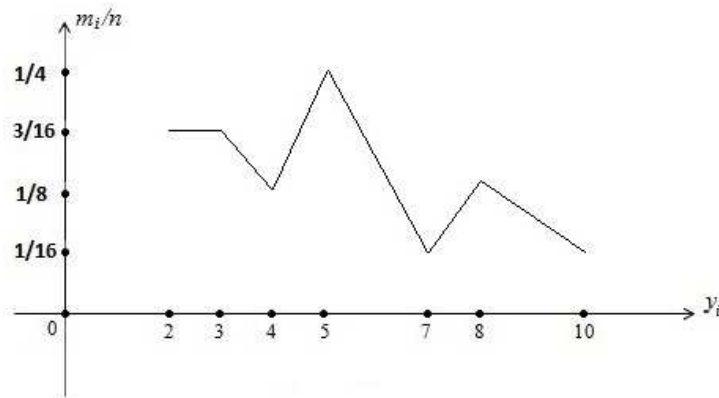


Рис. 3