

...хотя многие вещи и могли бы нам показаться в высшей мере необычайными и смешными, они тем не менее уже введены и приняты другими великими народами.

РЕНЭ ДЕКАРТ, "Рассуждение о методе"

Глава 6. Элементы математического анализа

§ 34. Преобразования графиков

34.1. Основные преобразования графиков функций. Рассмотрим основные преобразования графика функции $y = f(x)$, которые имеют естественную геометрическую интерпретацию.

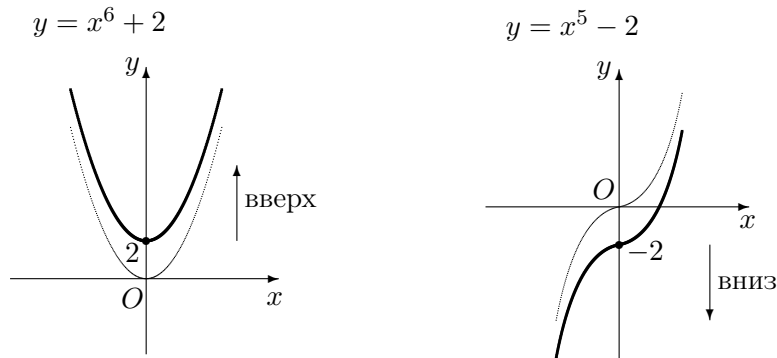


Рис. 6.1

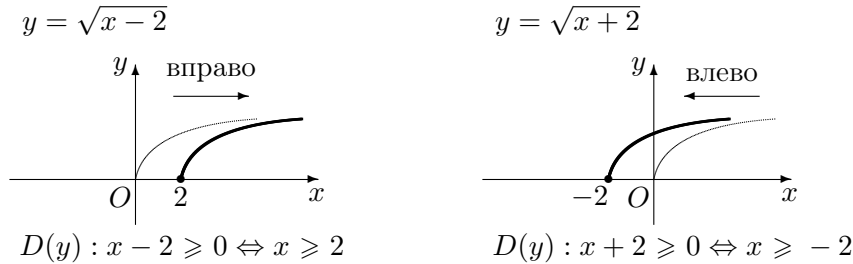


Рис. 6.2

1) $y = f(x) + a$, где a – некоторое действительное число, – **сдвиг графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy** . При $a > 0$ сдвиг осуществляется на a единиц вверх, а при $a < 0$ – на $|a|$ единиц вниз (см. примеры на рис. 6.1).

В приведенных на рис. 6.1 примерах можно осуществлять "дополнительный контроль" процесса построения графика, вычисляя значение функции в точке $x = 0$.

2) $y = f(x - a)$, где a – некоторое действительное число, – **сдвиг графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox** . При $a > 0$ сдвиг осуществляется на a единиц вправо, а при $a < 0$ – на $|a|$ единиц влево (см. примеры на рис. 6.2).

В приведенных на рис. 6.2 примерах можно осуществлять "дополнительный контроль" процесса построения графика путем нахождения области определения функции $D(y)$.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x+1} > 1-x$.

Решение. Это неравенство решено в § 11 главы 2 (пример 5) при помощи теоремы о равносильном преобразовании неравенства $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Приведем также его решение **графическим методом**.

График функции $y = \sqrt{x+1}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом влево вдоль оси Ox на единицу. Графики функций $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ и $y = g(x) = 1-x$ пересекаются в одной точке. Абсцисса этой точки $x = 0$, поскольку $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$ и $g(0) = 1-0 = 1$. Сопоставляя взаимное расположение графиков функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = 1-x$, находим множество решений неравенства – $(0, \infty)$ (см. рис. 6.3).

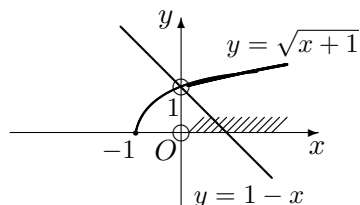


Рис. 6.3

Ответ: $x \in (0, \infty)$.

3) $y = kf(x)$ при $k > 1$ – **растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy** (см. примеры на рис. 6.4).

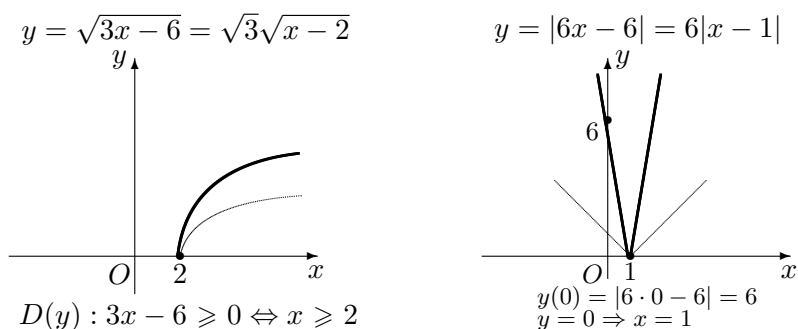


Рис. 6.4

4) $y = kf(x)$ при $0 < k < 1$ – **сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy** (см. примеры на рис. 6.5).

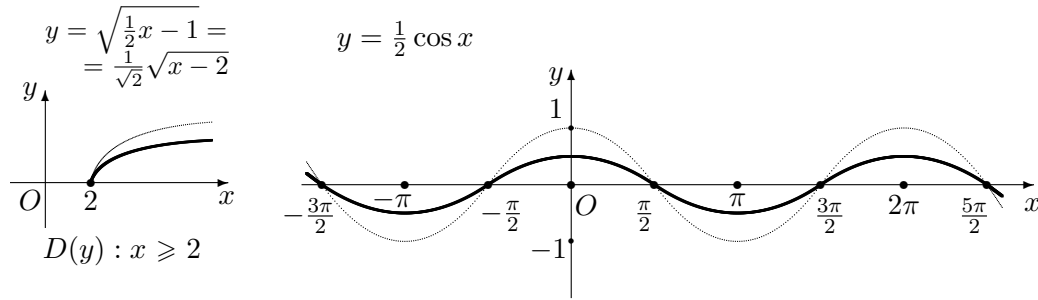


Рис. 6.5

Очевидно, что при преобразовании $y = kf(x)$ ($k > 0, k \neq 1$) вид графика функции $y = f(x)$ принципиально не меняется в том смысле, что функция $y = kf(x)$ имеет ту же область определения и те же промежутки возрастания и убывания, что и функция $y = f(x)$, а также сохраняет ряд других свойств этой функции (например, четность или нечетность, периодичность). При этом графики функций $y = kf(x)$ и $y = f(x)$ имеют общие точки пересечения с осью Ox , которые можно, таким образом, использовать для "дополнительного контроля" процесса построения графика.

5) $y = f(kx)$ при $k > 1$ – **сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox** (см. примеры на рис. 6.6).

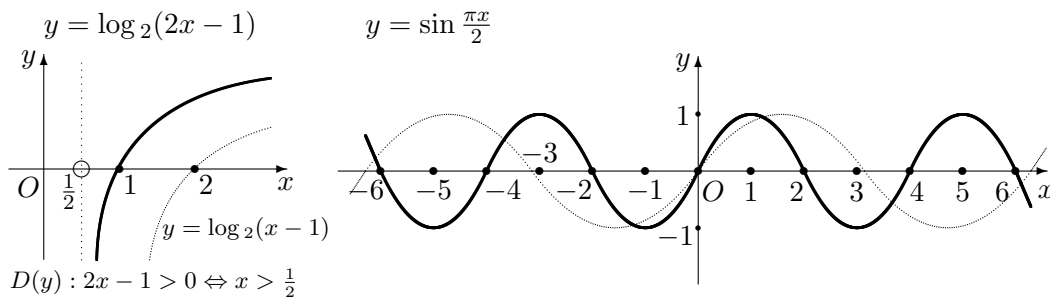


Рис. 6.6

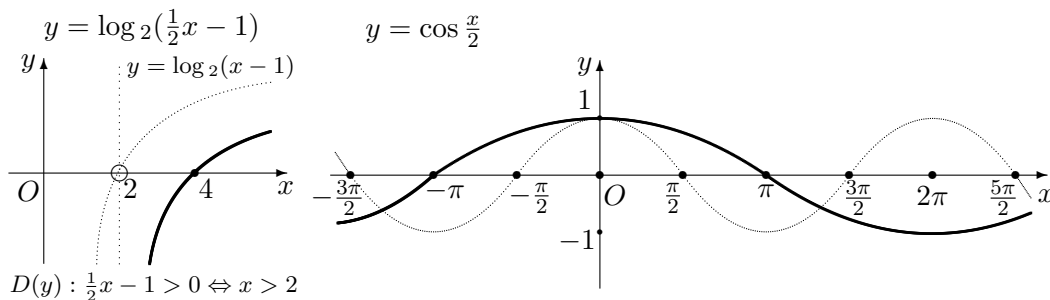


Рис. 6.7

Очевидно, что при сжатии вдоль оси Ox периодической функции главный период этой функции уменьшается. Так, главный период функции $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ равен 4, т.е. в $\pi/2$ раз меньше, чем главный период функции $y = \sin x$.

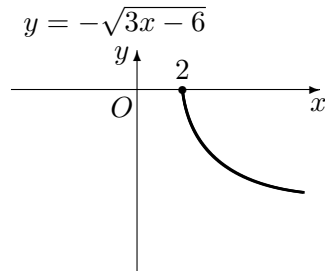
6) $y = f(kx)$ при $0 < k < 1$ – **растяжение графика функции $y = f(x)$**

вдоль оси Ox (см. примеры на рис. 6.7).

Очевидно, что при растяжении вдоль оси Ox периодической функции главный период этой функции увеличивается. Так, главный период функции $y = \cos \frac{x}{2}$ равен 4π , т.е. в 2 раза больше, чем главный период функции $y = \cos x$.

Очевидно также, что графики функций $y = f(kx)$ ($k > 0, k \neq 1$) и $y = f(x)$ имеют общую точку пересечения с осью Oy , а вот точки пересечения с осью Ox у этих графиков – разные.

7) $y = -f(x)$ – **симметричное отображение графика $y = f(x)$ относительно оси Ox** (см. примеры на рис. 6.8).



$$D(y) : 3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

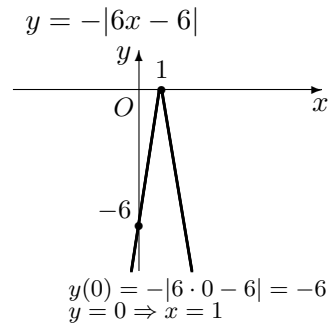
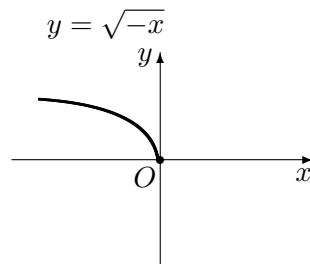


Рис. 6.8



$$D(y) : -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

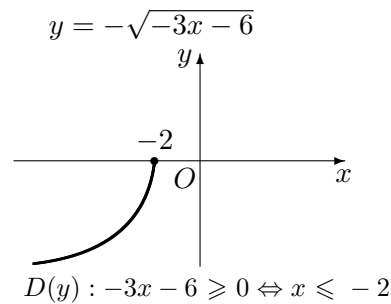
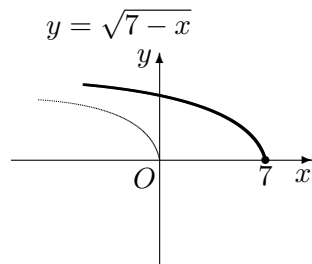


Рис. 6.9



$$D(y) : 7 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$$

Рис. 6.10

8) $y = f(-x)$ – **симметричное отображение графика $y = f(x)$ относительно оси Oy** (см. примеры на рис. 6.9).

Построим также график функции $y = \sqrt{7 - x}$. Поскольку $y = \sqrt{7 - x} = \sqrt{-(x - 7)}$, то график этой функции получается сдвигом графика функции

$y = \sqrt{-x}$ на 7 единиц вправо (см. рис. 6.10).

В приведенных на рис. 6.9, 6.10 примерах можно осуществлять "дополнительный контроль" процесса построения графика путем нахождения области определения функции $D(y)$.

Пример 2. Решить неравенство $\log_2(\frac{1}{2}x - 1) \leq \sqrt{7 - x}$.

Решение. Изобразим в одной координатной плоскости графики функций $f(x) = \log_2(\frac{1}{2}x - 1)$ и $g(x) = \sqrt{7 - x}$. Графики этих функций пересекаются в одной точке. Абсцисса этой точки $x = 6$, поскольку $f(6) = \log_2(\frac{1}{2} \cdot 6 - 1) = 1$ и $g(6) = \sqrt{7 - 6} = 1$. Сопоставляя взаимное расположение графиков функций $f(x) = \log_2(\frac{1}{2}x - 1)$ и $g(x) = \sqrt{7 - x}$, находим множество решений неравенства — $(2; 6]$ (см. рис. 6.11).

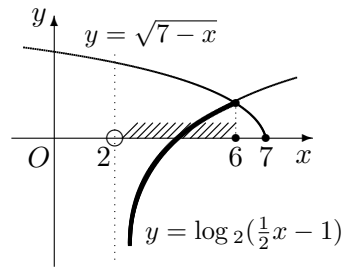


Рис. 6.11

Ответ: $x \in (2; 6]$.

9) **График функции $y = |f(x)|$.** Учитывая определение модуля (2.7), заметим, что часть графика этой функции совпадает с той частью графика функции $y = f(x)$, которая расположена не ниже оси Ox . Другая часть графика функции $y = |f(x)|$ получается симметричным отображением относительно оси Ox той части графика функции $y = f(x)$, которая расположена ниже оси Ox (см. примеры на рис. 6.12).

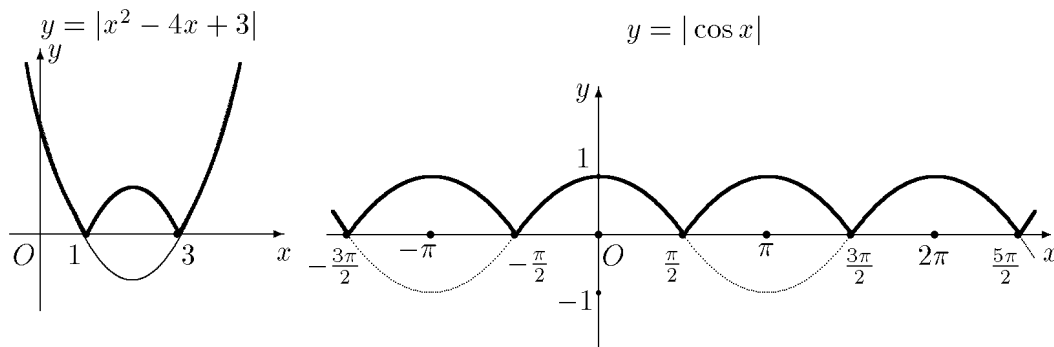


Рис. 6.12

Заметим, что функция $y = |\cos x|$ является периодической с главным периодом π .

10) **График функции $y = f(|x|)$.** Заметим, что $f(|-x|) = f(|x|)$, т.е. функция $y = f(|x|)$ — четная, и, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy .

Поскольку при $x \geq 0$ выполняется равенство $f(|x|) = f(x)$, то часть графика функции $y = f(|x|)$ совпадает с той частью графика функции $y = f(x)$, которая расположена справа от оси Oy или непосредственно на оси ординат. Если эту часть отобразить симметрично относительно оси Oy , то получим вторую часть графика функции $y = f(|x|)$, и построение этого графика будет завершено (см. примеры на рис. 6.13).

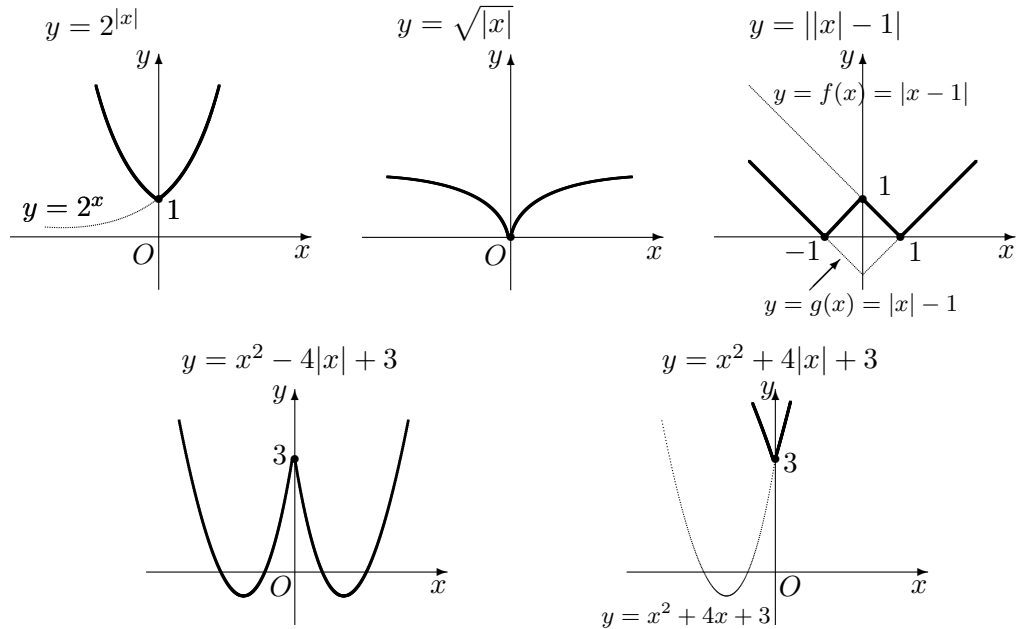


Рис. 6.13

Отметим, что график функции $y = ||x| - 1|$ может быть получен из графика функции $y = f(x) = |x - 1|$ описанным здесь преобразованием $y = f(|x|)$, а также из графика функции $y = g(x) = |x| - 1$ преобразованием $y = |g(x)|$, описанным выше (см. рис. 6.13).

Построим также график функции $y = 1 - \sqrt[3]{|x|}$. Этот график получим, если сначала отобразим график функции $y = \sqrt[3]{|x|}$ симметрично относительно оси Ox (при этом получим график функции $y = -\sqrt[3]{|x|}$), а затем выполним сдвиг графика $y = -\sqrt[3]{|x|}$ на одну единицу вверх (см. рис. 6.14).

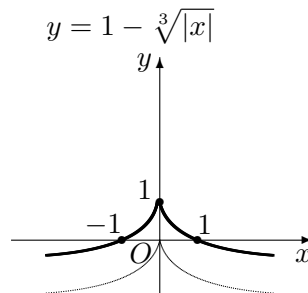


Рис. 6.14

Пример 3. Решить уравнение $||x| - 1| = 1 - \sqrt[3]{|x|}$.

Решение. Изобразим в одной координатной плоскости графики функций $y = ||x| - 1|$ и $y = 1 - \sqrt[3]{|x|}$ (см. рис. 6.15). Графики этих функций пересекаются в трех точках, абсциссы которых $x = 0$ и $x = \pm 1$. Таким образом, уравнение имеет три корня.

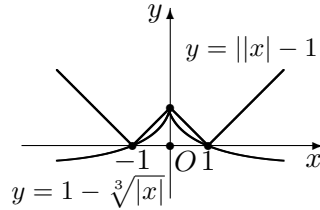


Рис. 6.15

Ответ: $x \in \{0; -1; 1\}$.

34.2. Построение графиков суммы, произведения и частного функций.

График суммы функций $y = f_1(x) + f_2(x)$ может быть построен с использованием графиков функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ путем сложения ординат y_1 и y_2 , соответствующих одному и тому же значению переменной x из области определения функции y .

В качестве примера построим график функции $y(x) = 3x + \frac{2}{x^3}$. Заметим, что при больших положительных значениях x сумма $3x + \frac{2}{x^3}$ мало отличается от $3x$, и, следовательно, график функции $y(x) = 3x + \frac{2}{x^3}$ приближается к прямой $y = f_1(x) = 3x$. Напротив, при положительных значениях x , близких к нулю, сумма $3x + \frac{2}{x^3}$ мало отличается от $\frac{2}{x^3}$, и, следовательно, график функции $y(x) = 3x + \frac{2}{x^3}$ приближается к кривой $y = f_2(x) = \frac{2}{x^3}$.

Кроме того, при любом положительном x сумма $3x + \frac{2}{x^3}$ больше каждого из слагаемых, поэтому график функции $y(x) = 3x + \frac{2}{x^3}$ при $x > 0$ расположен выше каждого из графиков $y = f_1(x) = 3x$ и $y = f_2(x) = \frac{2}{x^3}$.

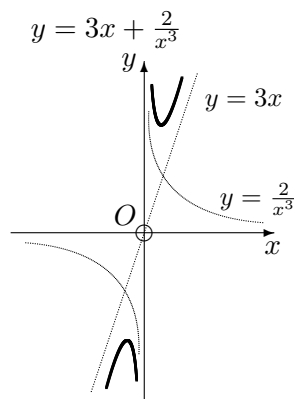


Рис. 6.16

К аналогичным выводам придем также и при отрицательных значениях x .

Вдобавок к отмеченным свойствам функции $y(x)$ заметим, что эта функция –