

•

Знайти область визначення функції (завдання **1.75** – **1.86**):

**1.75.**  $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8} + \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{3x + 12}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-4, -2] \cup [4; 5]$ .

**1.76.**  $y = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{x^2 - x - 12} + \sqrt{8 - 2x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-6, -3] \cup \{4\}$ .

**1.76.\*** [1, § 6, приклад 14, с. 29]

$y = \sqrt{64 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{6 - 2x}$ . Відповідь:  $D(y) = [-8; 1] \cup \{3\}$ .

**1.77.**  $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{-2x + 4}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-3, -2] \cup [-1; 2]$ .

**1.78.**  $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-5; 1] \cup [3; 5]$ .

**1.79.**  $y = \sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{14 - 4x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-4, -2] \cup [3; 7/2]$ .

**1.80.**  $y = \sqrt{36 - x^2} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} + \sqrt{33 - 6x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-6, -4] \cup [2; 11/2]$ .

**1.81.**  $y = \sqrt{52 - 8x} - \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{x^2 - 3x - 10}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-7, -2] \cup [5; 13/2]$ .

**1.82.**  $y = \sqrt{15 - 2x - x^2} + \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \sqrt{25 - 10x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-5, -4] \cup [1; 5/2]$ .

**1.83.**  $y = \sqrt{42 - x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 20} + \sqrt{35 - 6x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-7, -5] \cup [4; 35/6]$ .

**1.84.**  $y = \sqrt{x^2 + 2x - 5} + \sqrt{10 - 2x - x^2} + \sqrt{25 - 10x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [-1 - \sqrt{11}, -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}, -1 + \sqrt{11}]$ .

**1.85.**  $y = \sqrt{18 - 3x - x^2} + \sqrt{2x^2 + 9x - 26} + \sqrt{45 - 20x}$ .

Відповідь:  $D(y) = [2; 9/4]$ .

**1.86.**  $y = \sqrt{14 - 5x - x^2} + \sqrt{x^2 + 6x - 7} - \sqrt{45 - 30x}$ .

Відповідь:  $D(y) = \{-7\} \cup [1; 3/2]$ .

## § 2. Алгебраїчні рівняння і нерівності

### 2.1. Раціональні рівняння і нерівності

#### Група А

Розв'язати рівняння (завдання **2.1** – **2.6**):

**2.1.**  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$ . Відповідь:  $x \in \{-2; 1\}$ .

**2.2.**  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} = 0$ . Відповідь:  $x = -3$ .

**2.3.**  $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ . Відповідь:  $x = 3$ .

**2.3.\*** [1, § 9, приклад 6, с. 41]

$$\frac{x+3}{2x-4} - \frac{3x+4}{x^2-4} - 1 = 0. \text{ Відповідь: } x = -3.$$

$$\mathbf{2.4.} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}. \text{ Відповідь: } x = -2 \pm \sqrt{2}.$$

$$\mathbf{2.5.} \frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1. \text{ Відповідь: } x \in \{0; 1\}.$$

$$\mathbf{2.6.} \frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{-5; 1; -1 \pm \sqrt{6}\}.$$

•

Розв'язати нерівності (завдання **2.7** – **2.85**):

$$\mathbf{2.7.} x+5 - \frac{x}{x+4} < \frac{5}{x+4}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -5) \cup (-4, -3).$$

$$\mathbf{2.8.} \frac{1}{x} < \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}. \text{ Відповідь: } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.9.} \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \leq \frac{4}{3}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2] \cup (0, 6].$$

$$\mathbf{2.10.} 4x+5 < \frac{5x^2+4}{x}. \text{ Відповідь: } x \in (0; 1) \cup (4, \infty).$$

$$\mathbf{2.11.} \frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty).$$

$$\mathbf{2.12.} \frac{x-1}{2} - \frac{1}{x+1} > 3. \text{ Відповідь: } x \in \left(\frac{1-\sqrt{73}}{6}, -1\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{73}}{6}\right).$$

$$\mathbf{2.13.} \frac{3x+1}{3} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}. \text{ Відповідь: } x \in [-3, -1) \cup (-1/3; 0] \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.14.} \frac{x+1}{x+1} + \frac{x+2}{x+2} < \frac{1}{x-1}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2) \cup (-5/4; -1) \cup (1; 5).$$

$$\mathbf{2.15.} \frac{1}{2-x} + \frac{x}{2+x} \geq 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

$$\mathbf{2.16.} \frac{1+x}{x-1} + \frac{1-x}{x+1} < 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.17.} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1} < 2. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (0; 1/2) \cup (1, \infty).$$

$$\mathbf{2.18.} \frac{2x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x+2}. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -3) \cup (-2; 3).$$

$$\mathbf{2.19.} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}. \text{ Відповідь: } x \in [-\sqrt{2}, 0) \cup (1, \sqrt{2}] \cup (2; \infty).$$

$$\mathbf{2.20.} \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \geq 1. \text{ Відповідь: } x \in [1-2\sqrt{2}, -1) \cup (3; 1+2\sqrt{2}].$$

$$\mathbf{2.21.} \frac{x^2-5x+9}{x^2-6x+5} < 1. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -4) \cup (1, 5).$$

$$\mathbf{2.22.} \frac{2x^2+3x-4}{x^2+x-6} \geq 2. \text{ Відповідь: } x \in [-8, -3) \cup (2, \infty).$$

- 2.23.**  $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-2, -1) \cup \{3\}$ .
- 
- 2.24.**  $x - 1 > \frac{4x}{3 - x}$ . Відповідь:  $x \in (3, \infty)$ .
- 2.25.**  $2 - x < \frac{x + 4}{x + 1}$ . Відповідь:  $x \in (-1, \infty)$ .
- 2.26.**  $3x + \frac{3x^2}{1,5 - x} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 0] \cup (1, 5; \infty)$ .
- 2.27.**  $4x + \frac{4x^2}{3 - x} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 0] \cup (3, \infty)$ .
- 2.28.**  $\frac{6x}{3 - x} \leq 2x$ . Відповідь:  $x \in \{0\} \cup (3, \infty)$ .
- 2.29.**  $\frac{8x}{2 - x} \leq 4x$ . Відповідь:  $x \in \{0\} \cup (2, \infty)$ .
- 2.30.**  $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x}$ . Відповідь:  $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$ .
- 
- 2.31.**  $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \leq 2$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ .
- 2.32.**  $\frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x + 1} \leq 2$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup (-1, \infty)$ .
- 2.32.\*** [1, § 9, приклад 4, с. 40]  
 $\frac{9}{x + 1} - \frac{4}{x - 4} - 5 \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup \{2\} \cup (4, \infty)$ .
- 2.33.**  $\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x - 1} \geq -2$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 1) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$ .
- 2.34.**  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 4} \geq -1$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -4) \cup \{-2\} \cup (0, \infty)$ .
- 2.35.**  $\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 3} \leq 1$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \cup \{1\}$ .
- 2.36.**  $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x - 5} \geq 4$ . Відповідь:  $x \in (1; 5) \cup \{6\}$ .
- 2.37.**  $\frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x + 1} \geq 4$ . Відповідь:  $x \in \{-6\} \cup (-5; -1)$ .
- 2.38.**  $\frac{1}{x} - \frac{25}{x - 4} \geq 4$ . Відповідь:  $x \in \{-1\} \cup (0; 4)$ .
- 2.39.**  $\frac{1}{x + 3} - \frac{25}{x - 1} \geq 4$ . Відповідь:  $x \in \{-4\} \cup (-3; 1)$ .
- 2.40.**  $\frac{1}{x - 3} + 5 \geq \frac{16}{x + 2}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$ .
- 2.41.**  $\frac{16}{x - 2} + 5 \geq \frac{1}{x + 3}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup \{-2\} \cup (2, \infty)$ .

- 
- 2.42.  $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \leq -1$ . Відповідь:  $x = 1$ .
- 2.43.  $1 + \frac{x-1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ . Відповідь:  $x \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ .
- 2.44.  $\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2} \geq \frac{1}{4}$ . Відповідь:  $x \in [-2\sqrt{2}, 0) \cup (0; 2\sqrt{2}]$ .
- 2.45.  $2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3x-1}{x^2}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ .
- 
- 2.46.  $\frac{2}{3x-3} + \frac{4}{3x+3} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup [1/3; 1)$ .
- 2.47.  $\frac{4x+8}{4x+8} + \frac{4x-8}{4x-8} \geq 0$ . Відповідь:  $x \in (-2; 0] \cup (2, \infty)$ .
- 2.48.  $\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{x^2+2x} \geq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup (0; 2/3] \cup (2, \infty)$ .
- 2.49.  $\frac{x}{x^2-4} \leq \frac{1}{2x+4}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 2)$ .
- 2.50.  $\frac{4}{x^2-9} \geq \frac{2}{x^2+3x}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; 0) \cup (3, \infty)$ .
- 2.51.  $\frac{2}{x^2-4} \geq \frac{1}{x^2+2x}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 0) \cup (2, \infty)$ .
- 2.52.  $\frac{2}{x^2-2x} \leq \frac{x+2}{x^2-4}$ . Відповідь:  $x \in (0; 2) \cup (2, \infty)$ .
- 2.53.  $\frac{4}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+3x} \geq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup (0; 1] \cup (3, \infty)$ .
- 2.54.  $\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{1}{4+2x} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup [-2/3; 0)$ .
- 2.55.  $\frac{3}{x-3} - \frac{1}{x} \geq \frac{x+15}{x^2-9}$ . Відповідь:  $x \in (-3; 0) \cup (3, \infty)$ .
- 2.56.  $\frac{3}{x-5} + \frac{x-35}{x^2-25} \leq \frac{2}{x}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -5) \cup (0; 5)$ .
- 2.57.  $\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x} \geq \frac{x+8}{x^2-16}$ . Відповідь:  $x \in (-4; 0) \cup (4, \infty)$ .
- 2.58.  $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x^3-1}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty)$ .
- 
- 2.59.  $\frac{2x}{x-5} + \frac{2x^2}{25-x^2} \leq \frac{5}{x+5}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 5)$ .
- 2.60.  $\frac{11}{5x-15} + \frac{2x+6}{9-x^2} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; 3)$ .
- 2.61.  $\frac{x-3}{2} + \frac{1}{x+3} + \frac{2x}{9-x^2} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$ .
- 2.62.  $\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1} \leq \frac{3-2x}{1-4x^2}$ . Відповідь:  $x \in (-1/2; 1/2) \cup (1/2; \infty)$ .
- 2.63.  $\frac{1}{2x-4} + \frac{2}{4-x^2} \geq 0$ . Відповідь:  $x \in (-2; 2) \cup (2, \infty)$ .

**2.64.**  $\frac{1}{x} + \frac{x}{16 - x^2} \geq \frac{4}{x^2 + 4x}$ . Відповідь:  $x \in (-4; 0) \cup (0; 4)$ .

**2.65.**  $\frac{x}{3x - 1} + \frac{3x^2}{1 - 9x^2} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 1] \cup (-1/3; 1/3)$ .

**2.66.**  $\frac{5x}{5x - 1} \geq \frac{1}{1 - 25x^2}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1/5) \cup (1/5; \infty)$ .

**2.67.**  $\frac{10 + 2x}{25 - x^2} + \frac{4}{x} \leq \frac{2}{x - 5}$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 0) \cup (5, \infty)$ .

• **2.68.**  $x^2 \left( \frac{x^2 + 1}{x} - 2 \right) \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$ .

**2.69.**  $\left( \frac{2x}{2x - 1} + 1 \right) \frac{6x - 3}{4x^2 - x} \geq 0$ .

Відповідь:  $x \in (0; 1/4) \cup (1/4; 1/2) \cup (1/2; \infty)$ .

**2.70.**  $\frac{x - 3}{x + 3} \left( x + \frac{x^2}{3 - x} \right) \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup [0; 3) \cup (3, \infty)$ .

**2.71.**  $\left( \frac{x - 4}{x + 4} - \frac{x + 4}{x - 4} \right) \frac{x^2 - 16}{16} \geq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -4) \cup (-4; 0]$ .

**2.72.**  $\left( x + 1 - \frac{4x}{x + 1} \right) \left( x - 1 + \frac{4x}{x - 1} \right) \geq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

**2.73.**  $\left( 2 + \frac{x}{x + 1} \right) \frac{3x^2 + 3x}{12x + 8} \leq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -2/3) \cup (-2/3; 0]$ .

**2.74.**  $\frac{4 + x}{4 - x} \left( \frac{2x^2}{4 + x} - x \right) \leq 0$ . Відповідь:  $x \in [0; 4) \cup (4, \infty)$ .

**2.75.**  $\left( \frac{x - 1}{x} - \frac{1}{x - 1} \right) \frac{x - 1}{x} \geq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, 0) \cup \left( 0, \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}, \infty \right)$ .

**2.76.**  $\left( \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \frac{1 - x^2}{x} \leq 0$ . Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (0; 1) \cup (1, \infty)$ .

**2.77.**  $\left( \frac{2}{x^2 - 9} + \frac{1}{3 - x} \right) \frac{9 - x^2}{x} \geq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, -3) \cup (-3; -1] \cup (0; 3) \cup (3, \infty)$ .

**2.78.**  $\left( \frac{x}{x - 1} - \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} - \frac{x}{x + 1} \right) \frac{1}{x + 1} \leq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 1)$ .

• **2.79.**  $\left( \frac{2x}{9} - \frac{1}{2x} \right) : \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} \right) \leq 0$ .

Відповідь:  $x \in (-\infty, 3/2) \cup (-3/2; 0) \cup (0; 3/2]$ .

$$2.80. \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \frac{x}{x^2-1} \geq 0.$$

Відповідь:  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1, \infty)$ .

$$2.81. \left( x - \frac{5x}{x+2} \right) : \frac{x-3}{x+2} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in [0; 3) \cup (3, \infty).$$

$$2.82. \left( x + 1 - \frac{1-2x^2}{1-x} \right) : \left( 1 - \frac{1}{1-x} \right) \leq 0. \text{ Відповідь: } x \in (0; 1) \cup (1, \infty).$$

$$2.83. \left( \frac{x}{x-5} - 2x \right) : \frac{11-2x}{x-5} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in [0; 5) \cup (5; 5,5) \cup (5,5; \infty).$$

$$2.84. \left( \frac{x-1}{x} - \frac{x}{x+1} \right) : \frac{5}{x+1} \geq 0. \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 0).$$

$$2.85. \left( \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \right) : \frac{2x}{x^3+8} \leq 0.$$

Відповідь:  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2)$ .

•

Розв'язати системи нерівностей (завдання **2.86** – **2.89**):

$$2.86. \begin{cases} x - 3 + \frac{4}{x+1} > 0, \\ x + 3 + \frac{4}{x-1} < 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-1; 1).$$

$$2.87. \begin{cases} x^2 - 8x + 7 > 0, \\ 3x^2 - 22x + 7 \geq 0, \\ \frac{x^2 + 5x}{2x^2 + 3x - 35} \geq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -5) \cup (-5; 0] \cup (7, \infty).$$

$$2.88. \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 > 0, \\ 3x^2 - 5x - 2 \geq 0, \\ \frac{x^2 + 5x - 14}{2x^2 - 7x + 6} \geq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-\infty, -7] \cup (2, \infty).$$

$$2.89. \begin{cases} 6x + 16 - x^2 \geq 0, \\ 4x^2 + 4x + 1 > 0, \\ \frac{x^2 - 8x + 12}{2x^2 - x - 6} \leq 0. \end{cases} \text{ Відповідь: } x \in (-3/2; -1/2) \cup (-1/2; 2) \cup (2; 6].$$

### Група Б

Розв'язати рівняння и нерівності (завдання **2.90** – **2.114**):

$$2.90. x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0. \text{ Відповідь: } x = -1.$$

$$2.91. x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{1; 3; 5\}.$$

$$2.91.* [1, \S 9, \text{приклад 1, с. 38}]$$

$$2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{2; -3; 1/2\}.$$

$$2.92. x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0. \text{ Відповідь: } x \in \{-3; 2\}.$$

$$2.93. x^4 + 2x^3 - 8x - 16 = 0. \text{ Відповідь: } x = \pm 2.$$