

Тема 7. Закон всесвітнього тяжіння.

Гравітаційна взаємодія – взаємодія, яка є властивою всім тілам у всесвіті й виявляється в їхньому взаємному притяганні одне до одного.

Гравітаційна взаємодія здійснюється за допомогою особливого виду матерії – *гравітаційного поля*, яке існує навколо будь-якого тіла: зорі, планети, людини, книжки, молекули, атома тощо.

Ісаак Ньютон сформулював *закон всесвітнього тяжіння*, який часто називають четвертим законом Ньютона.

Між будь-яким двома тілами діють сили взаємного притягання, які прямо пропорційні добутку мас цих тіл і обернено пропорційні квадрату відстані між ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де m_1 і m_2 – маси тіл, що взаємодіють; r – відстань між тілами; G – гравітаційна стала (коефіцієнт пропорційності, однаковий для всіх тіл), $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Формула закону всесвітнього тяжіння дає *точний результат у таких випадках*:

- 1) якщо розміри тіл нехтовно малі порівняно з відстанню між ними, тобто коли тіла можна вважати матеріальними точками;
- 2) якщо обидва тіла мають кулясту форму та сферичний розподіл речовини; у цьому випадку за відстань між тілами беруть відстань між центрами сфер;
- 3) якщо одне з тіл, що взаємодіють, – куля, розміри та маса якої значно більші, ніж розміри та маса другого тіла, яке перебуває на поверхні цієї кулі або поблизу неї.

Сила тяжіння

Сила тяжіння – сила, яка характеризує гравітаційну взаємодію тіл із Землею.

Згідно із законом всесвітнього тяжіння модуль сили тяжіння $F_{\text{тяж}}$, яка діє на будь-яке тіло поблизу поверхні Землі, можна обчислити за формулою:

$$F_{\text{тяж}} = G \frac{mM_3}{r^2} = G \frac{mM_3}{(R_3 + h)^2},$$

де G – гравітаційна стала; m – маса тіла; M_3 – маса Землі; $r=R_3 + h$ – відстань від центра Землі до даного тіла.

Сила тяжіння, що діє на тіло, напрямлена вертикально вниз і прикладена до точки, яку називають *центром тяжіння тіла*.

Прискорення вільного падіння – це прискорення, якого набуває тіло під дією сили тяжіння і яке чисельно дорівнює силі, з якою гравітаційне поле Землі діє на тіло масою 1 кг.

Із формули $g = \frac{F_{\text{тяж}}}{m}$ та попереднього виразу для сили тяжіння отримаємо формулу для обчислення прискорення вільного падіння:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}.$$

Аналізуючи останню формулу, можна зробити ряд висновків:

1. *Прискорення вільного падіння не залежить від маси тіла* (цей факт був доведений Г. Галілеєм).
2. *Прискорення вільного падіння зменшується в разі підняття тіла над поверхнею Землі*, причому помітна зміна відбувається при піднятті на десятки і сотні кілометрів (якщо підняти тіло на 100 км, прискорення вільного падіння зменшиться на 0,3 м/с²).
3. Якщо тіло перебуває на поверхні Землі ($h = 0$) або поблизу неї ($h \ll R_3$), то прискорення вільного падіння обчислюють за формулою:

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}.$$

Силою тяжіння часто називають силу, що діє на якесь тіло поблизу поверхонь небесних тіл (зір, планет, супутників планет, астероїдів). Модуль цієї сили обчислюють за формулами:

$$F_{\text{тяж}} = G \frac{mM}{(R + h)^2}; \quad F_{\text{тяж}} = mg,$$

де G – гравітаційна стала; m – маса тіла; M – маса небесного тіла; R – радіус небесного тіла; g – прискорення вільного падіння на висоті h від поверхні небесного тіла.

Штучні супутники Землі. Перша космічна швидкість.

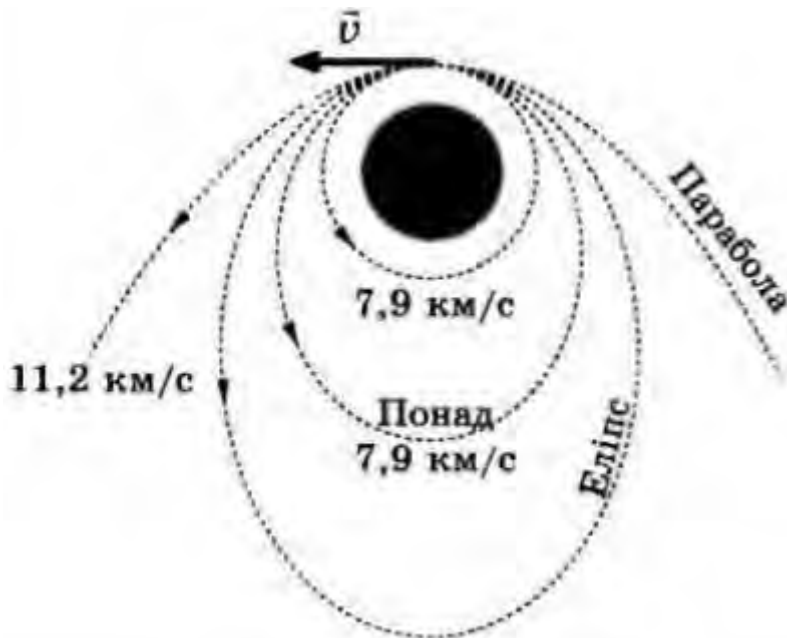
Швидкість, яку треба надати тілу в момент запуску з даної планети, щоб тіло стало її штучним супутником і при цьому рухалось би по колу, центр якого збігається з центром даної планети, називають **першою космічною швидкістю**.

Швидкість руху супутника на висоті h над поверхнею планети обчислюється за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}.$$

Значення першої космічної швидкості поблизу поверхні Землі обчислюють за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3}} = \sqrt{gR_3} = \sqrt{9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}} = 7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$



Таким чином, якщо супутник Землі має швидкість $v = 7,9$ км/с (першу космічну швидкість), то він рухається по коловій орбіті; за швидкості $7,9 \text{ км/с} < v < 11,2 \text{ км/с}$ він рухається по еліптичній орбіті. Розвинувши швидкість $11,2$ км/с (друга космічна швидкість), супутник Землі подолає її притягання та стане супутником Сонця.

Приклад 1. Як зміниться гравітаційна сила взаємодії двох тіл однакової маси, якщо масу одного тіла вдвічі збільшити, а другого – вдвічі зменшити?

Відповідь: не зміниться.

Приклад 2. Як зміниться гравітаційна сила взаємодії двох тіл, якщо відстань між ними зменшити вдвічі?

Відповідь: збільшиться в 4 рази.

Приклад 3. На якій висоті над поверхнею Землі прискорення вільного падіння втричі менше, ніж на її поверхні? Відповідь виразіть у радіусах Землі R_3 .

$$g_1 = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}.$$

$$g = G \frac{M_3}{R_3^2}$$

$$g_1 = \frac{1}{3} g, \quad G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} = \frac{1}{3} G \frac{M_3}{R_3^2},$$

$$(R_3 + h)^2 = 3R_3^2, \quad R_3 + h = \sqrt{3}R_3, \quad h = (\sqrt{3} - 1)R_3$$

Відповідь: $(\sqrt{3} - 1)R_3 \approx 0,73R_3$.

Приклад 4. Яка сила тяжіння діє на тіло масою 10 кг на планеті, маса та радіус якої вдвічі менші за земні?

$$m=10 \text{ кг}, \quad F_{\text{тяж}} = G \frac{mM}{R^2}, M=0,5M_3, \quad R=0,5R_3$$

$$F_{\text{тяж}} = 2G \frac{mM_3}{R_3^2} = 2mg = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 200 \text{ Н}$$

Відповідь: 200 Н.

Приклад 5. Визначте в радіусах Землі, на якій відстані від центра Місяця знаходиться точка, у якій сила гравітаційного притягання Землі врівноважується силою гравітаційного притягання Місяця. Відстань між центрами Землі та Місяця дорівнює 64 радіусам Землі, маса Землі більша за масу Місяця у 81 раз.

Запишемо сили, які діють на будь-яке тіло в шуканій точці з боку Землі та Місяця

$$F_1 = G \frac{mM_{\text{Землі}}}{(64R_{\text{Землі}} - r)^2}; \quad F_2 = G \frac{m \frac{M_{\text{Землі}}}{81}}{r^2}.$$

Але за умовою $F_1 = F_2$. Тому $(64R_{\text{Землі}} - r)^2 = 81r^2 \Rightarrow 64R_{\text{Землі}} - r = 9r$. Остаточно $r = 6,4R_{\text{Землі}}$.

Відповідь: $6,4R_3$.

Приклад 6. Визначте (у кілометрах за секунду) швидкість штучного супутника планети, маса якої становить $8 \cdot 10^{24}$ кг, а радіус – 8000 км. Супутник рухається по коловій орбіті на висоті 337 км від поверхні планети.

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}$$

Відповідь: 8 км/с.

Вага тіла

Вага тіла $\vec{P}$ – це сила пружності, з якою внаслідок притягання до Землі тіло діє на горизонтальну опору або вертикальний підвіс.

У СІ одиниця ваги, як і будь-якої іншої сили, – **ньютон (Н)**.

На відміну від сили тяжіння, яка прикладена до тіла, *вага прикладена до опори або підвісу*. Вага тіла і сила тяжіння відрізняються і своєю природою: сила тяжіння має гравітаційну природу; вага тіла – це сила пружності, тому *вага має електромагнітну природу*.

Якщо тіло перебуває у стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, то його вага за значенням дорівнює силі тяжіння і збігається з нею за напрямком:

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Вага тіла, яке рухається з прискоренням, напрямленим вертикально вгору, більша, ніж вага того самого тіла, яке перебуває у спокої, і дорівнює:

$$P = m(g + a).$$

Якщо людина рухається з прискоренням, напрямленим вертикально вгору, то вона зазнає *перевантаження* (збільшення ваги). Збільшення ваги тіла характеризується *коефіцієнтом перевантаження*.

Коефіцієнт перевантаження n – фізична величина, яка характеризує збільшення ваги тіла та дорівнює відношення прискорення a тіла до прискорення вільного падіння:

$$n = \frac{a}{g}.$$

У разі n -кратного перевантаження ($a = ng$) вага тіла збільшується в $(n + 1)$ разів.

Вага тіла, яке рухається з прискоренням, напрямленим вертикально вниз, менша, ніж вага того самого тіла, яке перебуває у спокої, і дорівнює:

$$P = m(g - a).$$

Якщо в цьому випадку прискорення, з яким рухається тіло, дорівнює прискоренню вільного падіння ($\vec{a} = \vec{g}$), то вага тіла дорівнює нулю й тіло припиняє діяти на опору.

Стан тіла, за якого вага тіла дорівнює нулю, називають **станом невагомості**.

У стані невагомості на тіло діє тільки сила тяжіння (тіло вільно падає), і навпаки: *якщо тіло рухається тільки під дією сили тяжіння, воно перебуває у стані невагомості.*

Приклад 7. Якою є вага тіла масою 5 кг, яке знаходиться у ліфті? Ліфт рухається з прискоренням 4 м/с^2 , спрямованим вертикально вниз. Вважайте, що $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Відповідь: 30 Н.

Приклад 8. За допомогою тросу жорсткістю 4 МН/м вертикально вгору піднімають кабінку ліфта масою 2 т з прискоренням 2 м/с^2 . Швидкість руху ліфта збільшується. Визначте (у міліметрах) розтяг троса. Вважайте, що $g=10 \text{ м/с}^2$.

$$P=F_{\text{пр}}, \quad m(g+a)=kx, \quad x=m(g+a)/k=2000(10+2)/4 \cdot 10^6=6 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 6 \text{ мм.}$$

Відповідь: 6 мм.

Домашнє завдання: 1.96, 1.97.