

4.5. Прогресії

Група А

4.81. В арифметичній прогресії сума $(k+2)$ перших членів $S_{k+2} = 7k^2 - 5k$.

Знайти a_{2n-1} .

Відповідь: $a_{2n-1} = -48n + 60$.

4.81.* [1, § 30, приклад 1, с. 147] Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів дорівнює $S_n = 6n^2 - 2n$ при будь-якому n .

Відповідь: перший член прогресії $a_1 = 4$, різниця прогресії $d = 12$.

4.82. Сума першого і п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює $5/3$, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює $65/72$. Знайти суму сімнадцяти перших членів прогресії.

Відповідь: $119/3$.

4.83. Знайти арифметичну прогресію a_n , якщо відомо, що

$(a_1 + a_3 + a_5) = -12, a_1 a_3 a_5 = 80$.

Відповідь: $(a_1 = 2, d = -3), (a_1 = -10, d = 3)$.

4.84. Сума трьох чисел, що є послідовними членами арифметичної прогресії, дорівнює 2, а сума квадратів цих чисел дорівнює $14/9$. Знайти ці числа.

Відповідь: $(1/3; 2/3; 1)$.

4.85. Знайти зростаючу арифметичну прогресію, у якої сума перших трьох членів дорівнює 27, а сума їх квадратів дорівнює 275.

Відповідь: $a_1 = 5; d = 4$.

4.86. Знайти суму усіх парних трьохцифрових чисел, що діляться на 3.

Відповідь: 82 350.

4.87. Розв'язати рівняння:

а) $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.

б) $(x + 1) + (x + 4) + \dots + (x + 28) = 155$.

Відповідь: а) $x = 55$; б) $x = 1$.

4.87.* [1, § 30, приклад 2, с. 147] При яких значеннях x послідовність $a_1 = 3, a_2 = \cos^2 x, a_3 = 3 \sin x$ є арифметичною прогресією?

Відповідь: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbf{Z}; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$.

•

4.88. Записати періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:

а) $0,(7)$; б) $0,5(25)$.

Відповідь: а) $7/9$; б) $52/99$.

4.88.* [1, § 30, приклад 3, с. 148] При яких значеннях x послідовність $b_1 = 4, b_2 = 3\sqrt{\log_{4x} x^2}, b_3 = \log_{2x^2} x^3$ є геометричною прогресією?

Відповідь: $x = \sqrt[4]{2}$.

4.89. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 13, а їхній добуток дорівнює 27. Знайти ці числа.

Відповідь: 1;3;9.

4.90. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії, у якій сума першого і третього членів дорівнює 40, а сума другого і четвертого – дорівнює 80.

Відповідь: $a_1 = 8; q = 2$.

4.91. Знайти п'ятий член геометричної прогресії b_n , у якій

$$b_1 + b_4 = -28, \quad b_2 + b_3 = 8.$$

Відповідь: $b_5 = 64$ чи $b_5 = -2$.

4.92. В зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 66, добуток другого і передостаннього членів дорівнює 128, сума всіх членів дорівнює 126. Скільки членів в прогресії?

Відповідь: 6.

4.93. Число членів геометричної прогресії парне. Сума всіх її членів у три рази більше суми її членів, що знаходяться на непарних місцях. Знайти знаменник прогресії.

Відповідь: $q = 2$.

•

4.94. В нескінченно спадній геометричній прогресії з додатніми числами сума трьох перших членів дорівнює 10,5; а сума прогресії дорівнює 12. Знайти перший член і знаменник прогресії.

Відповідь: $b_1 = 6; q = 1/2$.

4.95. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 3, а сума кубів усіх її членів дорівнює $108/13$. Знайти прогресію.

Відповідь: $b_1 = 2, q = 1/3$.

4.95.* [1, § 30, приклад 4, с. 149] Сума другого і п'ятого членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 18, а добуток третього і четвертого її членів дорівнює 32. Обчислити суму прогресії.

Відповідь: 64.

4.96. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо її сума в три рази більша суми трьох її перших членів.

Відповідь: $\sqrt[3]{2/3}$.

4.97. Сума S нескінченно спадної геометричної прогресії на 2 більша суми перших трьох членів цієї прогресії. Сума перших шести членів дорівнює 3. Знайти S .

Відповідь: 4.

4.98. Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює найбільшому значенню функції $f(x) = x^3 + 3x - 9$ на відрізку $[-2; 3]$, різниця між першим і другим членом прогресії дорівнює $f'(0)$. Знайти знаменник прогресії.

Відповідь: $2/3$.

Група Б

4.99. Знайти суму перших дев'ятнадцяти членів арифметичної прогресії $a_1, a_2, \dots$, якщо відомо, що $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Відповідь: 1064.

4.100. Знайти трицифрове число, цифри якого утворюють арифметичну прогресію і яке ділиться на 45.

Відповідь: 630; 135; 765.

•

4.101. Три числа є послідовними членами геометричної прогресії. Якщо від третього відняти 4, то ці числа будуть послідовними членами арифметичної прогресії. Якщо ж від другого і третього членів одержаної арифметичної прогресії відняти по одиниці, то одержані числа знову будуть послідовними членами геометричної прогресії. Знайти ці числа.

Відповідь: $(1; 3; 9); (1/9; 7/9; 49/9)$.

4.102. Знайти три числа, що є послідовними членами геометричної прогресії, якщо відомо, що збільшення другого числа на 2 робить ці три числа послідовними членами арифметичної прогресії, а якщо після цього збільшити останнє число на 9, то одержані тепер числа знову будуть членами геометричної прогресії.

Відповідь: $(4; 8; 16); (4/25; -16/25; 64/25)$.

4.103. Три числа, з яких третім є 12, є трьома послідовними членами геометричної прогресії. Якщо замість 12 узяти 9, то ці три числа будуть трьома послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти ці числа.

Відповідь: $(3; 6; 12); (27; 18; 12)$.

4.104. Три числа, сума яких дорівнює 26, складають геометричну прогресію. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 6 і 3, то вийдуть три числа, що складають арифметичну прогресію. Знайти ці числа.

Відповідь: 2; 6; 18.

4.105. Різниця третього і другого членів геометричної прогресії дорівнює 12. Якщо до першого члена додати 10, а до другого 8, а третій залишити без зміни, то нові три числа утворять арифметичну прогресію. Знайти суму п'яти перших членів геометричної прогресії.

Відповідь: 186.

4.106. Чотири числа утворюють геометричну прогресію. Якщо збільшити друге число на 4, третє число – на 5, а інші числа залишити без змін, то одержимо арифметичну прогресію. Знайти п'ятий член геометричної прогресії.

Відповідь: 48.

4.107. Задано чотири числа, що утворюють арифметичну прогресію. Якщо збільшити третє число на 4, четверте число – на 16, а інші числа

залишити без змін, то одержимо геометричну прогресію. Знайти задані числа.

Відповідь: 4; 8; 12; 16.

4.108. Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три – геометричну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 40, а сума середніх – дорівнює 20.

Відповідь: -5 ; 5; 15; 45.

4.108.* [1, § 30, приклад 5, с. 150] Дано чотири числа, з яких перші три є послідовними членами геометричної, а останні три – послідовними членами арифметичної прогресії. Сума крайніх чисел дорівнює 32, сума середніх – дорівнює 24. Знайти ці числа.

Відповідь: (32; 16; 8; 0) чи (2; 6; 18; 30).

4.109. Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють арифметичну прогресію, а останні три – геометричну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 22, а сума середніх – дорівнює 20.

Відповідь: 4; 8; 12; 18 або $35/2$; $25/2$; $15/2$; $9/2$.

4.110. Знайти чотири цілих числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх – дорівнює 12.

Відповідь: 2; 4; 8; 12.

4.111. Знайти чотири цілих числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, якщо сума крайніх чисел дорівнює 21, а сума середніх – дорівнює 18.

Відповідь: 3; 6; 12; 18.

4.112. Три відмінних від нуля дійсні числа утворюють арифметичну прогресію, а квадрати цих чисел, узяті в тому ж порядку, утворюють геометричну прогресію. Знайти всі знаменники такої геометричної прогресії.

Відповідь: 1; $3 + 2\sqrt{2}$; $3 - 2\sqrt{2}$.

§ 5. Геометрія

5.1. Планіметрія

Група А

У прямокутному трикутнику (задачі **5.1** – **5.8**):

5.1. довжини катетів рівні 2 і 6. Знайти довжину бісектриси прямого кута.

Відповідь: $3\sqrt{2}/2$.