

•

5.335. Знайти координати векторів довжини 1, що перпендикулярні вектору $\vec{a} = (3; 4)$.

Відповідь: $(4/5; -3/5)$ і $(-4/5; 3/5)$.

5.336. При яких значеннях x вектори $\vec{c} = (3 + 2x - x^2)\vec{a}$ і $\vec{b} = (x^3 + x)\vec{a}$, де $\vec{a} \neq \vec{0}$, однаково спрямовані?

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$.

5.337. При яких значеннях x вектори $\vec{c} = (x^2 + x^3)\vec{a}$ і $\vec{b} = (x^3 - 1)\vec{a}$, де $\vec{a} \neq \vec{0}$, протилежно спрямовані?

Відповідь: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

§ 6. Елементи математичного аналізу

6.1. Перетворення графіків та їх застосування до розв'язання рівнянь і нерівностей

Розв'язати рівняння і нерівності (завдання 6.1 – 6.30):

Група А

6.1. $\sqrt{x+4} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 2$. Відповідь: $x = 0$.

6.2. $\sqrt{x} = 2x^2 - 1$. Відповідь: $x = 1$.

6.2.* [1, § 34, приклад 8, с. 212] $\sqrt{x + \frac{1}{2}} = x^2 - \frac{1}{2}$. Відповідь: $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

6.3. $\sqrt{x} = 2 - x^2$. Відповідь: $x = 1$.

6.4. $2 \cdot 5^{|x|} = 2 - 9\sqrt[3]{|x|}$. Відповідь: $x = 0$.

6.4.* [1, § 34, приклад 3, с. 203] $||x| - 1| = 1 - \sqrt[3]{|x|}$. Відповідь: $x \in \{0; -1; 1\}$.

6.5. $2 \cdot 3^{|x|} = 7 - \sqrt{|x|}$. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$.

6.6. $3 \cdot 2^{|x|} = 2 - 4\sqrt[4]{|x|}$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

6.7. $\sin x = x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + 1$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$.

6.7.* [1, § 48, приклад 1, с. 305] $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$. Відповідь: $x = 1$.

6.8. $2 \cos \frac{\pi x}{3} = x^2$. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$.

6.8.* [1, § 39, приклад 6, с. 231] $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2$. Відповідь: $x \in \{0; 1\}$.

6.9. $\cos \frac{\pi x}{2} = 2x^2 - 3x + 1$. Відповідь: $x \in \{0; 1\}$.

6.10. $2 \sin x = 2x^2 + 4x + 1$. Відповідь: $x \in \emptyset$.

6.11. $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \sqrt{x + \frac{1}{2}}$. Відповідь: $x \in (0; 1/2]$.

6.12. $3 \log_4 x \leq 3x^2 - 14x + 11$. Відповідь: $x \in (0; 1] \cup [4; \infty)$.

6.13. $4\log_3(4x-7)+3 \leq 3\sqrt{5-2x}$. Відповідь: $x \in (7/4; 2]$.

6.13.* [1, § 34, приклад 2, с. 201] $\log_2(\frac{1}{2}x-1) \leq \sqrt{7-x}$.

Відповідь: $x \in (2; 6]$.

6.14. $2\log_{1/3}(5x-2) \geq |x+1|-4$. Відповідь: $x \in (2/5; 1]$.

6.15. $3\log_2(2-x) \leq 3^x+2$. Відповідь: $x \in [0; 2)$.

6.16. $\log_{1/2}(4-3x)+5 > 3 \cdot 4^{-x}$. Відповідь: $x \in (0; 4/3)$.

6.17. $\log_2(1-x)+1 \leq 2^{-x}$. Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; 1)$.

6.18. $2\pi \cos x = |x| - |x - \pi|$. Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$:

$n \leq -1$; $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} : k \geq 1$.

6.19. $\operatorname{tg} x = \frac{2}{\pi} \left(\left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right| \right)$.

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z} : n \leq 0$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z} : k \geq 1$.

6.20. $\frac{\pi}{2 \sin x} = \left| x - \frac{\pi}{2} \right| - \left| x + \frac{\pi}{2} \right|$. Відповідь: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$:

$n \leq -1$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbf{Z} : k \geq 1$.

Група Б

6.21. $|\log_7(x^2-9)| \geq x^2-15$. Відповідь: $x \in [-4; -3] \cup (3; 4]$.

6.22. $3^x \cdot x^3 = 3x^2 - 6x - 46$. Відповідь: $x = -3$.

6.22.* [1, § 34, приклад 5, с. 206]

Розв'язати нерівність $\sqrt{3-x(1-x)} < |x-2|+x+2$. Відповідь: $x \in (-1; 3]$.

6.23. $(x^2-4x+3)\log_3|x-2| < 2x-2$. Відповідь: $x \in (1; 2) \cup (2; 5)$.

6.24. $\frac{\sin x}{\frac{x}{2^x}} = \log_2 \frac{x}{\pi}$. Відповідь: $x = \pi$.

6.25. $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{112}$. Відповідь: $x = -4$.

6.25.* [1, § 34, приклад 6, с. 207]

$\frac{\sqrt{3-x}}{1-x} \leq |x-2|+x-1$. Відповідь: $x \in (-\infty, -1] \cup (1; 3]$.

6.26. $\sin 3x + 3x = \frac{2\pi^3}{\pi^2+x^2} + 2\pi$. Відповідь: $x = \pi$.

6.27. $\sqrt{x^2-6x-7} + |\log_3|x-6|| > (\sqrt{5}+0,5)(x-7)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (7; 9)$.

6.27.* [1, § 34, приклад 7, с. 208] $\sqrt{2-x^2} = \sin \frac{\pi|x|}{2}$. Відповідь: $x \in \{-1; 1\}$.

6.28. $|9-x^2| + \sqrt{x+3} = 10\log_{1/10}(x-0,9)$. Відповідь: $x = 1$.

6.29. $3^{(x-1)^2} = x + \frac{4}{x} - 1$. Відповідь: $x = 2$.

6.30. $x \sqrt[4]{\log_3^2(x+1)} \leq -x^2+2x+2$. Відповідь: $x \in (-1; 2]$.